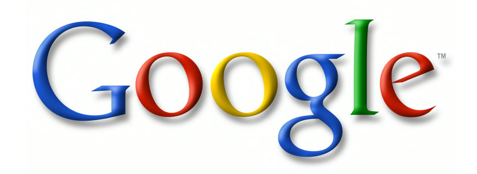
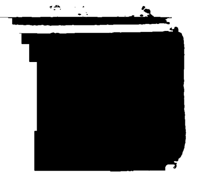

Google







Alexander Ziwet

Das

Elektromagnetische Feld.

Vorlesungen

über die

Maxwell'sche Theorie

von

Emil Cohn,

a. o. Professor der Physik an der Universität Strassburg.

Mit 54 Abbildungen.

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1900.

Druck von August Pries in Leipzig.

Vorwort.

„Die Strenge der Wissenschaft erfordert, dass wir das bunte Gewand, welches wir der Theorie überwerfen, und dessen Schnitt und Farbe vollständig in unserer Gewalt liegt, wohl unterscheiden von der einfachen und schlichten Gestalt selbst, welche die Natur uns entgegenführt, und an deren Formen wir aus unserer Willkür nichts zu ändern vermögen".

Hertz.

Den Inhalt dieses Buches bilden die elektromagnetischen Erscheinungen in dem Umfange, in welchem sie in den Maxwell'schen Gleichungen zusammengefasst sind.

Mein Wunsch ist, dass es den Leser vorbereiten möge, Helmholtz, Maxwell, Hertz im Original zu lesen.

Auf einige der Punkte, in welchen die vorliegende Darstellung von der zur Zeit üblichen abweicht, sei an dieser Stelle hingewiesen.

Der wesentlichste Unterschied betrifft die Lehre vom Magnetismus im engeren Sinn: Die Einführung des „wahren Magnetismus" scheint mir genau so zulässig und zweckmässig, wie die Einführung der „wahren Elektricität". Alles, was gegen die Zulässigkeit angeführt wird, stützt sich auf die Thatsache, dass es unmöglich ist, eine einzelne, positive oder negative, magnetische Menge herzustellen. Aber das gleiche gilt von den elektrischen Mengen. Der scheinbare Unterschied entsteht nur dadurch, dass die Gesammtheit der mag-

netischen Mengen, deren Summe stets Null ist, sich in einem festen Körper findet, — die Gesammtheit der elektrischen Mengen, deren Summe Null ist, hingegen in einem beliebigen von Leitern umschlossenen Raum, den in der Regel Gase erfüllen. Die genannte Erfahrungsthatsache ist in der Theorie vollständig zum Ausdruck gebracht, sobald man an Stelle der „magnetischen Mengen“ die „Magnetisirung“ einführt. Statt dessen mit Hülfe des Ampère'schen Aequivalenzprincips den Magnetismus fortzudefiniren, halte ich aus dem S. 300 angeführten Grunde nicht für zweckmässig; jedenfalls aber bleibt dieses Vorgehen ohne praktische Bedeutung, solange nicht auch in die magnetischen Massmethoden die Vertheilung der Molecularströme an Stelle der Magnetisirung eingeführt wird.

Ein bestimmtes absolutes Masssystem ist in der vorliegenden Darstellung nicht vorausgesetzt. Die Gleichungen sind durchweg so allgemein gehalten, dass nach Wunsch jedes der absoluten Masssysteme in sie eingeführt werden kann. Dadurch war es zugleich möglich, den Factor 4π aus den allgemeinen Gleichungen und aus den Beziehungen zwischen Kraftlinienzahl und Elektricitätsmengen fortzuschaffen, und ihn dahin zu verweisen, wo sein legitimer Platz ist: in die über Kugelflächen erstreckten Integrale. — Sätze, deren Gültigkeit unabhängig ist von der Vertheilung der Materie im Raum, sind auch in allgemeingültiger Form abgeleitet. Den Ausgangspunkt bilden daher nicht die algebraischen Ausdrücke für die Feldgrössen, sondern ihre Eigenschaften, welche durch Differentialgleichungen, Endlichkeits- und Stetigkeitsbedingungen ausgesprochen sind. — Die Bedeutung von Ausdrücken, wie „Kraft auf die Elektricitätsmenge Eins“, „Widerstand“, „Selbstinductionscoefficient“, ist auf ihren durch die Erfahrung gegebenen Geltungsbereich eingeschränkt worden.

Sachlich neu sind, soviel mir bekannt, die Sätze über

die mechanischen Spannungen und über die Beziehungen zwischen Arbeit und Energie im Fall von Eisenkörpern (Kapitel VIII A). Sie bilden mathematische Folgerungen aus anerkannten Prämissen.

Bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes war die Bestimmung des Buches als Lehrbuch massgebend. Die Erfahrungen meiner akademischen Lehrthätigkeit habe ich stets von neuem zu Rathe gezogen.

Hier hilft nun weiter kein Bemühn!
Sind's Rosen, nun sie werden blühn.

Strassburg i. E., im April 1900.

Inhalt.

Kapitel II. Die elektrische Strömung.

Kapitel III. Das statische magnetische Feld.

Kapitel IV.

Das magnetische Feld stationärer elektrischer Ströme.

Kapitel V. Inductionsströme in linearen Leitern.

Kapitel VI. Die Maxwell'schen Gleichungen.

Kapitel VII.
Die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes.

Kapitel VIII.
Erweiterungen der Maxwell'schen Gleichungen.

Druckfehler.

Seite 12, Zeile 26 lies Mengen statt Massen.
„ 32, „ 14 „ dass „ das.
„ 165, „ 14 „ $(\varphi_e - \varphi_a)$ statt $(\varphi_e - \varphi)$.

Unsere theoretischen Vorstellungen über das Wesen elektromagnetischer Vorgänge haben zum Ausgangspunkt die Untersuchung der mechanischen Kräfte, welche einerseits elektrisirte, andrerseits magnetisirte ruhende Körper ausüben und erleiden. Sie waren zuerst bekannt; sie bildeten auch zuerst den Gegenstand quantitativer Versuche. Dann dehnte sich das Gebiet der qualitativen und quantitativen Erfahrungen aus auf die stationären galvaniscnen Ströme, — weiter auf den Zusammenhang derselben mit den magnetischen Erscheinungen, — die Inductionswirkungen für geschlossene lineare Leiter, — endlich die sehr schnell veränderlichen Zustände. Zugleich wandelten sich die theoretischen Anschauungen. Die Vorstellungen, welche genügt hatten, um von den zuerst bekannten Erscheinungen Rechenschaft zu geben, wurden gegenüber den zuwachsenden Erfahrungen zu eng und mussten schrittweise erweitert werden. Dabei schienen sie sich mehr und mehr zu compliciren. — Erst in neuester Zeit hat sich gezeigt, dass die Summe der theoretischen Ergebnisse wiederum in wenige Sätze von grosser Allgemeinheit zusammengefasst werden kann. Es lassen sich wenige einfache Gesetze angeben und in Gleichungen formuliren, aus denen man die überwiegende Mehrzahl aller bekannten elektrischen und magnetischen Erscheinungen ableiten kann. Diese Sätze sind ihrem wesentlichen Inhalt nach von Maxwell aufgestellt. Eine Darstellung, welche die Maxwell'schen Grundgleichungen an die Spitze stellt und von ihnen aus deductiv fortschreitet, ist möglich, und kann durch ihre geschlossene, alle Wiederholung vermeidende Form Befriedigung gewähren. Sie beginnt aber nothwendig mit der Behandlung ganz abstracter mathematischer Symbole, die sich erst allmählich mit physikalischem

Inhalt füllen. Sie erscheint dadurch ungeeignet zur Einführung in die Theorie.

Wir wollen deshalb inductiv verfahren und zu zeigen suchen, wie man von den beobachteten Erscheinungen aus zu denjenigen theoretischen Anschauungen geführt wird, welche in den Maxwell'schen Gleichungen ihren einfachsten und umfassendsten Ausdruck finden. Wir werden, indem wir die unmittelbaren Ergebnisse der Beobachtungen verallgemeinern, im grossen und ganzen den Pfaden der historischen Entwicklung folgen; indem wir aber diejenigen Verallgemeinerungen ausschliessen, welche durch spätere Beobachtungen widerlegt sind, werden wir die Umwege zu vermeiden suchen. — Es werden nach einander behandelt werden:

I. Das statische elektrische Feld.
II. Die elektrische Strömung, insbesondere die stationäre.
III. Das statische magnetische Feld.
IV. Das magnetische Feld stationärer elektrischer Ströme.
V. Inducirte Ströme in linearen Leitern.
VI. Die Maxwell'schen Gleichungen. — Abriss einer deductiven Darstellung des Inhalts von I—V.
VII. Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes in Raum und Zeit.

Unsere Betrachtungen werden sich im allgemeinen auf die Vorgänge in ruhenden, isotropen Medien beschränken, und über das magnetische Verhalten der Körper gewisse vereinfachende Annahmen machen. — Erweiterungen der Theorie über diesen Rahmen hinaus enthält Kapitel VIII.

Kapitel I.

Elektrostatik.

§ 1. Elektricitätsmenge. — Coulomb's Gesetz.

Bei der Beschreibung der am längsten bekannten elektrischen Erscheinungen treffen wir den Ausdruck „Elektricitätsmenge". Wir gelangen zu einer Begriffsbestimmung dieser Grösse auf folgendem Wege:

1. Man reibe zwei verschiedenartige Körper, etwa Glas und Harz, an einander. Sie zeigen jetzt neue Eigenschaften. Die gleichen Eigenschaften können diesen Körpern auf mannigfache Art ertheilt werden. Wir bezeichnen sie, unabhängig von ihrer Entstehungsweise, als „elektrische" Eigenschaften, die Körper als „elektrisirt".

2. Man behandle in gleicher Weise mehrere Glas- und Harzstücke. Dann zeigt sich: Harz und Glas ziehen sich an, Harz und Harz, und ebenso Glas und Glas stossen sich ab. — Man behandle in gleicher Weise beliebige andere Körper: jeder verhält sich, nachdem er gerieben, allen anderen gegenüber qualitativ entweder wie das mit Harz geriebene Glas oder wie das mit Glas geriebene Harz. — Den Nachweis denken wir uns geführt mit Hülfe einer Drehwage, welche den einen der zu untersuchenden Körper trägt, und welcher der andere Körper genähert wird.

Wir schliessen: es giebt zwei Arten von Elektrisirung. Wir nennen die Körper, welche sich wie das Glas verhalten, „positiv", — die andern „negativ" elektrisch oder elektrisirt.

3. Man berühre eine zuvor geriebene Stelle eines der Körper K mit einem Metall M: M ist jetzt selbst elektrisch. Man berühre nun eine beliebige Stelle von M mit einem zweiten Metallstück M': auch M' ist jetzt elektrisch. Schaltet man dagegen zwischen K und M' statt M etwa einen Seidenfaden oder ein Stück Paraffin ein, so wird M' nicht elektrisch.

Wir schliessen: die Elektrisirung überträgt sich durch gewisse Körper, durch andere nicht. Wir nennen die ersteren „Leiter" der Elektricität, die anderen „Isolatoren". Die atmosphärische Luft gehört zu den Isolatoren. — Die Uebertragung der Elektrisirung braucht Zeit; diese Zeit ist cet. par. für verschiedene Leiter ausserordentlich verschieden; am kleinsten, und unter den Bedingungen unserer Versuche in der Regel unmessbar klein, für Metalle. In diesem Abschnitt behandeln wir aber lediglich Gleichgewichtszustände, ohne danach zu fragen, wie sich dieselben herstellen. Es fällt daher der erwähnte Unterschied zwischen den verschiedenen Leitern ausser Betracht.

Aus dem gesagten folgt ferner: um die Elektrisirung eines Körpers dauernd zu erhalten, müssen wir ihn mit Isolatoren umgeben. Die Elektrisirung eines Isolators ändert sich nur da, wo er mit einem Leiter berührt wird. Die Elektrisirung eines Leiters wird dagegen in seiner ganzen Ausdehnung beeinflusst durch Berührung mit einem elektrisirten Körper. Das Gesetz, nach dem sich in einem Leiter der neue elektrische Gleichgewichtszustand herstellt, werden wir später kennen lernen; schon jetzt aber können wir schliessen: um die Elektrisirung eines Isolators zu bestimmen, müssen wir die Geschichte jedes einzelnen seiner Theile kennen; ein Leiter hingegen ist elektrostatisch ein einziges Individuum. Wir werden also die übersichtlichsten Resultate zu erwarten haben, wenn wir ausschliesslich mit Leitern operiren.

4. Sei also ursprünglich nur der Leiter M_1 elektrisch. Es werde M_1 mit dem unelektrischen Leiter M_2 berührt; dann sind im allgemeinen nachher beide Leiter elektrisch, — unter bestimmten Umständen aber nur einer. Nämlich:

Man umschliesse M vollständig mit der leitenden Hülle H, bringe M und H zur Berührung, ziehe sodann M ohne Berührung aus H heraus: M ist dann unelektrisch, aber H ist elektrisch.

Das gleiche gilt, wenn H schon vor der Berührung elektrisch war.

5. Man wiederhole die unter Nr. 4 geschilderte Operation 1, 2, ... n mal, und bringe dann H jedesmal in die gleiche Lage gegenüber einem elektrisirten Körper A, in einem Abstand r, der gross ist gegen die Dimensionen von A wie von H. Es sei M jedesmal in der gleichen Weise elektrisirt gewesen, was aus seinem stets gleichen Verhalten gegenüber A erkannt werden kann. Dann verhalten sich die Kräfte zwischen A und H wie $1:2:\,..\,:n$.

6. Definition. Wir sagen: M hat seine gesammte „Elektricitätsmenge“ an H abgegeben. Dadurch ist die Elektricitätsmenge von H definirt als proportional der elektrischen Kraft, die H cet. par. auf einen bestimmten Körper in grosser Entfernung ausübt; — und von dieser so definirten Elektricitätsmenge zeigt der Versuch: sie ist etwas, was von einem Körper zu einem andern übergehen kann, dessen Gesammtmenge sich aber dabei nicht ändert.

7. Man bringe zwei so gemessene Elektricitätsmengen verschiedener Art a) einzeln, b) zusammen auf H: die Kräfte auf A, welche nach Nr. 2 entgegengesetzte Richtung haben, subtrahiren sich jetzt. Damit also die Definition in Nr. 6 allgemein gelte, muss man Elektricitätsmengen verschiedener Art entgegengesetztes Vorzeichen geben; und der Erfahrungssatz in Nr. 6 lautet genauer: die algebraische Summe aller Elektricität bleibt beim Uebergang constant. — Dass, wie erwähnt, die Glas-Elektricität positiv gerechnet wird, ist eine willkürliche Festsetzung.

8. Wir modificiren jetzt den Versuch unter Nr. 4: Der elektrisirte Leiter M werde in die Hülle H eingeschlossen, aber nicht mit ihr in Berührung gebracht. Wir finden: die elektrischen Kräfte im äusseren Raum sind genau die gleichen, wie wenn die Berührung stattgefunden hätte. Mit Benutzung unserer Definition unter Nr. 6 spricht sich diese Thatsache so aus: Die Wirkung einer Elektricitätsmenge im äusseren Raum ist die gleiche, mag sie sich auf der leitenden Hülle, oder an beliebiger Stelle im Hohlraum befinden. Wir können demnach auch, unserer Definition gemäss, die Summe der Elektricitätsmengen beliebig vieler verschiedener Körper

messen; wir brauchen sie dazu nur gleichzeitig in die leitende Hülle zu bringen.

9. Wir bringen zwei Körper in die Hülle, die durch Reibung an einander elektrisch geworden sind. Es zeigt sich: die elektrischen Kräfte im Aussenraum werden dadurch nicht verändert. Also: die algebraische Summe der durch die Reibung auf den beiden Körpern erzeugten Elektricitätsmengen ist Null. Das gleiche gilt für jeden beliebigen Process, durch welchen Elektrisirung entstehen kann, sobald wir nur die Gesammtheit aller bei diesem Process betheiligten Körper in Betracht ziehen. Insbesondere also: durch keinen wie immer gearteten Vorgang, der sich ausschliesslich im Innern einer leitenden Hülle abspielt, werden die elektrischen Kräfte im Aussenraum beeinflusst.

10. Zusammengefasst mit dem früher gesagten heisst das: die durch Nr. 6 definirten Elektricitätsmengen sind Grössen, deren algebraische Summe wir auf keine Weise ändern können. Nur die Elektricitätsvertheilung ist veränderlich. Das ist eine Eigenschaft, welche der Elektricität mit der Materie gemeinsam ist. Sofern es sich um Isolatoren handelt, kann sich ferner Elektricität nur gemeinsam mit ihrem materiellen Träger bewegen, — sie theilt also mit der Materie auch diejenige Eigenschaft, welche durch die „Continuitätsgleichung" ausgedrückt wird: der Inhalt eines Raumes ändert sich nur um diejenigen Beträge, welche durch die Oberfläche ein- und austreten. Ob wir der Elektricität diese Eigenschaft allgemein zuschreiben dürfen, hängt davon ab, ob wir auch in Leitern, wo unabhängig von der Materie eine Bewegung der Elektricität möglich ist, die Pfade derselben verfolgen können. Auf diese Frage kommen wir in Kapitel II zurück.*)

11. Aus unserer Definition folgt: die mechanische Kraft zwischen zwei Leitern mit den Elektricitätsmengen e_1 und e_2, die sich in der gegen ihre Dimensionen grossen Entfernung r von einander befinden, ist proportional mit dem Product $e_1 e_2$;

*) Zwischen der Terminologie der verschiedenen Autoren besteht keine Uebereinstimmung. Was in diesem Buche „Elektricität" schlechthin genannt wird, bezeichnet Hertz als „wahre Elektricität". Ueber die von Hertz als „freie Elektricität" bezeichnete Grösse s. § 12.

sie ist eine Abstossung oder Anziehung, je nach dem dieses Product positiv oder negativ ist. Coulomb hat experimentell gefunden, dass die Kraft ferner umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung ist. Demnach ist die Abstossung

$$f = c\frac{e_1 e_2}{r^2},$$

wo c eine positive Constante bedeutet.

12. In Nr. 11 haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die beiden Leiter von Luft umgeben sind. Bringen wir aber die beiden Leiter, ohne sie unter einander oder mit einem andern Leiter zu berühren, — d. h. also gemäss unserer Definition: mit unveränderten Elektricitätsmengen, — in ein anderes isolirendes Medium, so ändern sich die Kräfte in constantem Verhältniss. Wir können daher setzen

$$f = k\frac{e_1 e_2}{\varepsilon \,.\, r^2},$$

wo ε eine für das isolirende Medium charakteristische Constante ist, welche seine „Dielektricitätsconstante" heisst. Die Körper, durch deren Beschaffenheit die elektrischen Kräfte beeinflusst werden, nennt man „Dielektrica". Die elektrostatischen Erscheinungen sind vom Material der Leiter unabhängig; im Gebiet der Elektrostatik also sind die Bezeichnungen „Isolator" und „Dielektricum" gleichbedeutend.

Die Grösse k ist unabhängig von den Elektricitätsmengen, von der Entfernung und von dem Medium. Andere Umstände, welche auf den Werth der Kraft Einfluss haben, sind nicht bekannt; k ist also eine universelle Constante. Da wir nur Verhältnisse der ε definirt haben, können wir k einen willkürlichen Zahlwerth beilegen. Wir setzen $k = \frac{1}{4\pi}$. Demnach haben wir als Ausdruck des Coulomb'schen Gesetzes:

$$f = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon r^2}. \tag{1}$$

Entfernungen r und Kräfte f können in mechanischem Mass gemessen werden. Die Gleichung (1) lehrt, wie mittels solcher Messungen zwei Elektricitätsmengen oder zwei Dielektricitätsconstanten mit einander verglichen werden können. Sie macht ferner, sobald die mechanischen Masseinheiten fest-

gelegt sind, die Einheit der e abhängig von derjenigen der ε und umgekehrt. Eine dieser Einheiten aber bleibt nach dem bisher dargelegten vollkommen willkürlich; sie bleibt es auch gegenüber allen sonstigen Erfahrungsthatsachen.

Es ist aber wichtig, die willkürliche Verfügung so zu treffen, dass diese Einheit — und damit, wie sich zeigen wird, die Einheit jeder elektrischen Grösse — jederzeit reproducirt werden kann. Denn nur unter dieser Bedingung werden Beobachtungen, die zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten gemacht sind, mit einander quantitativ vergleichbar. Die genannte Bedingung erfüllen diejenigen Masssysteme, welche man als „absolute" bezeichnet. (Gauss und Weber.) Ein jedes derselben benützt als Grundlage das absolute Masssystem der Mechanik, welches wir als bekannt voraussetzen. Das sog. „absolute elektrische (auch wohl „elektrostatische") Masssystem" geht aus diesem hervor, wenn wir noch festsetzen, dass in Gleichung (1) für das Vacuum $4\pi\varepsilon = 1$ sein soll. (Sehr nahe gleichbedeutend hiermit ist es, wenn man für atmosphärische Luft $4\pi\,\varepsilon = 1$ setzt.) Dann wird das ε jedes Dielektricums eine reine Zahl. Dann wird ferner das Product zweier Elektricitätsmengen nach (1) gemessen durch die gleiche Zahl, welche auch das Product einer reinen Zahl ($4\pi\,\varepsilon$), einer Kraft (f), und zweier Längen ($r.r$) misst. Oder in der üblichen Bezeichnungsweise: es ist die „Dimension" einer Elektricitätsmenge

$$[e] = [\sqrt{r^2 f}] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1},$$

wenn M das Symbol der Masseneinheit, L der Längeneinheit, T der Zeiteinheit ist.

Hier ist benutzt, dass im absoluten Masssystem der Mechanik eine Kraft dem Product aus einer Masse und ihrer Beschleunigung nicht nur proportional, sondern numerisch gleich gesetzt wird. So wenig hierdurch etwas über den Begriff einer Kraft ausgesagt ist, so wenig erfahren wir aus der obigen Dimensionsgleichung, welcher Art physikalischer Grössen eine Elektricitätsmenge angehört. Gesetzt, es werde einmal experimentell festgestellt, eine Elektricitätsmenge e gehöre einer bestimmten Classe mechanischer Grössen a an, — dass dem so sei, ist denkbar, aber keineswegs noth-

wendig, — dann würde ein rationelles elektrisches Masssystem aufgeführt werden können und müssen, in welchem e und a in der gleichen Einheit ausgedrückt würden, und in welchem für unsere willkürliche Festsetzung: „$4\pi\varepsilon = 1$ für Vacuum" kein Platz mehr wäre. Es würde dann aber die einmalige Festlegung eines Reductionsfactors genügen, um alle in „absolutem elektrischem Mass" ausgedrückten Messungsresultate in „rationelles Mass" überzuführen.

Wir werden das „absolute elektrische Masssystem" nicht in unsere Darstellung einführen, vielmehr alle Gleichungen in solcher Form schreiben, dass ihre Gültigkeit von der Wahl des Masssystems unabhängig ist. Wenn wir dann numerische Angaben benützen wollen, welche in absolutem elektrischem Mass gemacht sind, so genügt es, in unseren Formeln $\varepsilon = \frac{D}{4\pi}$ zu schreiben, wo $D = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ das Verhältniss der Dielektricitätsconstante des fraglichen Isolators (ε) zu jener des Vacuums (ε_0) bedeutet. Dieses D, welches in der Regel das directe Object der Messung bildet, wird häufig ebenfalls als „Dielektricitätsconstante des Isolators" bezeichnet.

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung (1) waren die folgenden: 1) die materiellen Träger der Elektricitätsmengen e_1 und e_2 sollen zwei Leiter, — 2) die Dimensionen dieser Leiter sollen sehr klein gegen ihren Abstand r, — 3) der Isolator, welcher sie umgiebt, soll homogen (und isotrop) sein.

Bezüglich 1) nimmt man an, dass die Gleichung auch gilt, wenn die Elektricitätsmengen an Theilen des Isolators selbst haften. Ob solche Elektricitätsvertheilungen im Innern homogener Isolatoren thatsächlich vorkommen, ist zweifelhaft; wir wollen aber, der Allgemeinheit wegen und dem Herkommen folgend, auch diesen Fall in unsere Betrachtungen einschliessen. — Die Bedingung 2) ist für jede endliche Entfernung erfüllt, wenn wir unter e_1 und e_2 die Elektricitätsmengen zweier unendlich kleiner Körperelemente verstehen. Wir erhalten aus den so sich ergebenden Elementarkräften die Kräfte zwischen endlich ausgedehnten Körpern allgemein durch die Annahme, dass wir die ersteren nach den Regeln der

Statik zusammensetzen dürfen. — Die Bedingung 3) ist wesentlich für die Gültigkeit des Coulomb'schen Gesetzes; wir halten sie zunächst fest.

§ 2. Elektrische Feldintensität, Potential. Mechanische Arbeit, Energie.

Jede Elementarkraft, welche an einem Volumelement mit der Elektricitätsmenge e angreift, enthält nach (1) den Factor e; also auch die Gesammtkraft

$$f = e \cdot E.$$

E ist numerisch gleich der Kraft, welche auf das Volumelement wirken würde, wenn sich dort die Elektricitätsmenge Eins befände. Wir vereinfachen die mathematische Behandlung, indem wir diese Grösse E untersuchen; wir nennen sie die „elektrische Feldintensität" in dem betrachteten Punkt $p(x, y, z)$. Ihre Componenten nach den Coordinatenaxen seien E_x, E_y, E_z; die Componente nach der willkürlichen Richtung l heisse E_l.

In entsprechender Weise sollen durchweg die Componenten von Richtungsgrössen, — „Vectoren" — bezeichnet werden. Es ist demnach, wenn A einen beliebigen Vector bezeichnet,

$$A_l = A \cdot \cos(Al) \text{ und}$$
$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

Jeder Raum, in welchem eine elektrische Feldintensität vorhanden ist, heisst ein „elektrisches Feld."

Auf den betrachteten Punkt $p(x, y, z)$ mögen wirken die Elektricitätsmengen e_i in den Punkten $p_i(x_i, y_i, z_i)$ mit den Abständen $r_i = \overline{p_i p}$. Dann liefert e_i zu E den Beitrag

$$E_i = \frac{e_i}{4\pi\varepsilon . r_i^2} \text{ mit den Componenten}$$

$$E_{ix} = \frac{e_i}{4\pi\varepsilon} \frac{x - x_i}{r_i^3} \text{ u. s. w.,}$$

$$\text{wo } r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2.$$

Folglich ist E die Resultante von

$$E_x = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon} \frac{x - x_i}{r_i^3} \text{ u. s. w.} \tag{2}$$

Diese Ausdrücke lassen sich in eine andere Form bringen: man setze

$$\varphi = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon . r_i}, \tag{3}$$

dann wird

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon r_i^2} \frac{\partial r_i}{\partial x} = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon} \frac{x - x_i}{r_i^3} = E_x.$$

Also

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \; E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \; E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{4}$$

und ebenso, da die Coordinatenrichtungen willkürlich sind, auch

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}, \tag{4'}$$

wo $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ die sogenannte „Richtungsderivirte" von φ nach der Richtung von l bedeutet.

φ heisst das „elektrische Potential" im Punkte p. — Aus (4') folgt: Schreiten wir von p aus in einer Richtung l fort, in welcher sich φ nicht ändert, so ist für diese Richtung $E_l = 0$; d. h. die Feldintensität ist überall normal zu den Flächen constanten Potentials gerichtet.

Denken wir uns ferner einen kleinen Körper mit der Elektricitätsmenge 1 aus p um die Strecke dl verschoben, während die übrigen Elektricitätsmengen ruhen; dann leisten die elektrischen Kräfte eine Arbeit

$$\partial A = E_l . dl = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = -d\varphi.$$

Die Verschiebung werde fortgesetzt bis zum Punkte p', dann ist die Arbeit

$$A = -\int d\varphi = \varphi(p) - \varphi(p').$$

φ ist nach dem Ausdruck in (3) eine einwerthige Function der Coordinaten von p, also ist A eindeutig bestimmt durch Anfangs- und Endlage des bewegten Theilchens, und unabhängig vom Wege der Ueberführung. — Es sei speciell p' ein Punkt, in welchem das Potential unserer Elektricitätsvertheilung, gemäss (3) berechnet, Null ist, so wird

$$A = \varphi(p).$$

Ein solcher Punkt p' ist z. B. jeder Punkt in unendlicher Entfernung von den e_i, — von denen wir stets voraussetzen werden, dass sie in einem endlichen Raum enthalten sind, — und man kann folglich definiren:

Das Potential φ im Punkte p ist numerisch gleich der mechanischen Arbeit, die von den elektrischen Kräften geleistet wird, wenn die Elektricitätsmenge 1 mit ihrem Träger aus dem Punkte p auf beliebigem Wege in unendliche Entfernung von dem elektrischen System übergeführt wird.

Wir wollen jetzt die Arbeit berechnen, welche bei einer beliebigen unendlich kleinen Verschiebung des ganzen Systems gewonnen wird. Die Kraft zwischen den Elektricitätsmengen e_i und e_k hat nach (1) die Grösse: $\frac{e_i e_k}{4\pi\varepsilon . r_{ik}^2}$ und die Richtung der wachsenden r_{ik}. Also ist die Arbeit bei einer unendlich kleinen relativen Verschiebung:

$$\frac{e_i e_k}{4\pi\varepsilon\, r_{ik}^2}\, dr_{ik},$$

und die gesammte Arbeit bei unendlich kleinen Verschiebungen aller materiellen Punkte:

$$\partial A = \sum_{ik} \frac{e_i e_k}{4\pi\varepsilon . r_{ik}^2}\, dr_{ik} = -\, d\sum_{ik} \frac{e_i e_k}{4\pi\varepsilon\, r_{ik}},$$

wo Σ eine Summirung über alle Combinationen von i und k bedeutet, für welche $i \neq k$.

Dafür kann man schreiben

$$\partial A = -\, d\sum_k \tfrac{1}{2} e_k . \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon . r_{ik}} = -\, d\sum_k \tfrac{1}{2} e_k \varphi_k,$$

wo nach k über alle Punkte, und nach i über alle Punkte ausser p_k zu summiren ist, und wo φ_k das Potential aller Massen ausser e_k im Punkte p_k bedeutet. Also

$$\partial A = -\, dW_e, \text{ wo} \tag{5}$$
$$W_e = \sum_k \tfrac{1}{2} e_k \varphi_k . \tag{6}$$

Es ist die Arbeit gleich der Abnahme einer Function W_e, welche durch die gegenwärtige Elektricitätsvertheilung vollständig bestimmt ist. Ist der Werth dieser Function für

eine gewisse Anfangslage aller elektrisirten Theilchen W_e und für eine gewisse Endlage W_e', so wird demnach die Arbeit

$$A = W_e - W_e'$$

jedesmal gewonnen, wenn das System auf beliebigen Wegen aus der Anfangslage in die Endlage übergeführt wird.

Arbeit ist eine Form der Energie. Man kann fragen: wird bei Aenderung eines elektrischen Feldes Energie noch in anderen Formen, — wie z. B. Wärme, — abgegeben? Die Erfahrung antwortet: im allgemeinen ja! Wir werden diese Energie-Umsätze in späteren Abschnitten zu besprechen haben; denn sie treten ausschliesslich auf, wenn das Feld nicht statisch ist. Wenn aber der Zustand, wie wir gegenwärtig voraussetzen, ein Zustand elektrischen Gleichgewichts ist, — genauer: einem solchen auch bei der Verschiebung stets unendlich nahe bleibt,*) — so erhalten wir aus dem System Energie nur in einer Form: als mechanische Arbeit, und den Betrag dieser Arbeit haben wir soeben berechnet zu $A = W_e - W_e'$. Aus dem Princip der Erhaltung der Energie folgt dann, dass $W_e - W_e'$ der Betrag ist, um welchen die Energie des elektrischen Systems im Endzustand geringer ist, als im Anfangszustand. Der wesentliche Inhalt dieses Satzes liegt darin, dass die Energie eines Systems eine Grösse ist, welche durch dessen gegenwärtigen Zustand eindeutig bestimmt ist, — dass also $W_e - W_e'$ stets der Gesammtbetrag der abgegebenen Energie ist, bei gegebenem Anfangs- und Endzustand, aber bei beliebigen Zwischenzuständen, die keine Gleichgewichtszustände zu sein brauchen. Von der Art der Zwischenzustände hängt lediglich ab, in welcher Weise sich dieser Gesammtbetrag auf die verschiedenen Energieformen: Arbeit, Wärme u. s. w. vertheilt.

Sind in der Endlage alle e_i unendlich weit von einander entfernt, so ist jedes $\varphi_k = 0$, und somit auch $W_e' = 0$; es ist also W_e diejenige Energie, welche gewonnen wird, wenn das System in unendliche Zerstreuung übergeht. Wir werden einen andern Ausdruck für die Function W_e finden [Gleichung (B) S. 29], aus welchem hervorgeht, dass sie nie

*) Siehe am Schluss von § 8.

negativ werden kann. W_e ist also zugleich die maximale Energie, welche aus dem System gewonnen werden kann. Man bezeichnet daher W_e als die „elektrische Energie“ des Systems.

Wir benutzen diese Bemerkungen, um zu einer neuen Definition von φ und E zu gelangen:

Aus der Form

$$W_e = \sum_{ik} \frac{e_i e_k}{4\pi\varepsilon . r_{ik}}$$

folgt: wenn nur der Ort von e_k sich ändert, so ist

$$dW_e = e_k . d\sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon\, r_{ik}} = e_k d\varphi_k .$$

Sind also zwei elektrische Zustände gegeben, bei welchen die Vertheilung der Materie die gleiche ist, welche sich aber dadurch unterscheiden, dass die Elektricitätsmenge e das erste Mal an einer Stelle vom Potential φ, das zweite Mal an einer Stelle vom Potential φ' sich befindet, so besitzt der erste Zustand gegenüber dem zweiten einen Energieüberschuss

$$-\delta W_e = e(\varphi - \varphi'). \tag{7}$$

Ist ein Uebergang aus dem ersten in den zweiten Zustand möglich, so giebt dieser Ausdruck die dabei abgegebene Energie an. Da in unendlicher Entfernung $\varphi' = 0$ ist, können wir also definiren:

Das Potential φ im Punkte p misst die Energie, welche aus dem System gewonnen wird, wenn die Elektricitätsmenge Eins (ohne ihren Träger) aus p in unendliche Entfernung rückt.

Ferner: sei E die Feldintensität am Ort von e, und dl die Verschiebung von e (bei ruhender Materie), dann ist

$$-dW_e = -e\frac{\partial\varphi}{\partial l}dl = e . E_l dl,$$

also die abgegebene Energie bei Verschiebung der Elektricitätsmenge Eins um dl (ohne ihren Träger): $E_l dl$. Das rechtfertigt die übliche Bezeichnung von E als „auf die Elektricitätsmenge Eins wirkende Kraft“.

Es ist also in dem bisher von uns behandelten Gebiet, in welchem das Coulomb'sche Gesetz gilt, für den

Betrag der Energieabgabe gleichgültig, ob wir uns die Elektricitätsmengen mit ihren materiellen Trägern oder ohne dieselben verschoben denken. Allgemein ist das nicht der Fall: wir werden finden, dass die Sätze, welche die Energieabgabe durch die Verschiebung der Elektricität ausdrücken, allgemein gelten, — die Sätze hingegen, welche die mechanische Arbeit durch die Verschiebung der materiellen Träger der Elektricität ausdrücken, nicht allgemein gelten. E ist allgemein die auf die Elektricitätsmenge Eins wirkende Kraft im Sinne der obigen Gleichung, — aber nicht allgemein die auf den Träger der Elektricitätsmenge Eins wirkende mechanische Kraft. (§ 7 bez. § 11.)

§ 3. Raum- und Flächenpotential. Gleichgewichtsbedingung.

In Gleichung (2) mussten wir bei der Bildung von E_x, in (3) bei der Bildung von φ die in dem betrachteten Punkte p selbst befindliche Elektricitätsmenge von den e_i ausschliessen; wir würden sonst nicht nur falsche, sondern sogar unendlich grosse Werthe der gesuchten Functionen erhalten haben. Dies rührt aber nur daher, dass wir bis jetzt zur Vereinfachung der Darstellung uns endliche Elektricitätsmengen in Punkten concentrirt dachten. Eine solche Elektricitätsvertheilung kommt thatsächlich nicht vor. Wäre Elektricität Materie, so könnten endliche Elektricitätsmengen nur in endlichen Räumen vorhanden sein; wir werden zu der Annahme genöthigt werden, dass endliche Elektricitätsmengen ausserdem auch auf endlichen Flächen vorkommen.

Wir haben zu untersuchen, wie sich Potential und Feldintensität in diesen beiden Fällen verhalten.

Erfülle erstens die Elektricität continuirlich einen Raum τ; im Element $d\tau$ befinde sich die Menge $de = \varrho d\tau$, wo ϱ eine endliche Grösse. ϱ heisst die „Raumdichte" der Elektricität am Ort von $d\tau$. Es wird dann das Potential

$$\varphi = \int \frac{\varrho d\tau}{4\pi\varepsilon . r} \qquad (3')$$

und eine Componente der Feldintensität

$$E_x = \int \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon} \frac{x - x'}{r^3} d\tau, \tag{2'}$$

wenn $p'(x', y', z')$ der Ort von $d\tau$ ist, φ und E_x die Werthe dieser Functionen im Punkte $p(x, y, z)$ bezeichnen, und $r = pp'$. Die Integration muss ausgedehnt werden über den ganzen Raum τ, in welchem $\varrho \neq 0$ ist; sie darf aber, ohne Aenderung des Resultats, auf beliebige weitere Räume, insbesondere auch auf den unendlichen Raum ausgedehnt werden.

Wir behaupten: φ und E_x sind endliche und stetige Functionen von x, y, z auch dann, wenn der Punkt p im Raum τ liegt und die Integranden folglich unendlich werden. Zum Beweis zerlegen wir τ in zwei Theile: τ', eine Kugel vom Radius R mit p als Mittelpunkt, — und τ'', den Rest von τ. Dann zerfallen φ und E_x je in zwei Theile:

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' \ , \ E_x = E_x' + E_x'',$$

von welchen φ'' und E_x'' Integrale mit durchweg endlichen und stetigen Integranden, und folglich stets endliche und stetige Functionen von x, y, z sind.

Den Raum τ' zerlegen wir in Elemente durch concentrische Kugelflächen vom variablen Radius r und unendlich spitze Kegel vom Oeffnungswinkel do, welche alle ihre Spitze in p haben. Dann wird

$$d\tau' = r^2 dr\, do$$

und folglich

$$\varphi' = \int \frac{do}{4\pi\varepsilon} \int_0^R \varrho\, r\, dr \ , \ E_x' = \int \frac{do}{4\pi\varepsilon} \int_0^R \varrho \frac{x - x'}{r} dr,$$

wo die Integration nach o über die Fläche der Einheitskugel zu erstrecken ist. ϱ ist endlich, $\frac{x-x'}{r}$ ein echter Bruch. Lassen wir also R ohne Ende abnehmen, so nähern sich φ' und E_x' der Grenze Null.

Es liefern also zu φ wie zu E_x die unendlich benachbarten Raumtheile nur verschwindende Beiträge; beide Grössen bleiben nicht nur endlich, sondern ändern sich auch stetig, wenn der Punkt p sich innerhalb des mit Elektricität erfüllten Raumes bewegt.

Daraus folgt erstens: wenn wir zur Berechnung der Energie und der Kräfte die Functionen φ und E_x bilden, so brauchen wir bei der Summation keine Elektricitätsmenge auszuschliessen; die beiden Funktionen sind stets unzweideutig durch die Ausdrücke (3') und (2') definirt. Ferner folgt aus (2'):

$$E_x = -\int \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau = -\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho}{4\pi\varepsilon . r}\right) d\tau,$$

und aus (3'):

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon . r} d\tau.$$

Die rechten Seiten beider Gleichungen sind einander gleich, sobald beide Rechnungsoperationen zu bestimmten endlichen Werthen führen, d. h. sofern E_x endlich und φ stetig ist. Also gilt zweitens nach dem obigen ganz allgemein, auch innerhalb τ, unsere frühere Gleichung (4'):

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

Da auch die Componenten von E durchweg stetig sind, so folgt drittens noch, dass ihre ersten Differentialquotienten überall endliche Werthe haben. Hiervon werden wir später Gebrauch machen.

Erfülle zweitens die Elektricität continuirlich eine Fläche S, für welche wir überall endliche Krümmung voraussetzen wollen. Auf dem Flächenelement dS befinde sich die Elektricitätsmenge $\sigma\, dS$, wo σ eine endliche Grösse sei. σ heisst die „Flächendichte der Elektricität." Auch dann tragen zum Werthe von φ die unendlich benachbarten Theile nur verschwindend wenig bei; und φ bleibt daher endlich und stetig, auch wenn p durch die Fläche S oder in der Fläche S sich bewegt.

Beweis: Wir haben im jetzigen Fall

$$\varphi = \int \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon . r}. \qquad (3'')$$

Nun befinde sich der Punkt p in dem unendlich kleinen Abstand δ von der Fläche. Wir fällen dann von p die Normale auf die Fläche, und grenzen um deren Fusspunkt ein kleines

Flächenstück S', das wir als eben betrachten dürfen, durch eine Kreislinie vom Radius Q ab. Der Rest der Fläche S heisse S''. Von S' möge herrühren φ'; von S'' dagegen φ'', so dass

$$\varphi = \varphi' + \varphi'';$$

dann bleibt φ'' endlich und ändert sich stetig, auch wenn p sich auf oder durch S' bewegt. S' zerlegen wir in unendlich dünne Kreisringe vom variablen Radius q und diese durch Sectoren vom unendlich kleinen Oeffnungswinkel $d\vartheta$. Dann wird

$$q^2 + \delta^2 = r^2 \text{ und } dS' = d\vartheta . q . dq = d\vartheta . r dr;$$

$$\text{folglich } \varphi' = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\delta}^{\sqrt{Q^2+\delta^2}} \frac{\sigma dr}{4\pi\varepsilon}.$$

Wenn Q unbegrenzt abnimmt, so convergirt φ' gegen Null, — womit unsere Behauptung bewiesen ist. Das φ der Gleichung (3″) ist also, wie das der Gleichung (3′), stets eine bestimmte endliche Grösse mit derjenigen Bedeutung, welche wir dem Potential ursprünglich beigelegt haben.

Da φ durchweg stetig ist, so haben auch seine Richtungsderivirten durchweg endliche Werthe. Aus der Stetigkeit von φ folgt ferner, dass auch $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ sich stetig ändert beim Durchschreiten der Fläche S, wenn s eine beliebige zu S tangentiale Richtung bedeutet. Es ist nämlich, wenn die Indices 1 und 2 sich auf zwei Punkte beziehen, die zu beiden Seiten der Fläche und einander unendlich nahe auf derselben Flächennormale liegen, wegen der Stetigkeit von φ:

$$\varphi_1(s) = \varphi_2(s)$$

und $\varphi_1(s + ds) = \varphi_2(s + ds)$; weiter aber ist:

$$\varphi_1(s + ds) = \varphi_1(s) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} ds$$

und $\varphi_2(s + ds) = \varphi_2(s) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} ds$. Daraus

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \text{ wie zu beweisen war.}$$

Eine solche Gleichung besteht aber **nicht** für die Derivirte nach der **Normalen** von S. (S. unten S. 24 f.).

Wir verzichten auf den Nachweis, ob — bezw. wie weit — die gemäss (2) definirten Componenten der Feldintensität, welche jetzt lauten würden

$$E_x = \int \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \frac{x-x'}{r^3} dS \text{ u. s. w.,}$$

auch in der Fläche S den Gleichungen (4):

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

genügen.*) Wir definiren vielmehr von jetzt an die Componenten von E durch eben diese Gleichungen. Dann ist also auch an S die tangentiale Componente E_s stetig. Vorbehalten aber bleibt es, zu untersuchen, wie man aus dem so definirten E die mechanische Kraft auf den Träger der Elektricitätsmenge σdS findet. (s. § 11.)

Im vorstehenden betrachteten wir die Elektricitäts-Vertheilung als gegeben. Sie kann aber im allgemeinen nicht willkürlich gegeben werden, wenn elektrisches Gleichgewicht bestehen soll. Wir lernten bereits Fälle kennen (Berührung von Leitern), wo in Leitern eine Störung des Gleichgewichts, eine „elektrische Strömung", stattfindet. Diese führte zu einem neuen Gleichgewichtszustand, dem eine neue Elektricitätsvertheilung entsprach. Gleichgewicht und Elektricitätsvertheilung müssen also, sofern Leiter in Frage kommen, durch eine Bedingung verknüpft sein. Wir formuliren, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, diese Bedingung jetzt dahin: elektrisches Gleichgewicht besteht nur, wenn in jedem Leiter die Feldintensität $E = 0$ ist. Jede Verletzung dieser Bedingung hat elektrische Strömung zur Folge.**) Wir definiren durch diese Eigenschaft einen Leiter. Gleichbedeutend mit der ausgesprochenen Bedingung ist, dass in der ganzen Ausdehnung eines zusammenhängenden, von leitender Materie erfüllten Raumes $\varphi =$ constans sei. Diesen constanten Werth nennt man „das Potential des Leiters." Hiernach sind also in einem elektrostatischen Feld nur solche Elektricitätsvertheilungen möglich, welche dem gemäss (3) zu berechnenden φ für alle Punkte eines Leiters denselben Werth ertheilen.

*) Vgl. Gauss, Allgemeine Lehrsätze . . . § 13 ff.

**) Eine erweiterte Fassung dieses Satzes in Kap. II.

§ 4. Umkehrung der Aufgabe. — Eigenschaften des elektrostatischen Feldes.

Die elektrische Feldintensität wurde gemäss der historischen Entwicklung von uns eingeführt als eine Grösse, durch welche die mechanischen Kräfte zwischen elektrisirten Körpern sich darstellen lassen. Diesem Sachverhalt entsprechen unsere bisherigen Gleichungen, in welchen die Elektricitätsvertheilung als das ursprünglich gegebene, dagegen E, φ und W_e als daraus abgeleitete Grössen erscheinen. Es wird aber im Verlauf unserer Untersuchung mehr und mehr hervortreten, dass wir zur Darstellung aller elektrischen Erscheinungen des Begriffs der Feldintensität bedürfen, während der Begriff der Elektricitätsmenge nur auf einem begrenzten Gebiet von Nutzen ist. Und selbst auf diesem Gebiet ist eine Darstellung einfacher und fruchtbarer, welche als Fundamentalgrösse die Feldintensität einführt.

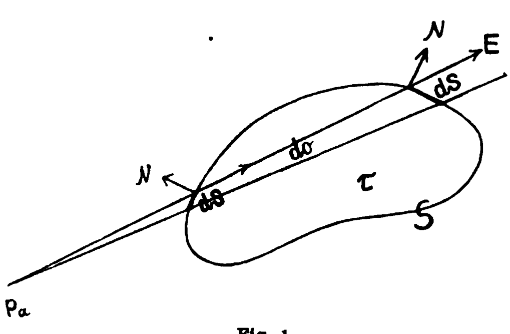


Fig. 1.

Wir wollen also jetzt annehmen, es sei diese gegeben, und versuchen, daraus die Elektricitätsmengen und die Energie abzuleiten.

Dazu dient uns folgende Betrachtung (Gauss'scher Satz): Es sei gegeben eine Elektricitätsmenge e_a im Punkte p_a. Wir denken uns (vgl. Fig. 1.) eine geschlossene Fläche S, die den Punkt p_a nicht einschliesst, im übrigen aber beliebig sein kann. Die nach aussen errichtete Normale von dS heisse N, der von S eingeschlossene Raum τ. Wir bilden das Integral

$$\mathfrak{Z} = \int_S \varepsilon \cdot E_N \cdot dS.$$

In einem Punkte von S, welcher von p_a den Abstand r hat, ist

$$E = \frac{e_a}{4\pi\varepsilon . r^2}$$

und hat die Richtung der wachsenden r; also ist

$$E_N = \frac{e_a}{4\pi\varepsilon . r^2} \cdot \cos(Nr).$$

Bezeichnet do den körperlichen Winkel, unter dem dS von p_a aus erscheint, so ist

$$dS . \cos(Nr) = \pm r^2 . do, \text{ also}$$

$$\varepsilon E_N dS = \pm \frac{e_a}{4\pi} do,$$

wobei das Plus- oder Minuszeichen gilt, je nachdem der Winkel (Nr) spitz oder stumpf ist. Nun tritt jeder Leitstrahl r, der von p_a aus in das Innere von τ eindringt, nothwendig an einer anderen Stelle wieder heraus, — und allgemein: wenn er k-mal eintritt, so tritt er auch k-mal aus. Derselbe Elementarkegel mit dem Oeffnungswinkel do, der aus S ein Element dS beim Eintritt herausschneidet, grenzt also ein zweites Element beim Austritt ab. Da, wo er eintritt, ist (Nr) stumpf; wo er austritt, ist (Nr) spitz. Fasst man die beiden Elemente dS, die zum gleichen do gehören, zusammen, so heben sich also ihre Beiträge zu $\mathfrak{Z}$ gegenseitig auf. Es folgt:

$\mathfrak{Z} = 0$, wenn p_a ausserhalb S, sonst aber willkürlich liegt.

Sind beliebig viele Elektricitätsmengen e_{1a}, $e_{2a} \ldots$ ausserhalb S vorhanden, so wird E_N gleich der Summe der E_{1N}, $E_{2N} \ldots$, die von den einzelnen e_a herrühren, und folglich $\mathfrak{Z}$ gleich einer Summe von Termen, deren jeder Null ist. Folglich

$\mathfrak{Z} = 0$, wenn das Feld von beliebigen Elektricitätsmengen ausserhalb S herrührt.

Wir berechnen jetzt das gleiche Integral $\mathfrak{Z}$ für den Fall, dass das Feld von einer Elektricitätsmenge e_i herrührt, welche sich in p_i innerhalb S befindet. Zu dem Zweck beschreiben wir um p_i eine Kugel mit dem willkürlichen Radius R, der nur so gewählt werden soll, dass die Kugel ganz innerhalb S liegt (vgl. Fig. 2.) Die Oberfläche der Kugel heisse K. Dann

begrenzen S und K zusammen einen Raum τ', für welchen p_i ein äusserer Punkt ist; also ist nach dem vorigen Satz

$$\int_S \varepsilon E_N dS + \int_K \varepsilon E_n dK = 0,$$

wo die Normalen N und n die in der Fig. 2 angegebenen Richtungen haben müssen.

Nun ist

$$E_n = -\frac{e_i}{4\pi\varepsilon . R^2}, \text{ folglich}$$

$$\int_K \varepsilon E_n dK = -\frac{e_i}{4\pi R^2}\int_K dK = -e_i; \text{ also}$$

$$\mathfrak{Z} = \int_S \varepsilon E_N dS = +e_i.$$

Haben wir innerhalb und ausserhalb S beliebig viele Elektricitätsmengen $e_{1i}, e_{2i} \ldots$ und e_{1a}, $e_{2a} \ldots$, so zerfällt E_N und folglich $\mathfrak{Z}$ in eine Reihe von Summanden. Jedes e_i liefert zu $\mathfrak{Z}$ einen Beitrag e_i, jedes e_a einen Beitrag Null. Also ist ganz allgemein für eine geschlossene Fläche S:

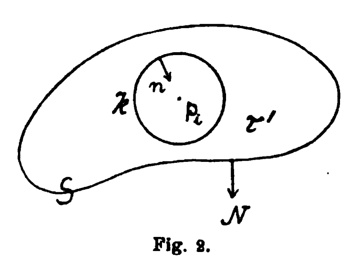


Fig. 2.

$$\int_S \varepsilon E_N dS = \Sigma e_i, \tag{A}$$

wo Σe_i die algebraische Summe aller eingeschlossenen Elektricitätsmengen bezeichnet. — Wir konnten in unserer Ableitung die Kugel K beliebig eng um p_i zusammenziehen, ohne am Resultat etwas zu ändern; es tritt so anschaulich hervor, wie in (A) jeder Beitrag e_i zum Integral demjenigen Volumelement innerhalb S entstammt, in welchem sich e_i befindet.

Wir wollen die Gleichung (A) auf zwei specielle Fälle anwenden:

Sei erstens S die Oberfläche des Volumelements

$$d\tau = dx \cdot dy \cdot dz,$$

in welchem sich Elektricität von der Dichte ρ, d. h. die Elektricitätsmenge

$$de = \rho\, d\tau$$

befinde. Dann zerfällt S in 6 Rechtecke. Für die Beiträge, welche die beiden zu x senkrechten Flächen zu unserm Integral liefern, ist

$$dS = dy\, dz,$$

und ferner für die Fläche mit der kleineren Coordinate x:

$$\varepsilon E_N = -\varepsilon E_x$$

für die Fläche mit der grösseren Coordinate $x + dx$:

$$\varepsilon E_N = +\left(\varepsilon E_x + \frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} dx\right).$$

(Denn E_x ist durchweg stetig nach S. 17.) Also liefern beide Flächen zusammen den Beitrag:

$$+\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} dx \cdot dy\, dz.$$

Ebenso liefern die beiden übrigen Flächenpaare:

$$\frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} dy \cdot dz dx \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z} dz \cdot dx dy.$$

Die Gleichung (A) giebt also, nach Division durch $d\tau$:

$$\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z} = \rho. \tag{8}$$

Benutzen wir, dass ε constant im Raum ist, so folgt:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \rho. \tag{8a}$$

Es sei zweitens Elektricität von der Flächendichte σ auf einer Fläche S verbreitet, also

$$de = \sigma \cdot dS$$

auf dem Flächenelement dS vorhanden. Wir grenzen dann einen Raum τ ab (vgl. Fig. 3 a. f. S.) durch eine Cylinderfläche, gebildet von den Normalen am Rande von dS, und durch zwei Parallelflächen zu dS, nämlich dS_1 und dS_2 zu beiden Seiten von dS. Die beiden Normalen von dS seien mit N_1 und N_2 bezeichnet, und durch entsprechende Indices seien allgemein die Grössen

unterschieden, die sich auf die beiden Seiten von dS beziehen. Es sei der Cylinder so niedrig, dass die Mantelfläche gegen die Grundfläche verschwindend klein sei. Dann verschwindet bei der Ausführung von (A) das Integral über die Mantelfläche, und man erhält:

$$\varepsilon_1 E_{N_1} dS_1 + \varepsilon_2 E_{N_2} dS_2 = \sigma \cdot dS,$$

(denn $E_N = -\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ hat bestimmte endliche Werthe auch in unendlicher Nähe der Fläche S nach S. 18); oder, da die drei Flächen gleich gross sind:

$$\varepsilon_1 E_{N_1} + \varepsilon_2 E_{N_2} = \sigma. \tag{9}$$

Benutzt man, dass $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, so lautet diese Gleichung:

$$\varepsilon(E_{N_1} + E_{N_2}) = \sigma. \tag{9a}$$

Die Gleichungen (8a) und (9a) lehren die Elektricitäts-

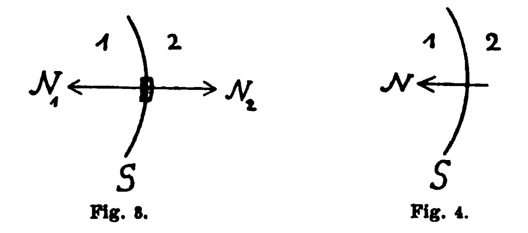


Fig. 3. Fig. 4.

vertheilung kennen, sobald das elektrische Feld gegeben ist; sie enthalten die Auflösung der Gleichungen (3) und (4) nach den e. —

Die Gleichung (9) wollen wir noch in etwas veränderter Form schreiben: Errichtet man (s. Fig. 4) auf dS nur die eine Normale, etwa nach der Seite von dS_1, bezeichnet diese mit N, und fügt die Indices 1 und 2 der Grösse E an, je nachdem es sich um Werthe auf der einen oder andern Seite von S handelt, so lautet die Gleichung:

$$\varepsilon_1 E_{1N} - \varepsilon_2 E_{2N} = \sigma, \tag{9}$$

sie sagt also aus: an Flächen, wo sich Elektricität von endlicher Flächendichte befindet, und nur dort, ist die zur Fläche

normale Componente von E, — und nach dem früheren nur diese Componente — unstetig.

Aus (8) ergiebt sich eine wichtige Folgerung: betrachten wir einen Punkt im Innern einer leitenden Masse, d. h. in endlicher (wenn auch noch so kleiner) Entfernung von deren Oberfläche; dann ist in diesem Punkt und in seiner unendlichen Nähe E gleich Null. Es ist für diesen Punkt also die linke Seite von (8) gleich Null, und folglich $\varrho = 0$.

Das heisst: im Innern einer leitenden Masse kann sich im Fall des Gleichgewichts keine Elektricität befinden. Wenn uns also ein elektrisirter Leiter gegeben ist, so müssen wir annehmen, dass sich die Elektricität in einer unendlich dünnen Schicht an seiner Oberfläche befindet. —

Bedeute ferner in der Ableitung der Gleichung (9) S die Oberfläche eines Leiters, N die äussere, N' die in den Leiter hinein errichtete Normale, dann ist $E_{N'} = 0$, und die Gleichung (9) verwandelt sich in diesem Fall in die einfachere:

$$\varepsilon E_N = \sigma. \tag{9'}$$

Daraus ergiebt sich die gesammte Elektricitätsmenge des Leiters

$$e = \int \sigma \cdot dS = \int \varepsilon E_N dS. \tag{10}$$

Es soll nun auch die Energie W_e durch die Werthe der Feldintensität ausgedrückt werden. Es sei Elektricität vorhanden mit endlicher Flächendichte σ auf gewissen Flächen S_{ik}; im übrigen mit endlicher räumlicher Dichte ϱ im Raume τ. Der Ausdruck (6) nimmt dann die Form an:

$$W_e = \tfrac{1}{2}\int \varphi \cdot \varrho d\tau + \tfrac{1}{2}\Sigma \int \varphi \cdot \sigma \, dS_{ik}$$

oder nach (8) und (9):

$$W_e = \tfrac{1}{2}\int \varphi \left(\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right) d\tau$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma \int \varphi \, (\varepsilon_i E_{N_i} + \varepsilon_k E_{N_k}) dS_{ik}.$$

Die Integrale müssen erstreckt werden über alle Flächen, an denen $\sigma \neq 0$, bezw. durch alle Räume, in welchem $\varrho \neq 0$ ist.

Sie dürfen offenbar ausserdem über beliebige andere Flächen und Räume erstreckt werden. Mit dem Raumintegral haben wir eine Umformung vorzunehmen. Diese liefert uns ein Satz von grosser Fruchtbarkeit, den wir jetzt ableiten wollen:

Es ist identisch

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\cdot A_x = -\frac{\partial}{\partial x}(U\cdot A_x) + U\cdot\frac{\partial A_x}{\partial x}.$$

Wir multipliciren mit $d\tau = dx\cdot dy\cdot dz$ und integriren über alle Elemente eines Raumes τ. Dann ist, wenn $U\cdot A_x$ im Integrationsgebiet eine einwerthige und stetige Function von x ist,

$$-\int_\tau \frac{\partial U}{\partial x}\cdot A_x\,d\tau = -\int_y\int_z [U\cdot A_x\,dy\,dz]_{x_a} + \int_y\int_z [U\cdot A_x\,dy\,dz]_{x_e}$$
$$+\int_\tau U\cdot\frac{\partial A_x}{\partial x}\,d\tau.$$

Hier soll x_a den grössten, x_e den kleinsten Werth bezeichnen, den x für ein gegebenes Werthepaar y, z innerhalb τ erreicht (vgl. Fig. 5). Das heisst, wenn wir für dieses y, z die Parallele zur x-Axe ziehen, so ist $x = x_e$, wo diese Gerade in τ eintritt; $x = x_a$, wo sie austritt. (Die Gerade kann nochmals in τ eintreten; sie muss dann aber auch nochmals austreten, und es giebt ein neues Werthepaar x_e, x_a.)

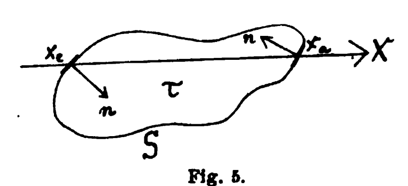


Fig. 5.

Bezeichnen wir mit dS das Element der Oberfläche von τ, dessen Projection auf die yz-Ebene $dydz$ ist, und mit n die nach dem Innern von τ errichtete Normale von dS, so ist

$$\text{für } x = x_e \quad dy\cdot dz = dS.\cos(nx),$$
$$\text{für } x = x_a \quad dy\cdot dz = -dS.\cos(nx).$$

Wir erhalten also für die beiden ersten Glieder der rechten Seite:

$$\int_y\int_z [U\cdot A_x\cos(nx)\cdot dS]_{x_a} + \int_y\int_z [U\cdot A_x\cos(nx)\,dS]_{x_e}.$$

Beide Integrale zusammen bilden die Summe aller Werthe

$$U \cdot A_x \cdot \cos(nx)\, dS,$$

gebildet für die gesammte Oberfläche S von τ.

Demnach:

$$-\int_\tau \frac{\partial U}{\partial x} \cdot A_x\, d\tau = +\int_S U \cdot A_x \cos(nx)\, dS + \int_\tau U \cdot \frac{\partial A_x}{\partial x}\, d\tau.$$

Zu dieser Gleichung addiren wir zwei andere, die entstehen, wenn wir x durch y, bezw. z ersetzen. Bedeuten A_x, A_y, A_z, wie es der Bezeichnung entspricht, die rechtwinkligen Componenten eines Vectors A, so bildet sich unter dem Flächenintegral der Ausdruck

$$A_x \cos(nx) + A_y \cos(ny) + A_z \cos(nz) = A_n$$

und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} -\int_\tau \left[\frac{\partial U}{\partial x} \cdot A_x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot A_y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot A_z\right] d\tau &= \int_S U A_n\, dS \\ &+ \int_\tau U \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right] d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welche als der „Green'sche Satz“ bezeichnet wird. Bedingung ihrer Gültigkeit ist, dass

$$U,\ A_x,\ A_y,\ A_z$$

innerhalb τ einwerthige und stetige Functionen von x, y, z seien. Es sei nun diese Bedingung nicht durchweg erfüllt: es seien zwar U, A_x, A_y, A_z noch einwerthig, und U auch durchweg stetig in τ; hingegen mögen in τ Flächen S_{ik} vorhanden sein, an denen A_N unstetig ist, wenn N die Normale von S_{ik} bezeichnet. Sind diese Flächen geschlossen, oder haben sie ihre Randcurven auf der Oberfläche S von τ, so zerfällt durch sie τ in Räume τ_i, τ_k, innerhalb deren die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind. Haben die S_{ik} andere Randcurven, so erreichen wir die gleiche Zerfällung, indem wir die S_{ik} passend ergänzen. Für jeden Raum τ_i gilt nun die obige Gleichung; seine Oberfläche wird gebildet durch Flächen S_{ik} und durch Theile von S. Wir addiren alle so entstehenden Gleichungen.

Dann setzen sich die Raumintegrale wieder zusammen zu Integralen über den Gesammtraum τ. Die Flächenintegrale setzen sich zusammen zu einem Integral über S und solchen über die S_{ik}, und zwar tritt jede der letzteren Flächen in zwei Integralen auf. Fassen wir zusammen, was mit demselben Flächenelement dS_{ik} multiplicirt ist, und bezeichnen mit N_i und N_k seine beiden Normalen, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} -\int_\tau \left[\frac{\partial U}{\partial x} A_x + \frac{\partial U}{\partial y} A_y + \frac{\partial U}{\partial z} A_z\right] d\tau = \\ \int_S U A_n \cdot dS + \Sigma \int_{S_{ik}} U\left[A_{N_i} + A_{N_k}\right] dS_{ik} \\ + \int_\tau U \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right] d\tau \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

mit folgenden Bedingungen: U, A_x, A_y, A_z, müssen innerhalb τ einwerthig, und U auch stetig sein, und unter die S_{ik} müssen alle Flächen aufgenommen werden, an welchen $A_{N_i} + A_{N_k} \neq 0$ ist.

Von dieser Gleichung werden wir häufig Gebrauch machen; wir bezeichnen die hier ausgeführte Operation als „partielle Integration über den Raum τ."

Als erste Anwendung setzen wir in (12): $U = \varphi$, $A = \varepsilon E$ und benutzen, dass nach (4) $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ .. ist.

Es folgt:

$$\left.\begin{aligned} \int_\tau \varepsilon\left[E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right] d\tau = \\ \int_S \varphi \cdot \varepsilon E_n . dS + \Sigma \int_{S_{ik}} \varphi\left[\varepsilon_i E_{N_i} + \varepsilon_k E_{N_k}\right] dS_{ik} \\ + \int_\tau \varphi \left[\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right] d\tau \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Bedingungen der Gültigkeit von (12) sind erfüllt, gemäss den Stetigkeitseigenschaften des Potentials und der Feldintensität (S. 16, 17 u. 24), wenn wir unter den S_{ik} alle diejenigen Flächen begreifen, auf welchen sich Elektricität mit endlicher Flächendichte befindet.

Nun wollen wir für τ den ganzen unendlichen Raum nehmen. Die Fläche S rückt dann in unendliche Entfernung von dem elektrisirten System. Dort ist, wenn r den Abstand von einem Punkt des letzteren bezeichnet, nach dem Bildungsgesetz (3): $\varphi = 0$ wie $\frac{1}{r}$, und $E_n = 0$ wie $\frac{1}{r^2}$. Die Ausdehnung der Fläche aber ist unendlich nur wie r^2. Also verschwindet das erste Integral der rechten Seite von (13). Die übrigen Glieder aber sind $= 2W_e$ (vgl. S. 25). Also folgt:

$$W_e = \tfrac{1}{2}\int \varepsilon\,[E_x^2 + E_y^2 + E_z^2]\,d\tau = \tfrac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\tau, \qquad \text{(B)}$$

wo die Integrale soweit auszudehnen sind, wie E von Null verschiedene Werthe hat, d. h. über das ganze Feld.

Wir wollen noch der Beziehung (4'): $E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$, eine andere Form geben. Es ist nach dieser Gleichung $\int_p^{p'} E_l dl$ gleich der Differenz $\varphi(p) - \varphi(p')$ zweier durch die Lage von p und p' eindeutig bestimmter Functionswerthe φ; also ist das Integral, welches wir als „Linien-Integral des Vectors E über den Weg l" bezeichnen, gleich Null für jede in sich zurücklaufende Curve. Dies soll in folgender Weise geschrieben werden:

$$\oint E_l dl = 0.$$

Zusammenstellend haben wir dann die folgenden „allgemeinen Bedingungen des elektrostatischen Feldes":

E überall endlich, im allgemeinen stetig, unstetig nur die Normalcomponenten an gewissen Flächen.

$r^2 E$ endlich für $r = \infty$

$$\oint E_l dl = 0 \qquad \text{(C)}$$

$E = 0$ in Leitern. (D)

§ 5. Grundgleichungen der Elektrostatik für nichthomogene Dielektrica.

Wir haben jetzt die Beziehungen zwischen den elektrischen Grössen durch zwei Systeme von Gleichungen ausgedrückt: einerseits (3) (4) (6), in welchen die Elektricitätsmengen, — andererseits (A) (B) (C), in welchen die Werthe der Feldintensität den Ausgangspunkt bilden. Wir leiteten das zweite System als nothwendige Folge aus dem ersten ab; es ist, wie wir alsbald sehen werden, auch das umgekehrte möglich. Beide Systeme sind also mathematisch äquivalent unter unseren bisherigen Voraussetzungen. Ihr wesentlichster Unterschied besteht darin, dass im ersten System die Feldstärke in jedem Punkt abhängig erscheint von der Elektricitäts-Vertheilung im ganzen Raume, während in der zweiten die Elektricitäts-Vertheilung bestimmt wird durch die Werthe der Feldintensität in unendlicher Nähe des betrachteten Punktes; [denn (8) und (9) sind lediglich specielle Formen von (A).] Zu unseren Voraussetzungen gehörte wesentlich, dass das ganze Feld ausser den Leitern nur einen homogenen Isolator enthielt; die Wahl dieses Isolators bedingte den Werth, den wir dem ε ertheilen mussten.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Fall über, dass das Feld sich aus beliebigen Isolatoren und Leitern zusammensetzt. Das erste Gleichungssystem lässt sich nicht in der Weise verallgemeinern, dass die ε-Werthe verschiedener Medien darin erscheinen. Wohl aber bleiben wir mit der Erfahrung in Uebereinstimmung, wenn wir das zweite Gleichungssystem beibehalten, sofern wir nur jedem Raumelement denjenigen Werth von ε zuschreiben, der die dort vorhandene Materie (gemäss dem soeben gesagten) charakterisirt.

Die Grundlage unserer weitern Untersuchungen soll daher das Gleichungssystem (A) (B) (C) (D) bilden, — und zwar die ausschliessliche: wir sehen vollständig ab von den Erfahrungen und Ueberlegungen, welche uns zu diesen Gleichungen geführt haben. Insbesondere: die Elektricitätsmenge ist nicht mehr durch das Coulomb'sche Gesetz, die Feldintensität nicht mehr durch den Summenwerth in (2) definirt.

Unsere einzigen Voraussetzungen sind also von jetzt ab die folgenden: Es liege ein „elektrostatisches Feld“ vor, d. h. ein Zustand der Materie, welcher unverändert und ohne Energieumsatz verharren kann, und welcher in folgender Weise bestimmt ist:

Die Energie des Feldes ist

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\tau. \qquad \text{(B)}$$

Hierin bedeutet ε eine positive Constante (Dielektricitätsconstante), welche das elektrostatische Verhalten der Materie charakterisirt, die sich im Raumelement $d\tau$ befindet; E einen Vector, die elektrische Feldintensität.

Die Bedeutung von W_e ist diese: vergleichen wir zwei elektrostatische Zustände des Raumes, so giebt die Differenz $W_e' - W_e''$ die Energiemenge an, welche bei der Ueberführung aus dem ersten in den zweiten Zustand frei wird; diese Energie erscheint als mechanische Arbeit, wenn der Zustand auch bei der Ueberführung ein elektrostatischer bleibt. — Zu W_e liefert jedes Element des Raumes einen Beitrag; wir können und wollen daher auch jedem Raumelement einen bestimmten Energiegehalt zuschreiben, indem wir als Energie des begrenzten Raumes τ die Grösse

$$\frac{1}{2}\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau$$

bezeichnen.

Der Vector E genügt den „allgemeinen Bedingungen“:

E endlich, unstetig nur E_N an gewissen Flächen;

$E = 0$ wie $\frac{1}{r^2}$ im unendlichen;

$$\oint E_l dl = 0 \text{ für jede geschlossene Curve;} \qquad \text{(C)}$$

$$E = 0 \text{ in Leitern.} — \qquad \text{(D)}$$

Ferner gilt die Gleichung

$$\int \varepsilon E_N dS = \Sigma e_i. \qquad \text{(A)}$$

Sie spricht, da ε jetzt variabel, eine Function der Coordinaten ist, eine Eigenschaft nicht sowohl des Vectors E, als des Vectors εE aus. Wir bezeichnen den letzteren als „elektrische Polarisation.“ Er ist, da ε positiv, stets mit E gleich gerichtet. Wir bezeichnen ferner allgemein, wenn A ein beliebiger Vector, S eine beliebige Fläche, und N die — überall auf derselben Seite von S gezogene — Normale von dS ist, das Integral

$$\int\limits_S A_N dS$$

als „das Flächen-Integral von A über S.“ Dann sagt (A) aus: das Flächenintegral der elektrischen Polarisation über eine geschlossene Fläche ist gleich dem Elektricitäts-Inhalt der Fläche. — Seinen physikalischen Inhalt erhält dieser Satz dadurch, dass „Elektricitätsmengen“ Grössen sind, deren algebraische Summe durch keinen Vorgang verändert wird, und die ferner in Isolatoren fest an den materiellen Elementen haften.*)

Ausschliesslich durch diese Eigenschaften, und durch das, was aus den Gleichungen (A) (B) (C) (D) folgt, sind Elektricitätsmengen von jetzt ab für uns definirt.

Aus den jetzt vorausgesetzten Eigenschaften von E ergeben sich zunächst einige Folgerungen von neuem, die wir früher aus dem algebraischen Ausdruck ableiteten.

Zunächst folgt aus (C): das Linienintegral von E über eine beliebige Curve ist durch Anfangs- und Endpunkt der Curve eindeutig bestimmt. In Zeichen: es ist

$$\int\limits_p^{p'} E_l dl = \varphi(p) - \varphi(p'), \text{ oder } E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l},$$

wo $\varphi(p)$ eine einwerthige Function der Coordinaten von p

*) Durch den zweiten Theil der Behauptung sind die Vorgänge, durch welche die Elektrisirung von Isolatoren hergestellt wird (wie z. B. Reibung), von unseren theoretischen Betrachtungen ausgeschlossen. Für dieselben haben sich bisher quantitative Gesetzmässigkeiten nicht ergeben, — ausser der einen, dass auch bei ihnen die algebraische Summe aller Elektricität ungeändert bleibt.

bezeichnet, welche wir wiederum das „elektrische Potential im Punkte p" nennen. Die vorausgesetzten weiteren Eigenschaften von E ergeben folgende Eigenschaften für φ: das Potential kann — und soll, wie wir hiermit festsetzen, — als durchweg stetige Function der Coordinaten angenommen werden. Es nähert sich für alle unendlich fernen Punkte einem und demselben constanten Werth c derart, dass $\varphi_\infty - c$ gleich Null wird, wie $\frac{1}{r}$. Schliesslich: φ ist constant in jedem zusammenhängenden Leiter.

Wenn in einem Raum τ das Feld E bekannt ist, so ist dadurch für den gleichen Raum φ bestimmt bis auf eine additive Constante. Der letzteren kommt, solange wir unsere Betrachtungen auf den Raum τ beschränken, keine physikalische Bedeutung zu; nur Potential-Differenzen besitzen eine solche. Eine vollkommen willkürliche, aber für die Darstellung bequeme Festsetzung ist die folgende: a) wenn das betrachtete Feld den ganzen unendlichen Raum umfasst, so setzen wir den gemeinsamen Werth, den φ in allen unendlich fernen Punkten besitzt, gleich Null. — b) wenn es sich um einen Raum handelt, der von einem zusammenhängenden Leiter umschlossen ist, so setzen wir das Potential in diesem Leiter gleich Null. Falls dann nachträglich dieses Feld mit einem anderen combinirt wird, genügt es, durchweg an Stelle von $\varphi(p)$ zu setzen: $\varphi(p) - a$, wo a das Potential der leitenden Hülle bedeutet. —

Die Gleichung (A) ist ihrem Wesen nach eine Differentialgleichung. Wir erhalten sie in der Form einer solchen, indem wir für S die vollständige Begrenzung eines beliebig geformten Volumelements wählen. Specielle Fälle bilden das rechtwinklige Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ und der flache Cylinder über dS. Indem wir (A) auf diese anwenden, erhalten wir

$$\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z} = \varrho \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 E_{N_1} + \varepsilon_2 E_{N_2} = \sigma, \tag{9}$$

genau wie S. 23 f.; denn wir haben bei der ersten Ableitung dieser Gleichungen von der damals vorausgesetzten Constanz von ε keinen Gebrauch gemacht. —

Führen wir φ ein, so lauten die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=-\varrho \tag{8}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}+\varepsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial N_2}=-\sigma. \tag{9}$$

Für homogene Körper wird daraus:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=-\varrho \tag{8a}$$

oder, wenn wir wie üblich, ein Operationszeichen $\triangle$ definiren durch

$$\triangle\alpha=\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}:$$

$$\varepsilon\triangle\varphi=-\varrho. \tag{8a}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial N_2}\right)=-\sigma. \tag{9a}$$

Die Operationen, welchen εE in (8) und (9) unterworfen ist, werden wir noch mit anderen Vectoren vorzunehmen haben. Wir wollen bezeichnen, wenn A ein beliebiger Vector ist:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}=\Gamma_\tau(A) \text{ und}\\ A_{N_1}+A_{N_2}=\Gamma_S(A),\end{cases}$$

und $\Gamma_\tau(A)$ die „räumliche Divergenz", $\Gamma_S(A)$ die „Flächen-Divergenz des Vectors A" nennen.

Für den Vector εE wird dann:

$$\Gamma_\tau(\varepsilon E)=\varrho \tag{8}$$

$$\Gamma_S(\varepsilon E)=\sigma, \tag{9}$$

in Worten: Die räumliche (Flächen-)Dichte der Elektricität ist gleich der räumlichen (Flächen-)Divergenz der elektrischen Polarisation.

Wir haben gezeigt, dass (8) und (9) nothwendige Folge von (A) ist. Aber auch das umgekehrte gilt. Wenn wir in (12) $U=1$, $A=\varepsilon E$ setzen und statt der inneren Normale n die äussere N einführen, so kommt

$$\int\limits_S \varepsilon E_N dS=\int\limits_\tau \Gamma_\tau(\varepsilon E)\,d\tau+\Sigma\int\limits_{S_{ik}}\Gamma_S(\varepsilon E)dS_{ik}$$

$$=\int\limits_\tau \varrho d\tau+\Sigma\int\limits_{S_{ik}}\sigma\, dS_{ik}=\Sigma e_i.$$

(8) und (9) einerseits, (A) andrerseits sind also vollkommen gleichwerthig.

Aus der letzten Ableitung ist aber noch etwas anderes zu entnehmen: es sei τ ein Raum, in welchem die Componenten von A durchweg stetig sind; dann ist

$$\int_S A_N dS = \int_\tau \Gamma_\tau(A) d\tau;$$

ist auch $\Gamma_\tau(A)$ stetig, und wird das Volumen τ sehr klein, so kommt

$$\Gamma_\tau(A) = \frac{1}{\tau}\int_S A_N dS.$$

Die Gleichung enthält keine Voraussetzung über die Form von τ und sagt daher aus:

Die Divergenz $\Gamma_\tau(A)$ des Vectors A ist numerisch gleich dem Flächenintegral von A über die Oberfläche einer beliebig geformten Volumeinheit (welche, wie in allen entsprechenden Definitionen, so klein gedacht ist, dass man von einem bestimmten Werth von $\Gamma_\tau(A)$ im Innern sprechen kann).

$\Gamma_\tau(A)d\tau$ und $\Gamma_S(A)dS$ sind stets Grössen gleicher Art, — z. B. wenn $A = \varepsilon E$, unendlich kleine Elektricitätsmengen; — wir wollen deshalb, zur Vereinfachung der Schreibweise, als gemeinsames Zeichen für beide: $\Gamma(A)d\tau$ überall da benutzen, wo eine Unterscheidung nicht nothwendig ist.

Statt

$$\left.\begin{array}{l}\int_S A_N dS = \int_\tau \Gamma_\tau(A) d\tau + \Sigma \int_{S_{ik}} \Gamma_S(A) dS_{ik} \\ (S \text{ Oberfläche von } \tau,\ S_{ik} \text{ Flächen in } \tau),\end{array}\right\} \quad (14)$$

werden wir also im allgemeinen schreiben:

$$\int_S A_N dS = \int_\tau \Gamma(A) d\tau. \quad (14a)$$

Wo auch der Factor — $d\tau$ oder dS — unwesentlich ist, soll $\Gamma(A)$ als gemeinsames Symbol für $\Gamma_\tau(A)$ und $\Gamma_S(A)$ gelten.

Aus (8) schliesst man wieder mittels (D): $\varrho = 0$ in jedem Leiter. Hierzu ist folgende Bemerkung zu machen:

ε bedeutet in unseren jetzigen Gleichungen eine Constante der den Raum $d\tau$ erfüllenden Materie, im vorliegenden Fall also des Leiters. Indem man den erwähnten Schluss zieht, hat man also von der Dielektricitätsconstante eines Leiters, die nach dem bisherigen nicht definirt werden konnte, bereits das Eine vorausgesetzt, dass sie nicht unendlich ist. Wir machen diese Annahme; dann kann sich nur auf der Oberfläche von Leitern Elektricität befinden.

Dort gilt wieder:

$$\varepsilon E_N = \sigma, \text{ oder } \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial N} = -\sigma \qquad (9')$$

und

$$\int_S \varepsilon E_N dS = e. \qquad (10)$$

Es ergiebt sich ferner, in Folge der „allgemeinen Bedingungen“, genau wie S. 28 die Gleichung (13) und somit für die Energie des Raumes τ, unter Benutzung der soeben eingeführten Zeichen:

$$\left. \begin{aligned} W_e = \tfrac{1}{2}\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau = \tfrac{1}{2}\int_\tau \varphi \cdot \Gamma(\varepsilon E) d\tau + \tfrac{1}{2}\int_S \varphi \cdot \varepsilon E_n dS, \\ \text{oder nach (8) und (9)} \\ = \tfrac{1}{2}\, \Sigma \varphi \cdot e + \tfrac{1}{2}\int_S \varphi \cdot \varepsilon E_n dS, \end{aligned} \right\} (15)$$

wo e das gemeinsame Symbol für alle in τ liegenden Elektricitätsmengen, vom Typus $\varrho d\tau$ oder σdS, ist.

Auf jeder Leiteroberfläche hat φ einen constanten Werth φ_i; ihr Beitrag zu W_e kann also geschrieben werden:

$$\tfrac{1}{2}\, \varphi_i \int_{S_i} \Gamma_S(\varepsilon E)\, dS_i = \tfrac{1}{2}\, \varphi_i e_i,$$

wo e_i die gesammte Elektricitätsmenge des Leiters ist.

Die Energie eines beliebig begrenzten Raumes war in unserer ersten Darstellung nicht definirt. Was wir jetzt als solche definirt haben, fällt, wie (15) zeigt, im allgemeinen nicht zusammen mit der über diesen Raum erstreckten Summe $\Sigma \tfrac{1}{2}\, \varphi \cdot e$.

Wir wollen nun aber über τ eine beschränkende Voraussetzung machen: τ sei ein zusammenhängender Raum, dessen Grenzen zum Theil in unendlicher Entfernung, zum Theil in Leitern verlaufen. An dem letztern Theil von S ist $E_n = 0$, und auch das Integral über den ersteren Theil verschwindet, wie S. 29 gezeigt wurde. Also folgt:

$$\left.\begin{aligned} W_e = \tfrac{1}{2}\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau &= \tfrac{1}{2}\int_\tau \varphi \cdot \Gamma(\varepsilon E)\, d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\varphi \cdot e. \end{aligned}\right\} \qquad (15a)$$

Der Raum τ, für welchen die Gleichung (15a) gilt, hat die auszeichnende Eigenschaft, dass er von etwa vorhandenen anderen elektrischen Feldern vollkommen getrennt ist durch Räume, in denen kein Feld existirt. Wir wollen ihn ein „vollständiges Feld“ nennen.

Einen besonderen Fall des vollständigen Feldes bildet der ganze unendliche Raum.

Einen zweiten, für uns wichtigeren, Specialfall haben wir, wenn τ sich nirgends ins unendliche erstreckt, seine Grenze also ganz in Leitern verläuft. Da τ zusammenhängend sein soll, so muss dann ein zusammenhängender Leiter seine äussere Grenze bilden. Das vollständige Feld soll in diesem Fall ein „geschlossenes“ heissen. Auf der ganzen Oberfläche eines solchen Feldes ist $E = 0$. Also folgt aus (A):

$$\Sigma e = 0\,,$$

d. h. die algebraische Summe aller in einem geschlossenen Felde enthaltenen Elektricität ist Null. Dem Felde gehört die innere Oberfläche der leitenden Hülle H an. Die auf dieser befindliche Elektricitätsmenge ist also der Summe aller eingeschlossenen Elektricitätsmengen stets entgegengesetzt gleich. Sie kann neben diesen nicht willkürlich vorgeschrieben werden. Sie tritt aber in Folge unserer Festsetzung, $\varphi_H = 0$ anzunehmen, in der Gleichung (15a) nicht auf; eben darin liegt der Nutzen dieser Festsetzung. —

Einem vollständigen, nicht geschlossenen Felde können und wollen wir eine äussere Begrenzung zuschreiben, welche — im übrigen unbestimmt, — im unendlichen verläuft. Unsere will-

kürliche Festsetzung über den Nullpunkt der φ lautet dann einfach: in jedem vollständigen Feld nehmen wir $\varphi = 0$ an auf der äusseren Begrenzung.

§ 6. Darstellung des Feldes durch Kraftlinien.

Bisher haben wir die Beziehungen zwischen den verschiedenen elektrischen Grössen analytisch dargestellt. Wir wollen uns jetzt eine anschauliche Darstellung dieser Beziehungen verschaffen.

Wir denken uns eine Linie gezogen, — es wird im allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung sein, — welche in ihrem Verlauf überall der Richtung der Polarisation εE folgt. Für dieselbe wollen wir im folgenden das Zeichen $\mathfrak{E}$ benutzen. Eine solche Linie nennen wir eine „elektrische Kraftlinie." In ihr werde diejenige Richtung positiv gerechnet und als „Richtung der Kraftlinie" bezeichnet, welche mit der Richtung von $\mathfrak{E}$, also auch von E, gleichsinnig ist.

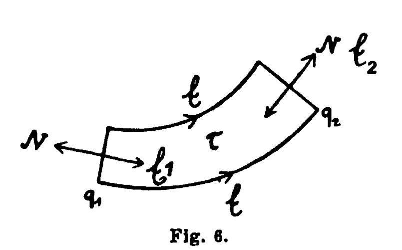


Fig. 6.

Wir wollen nun solche Kraftlinien ziehen durch alle Punkte des Randes eines Flächenelements q_1, welches zu $\mathfrak{E}$ normal ist. Wir führen sie durch eine beliebige Strecke fort, setzen aber voraus, dass wir dabei auf keine Elektricitätsmenge stossen; dann legen wir zu dem unendlich dünnen Bündel einen zweiten senkrechten Querschnitt q_2. Die Werthe von $\mathfrak{E}$ an q_1 und q_2 mögen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ heissen. Wir haben durch unsere Construction einen fadenförmigen Raum τ eingegrenzt (s. Fig. 6), der ein „Kraftfaden" heissen mag. Auf diesen wenden wir die Gleichung (A) an:

$$\int\limits_S \varepsilon E_N dS = \int\limits_S \mathfrak{E}_N dS = \Sigma e_i.$$

Die rechte Seite ist nach Voraussetzung Null. Zur linken Seite liefert die Röhrenwand keine Beiträge, denn dort liegt

überall $\mathfrak{E}$ in der Fläche S; es bleiben von dem Integral nur die beiden Elemente übrig, welche von q_1 und q_2 herrühren. Diese sind $-q_1 \mathfrak{E}_1$ und $+q_2 \mathfrak{E}_2$. Also haben wir $q_1 \mathfrak{E}_1 = q_2 \mathfrak{E}_2$; d. h. längs dem Kraftfaden ist

$$q\mathfrak{E} = \text{const.}$$

Zerlegen wir nun eine Fläche constanten Potentials, — auf der die Kraftlinien überall senkrecht stehen, — in der Weise in Flächenelemente q, dass $q\mathfrak{E}$ auf der ganzen Fläche denselben Werth hat, ziehen die Kraftlinien durch alle Punkte der Begrenzungslinien aller q und führen sie beliebig durch einen von Elektricität freien Raum fort, so wird durch die Construction dieser ganze Raum in Kraftfäden zerlegt, für welche

$$q\mathfrak{E} = \text{const.} \tag{16}$$

ist. In einem Raum also, in welchem die Construction ausgeführt ist, ersieht man für jeden Punkt unmittelbar nicht nur die Richtung, sondern — aus dem Querschnitt des Kraftfadens an der betrachteten Stelle — auch die Grösse der Polarisation.

Man pflegt sich nun etwas anders auszudrücken, im Anschluss an eine von Faraday benützte Bezeichnungsweise. Statt die Kraftlinien durch alle Punkte der Randcurve von q zu ziehen, denken wir uns in der Axe jedes Kraftfadens eine Kraftlinie gezogen. Es gehen dann durch jede zu $\mathfrak{E}$ senkrechte Flächeneinheit: $\frac{1}{q} = \frac{\mathfrak{E}}{\text{const.}}$ Kraftlinien. Die noch willkürliche Constante wählen wir $= 1$, d. h. wir ziehen durch die Flächeneinheit einer Aequipotentialfläche $\mathfrak{E}$ Kraftlinien, oder durch ein Flächenelement $d\Sigma$ derselben $\mathfrak{E} \cdot d\Sigma$ Kraftlinien. Durch ein beliebig gestelltes Flächenelement dS gehen dann ebensoviel Kraftlinien, wie durch die Projection von dS auf die Aequipotentialfläche, d. h. $\mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}N) dS$, wenn N die Normale von dS bezeichnet, oder $\mathfrak{E}_N \cdot dS$. Also: durch eine beliebig gestellte Flächeneinheit gehen soviel Kraftlinien, wie die zur Fläche normale Componente der Polarisation angiebt.

Nun sei τ ein beliebiger Raum, mit beliebiger Elektricitäts-Vertheilung im Innern. Seine vollständige Begrenzung

bilde die Fläche S, deren äussere Normale N heisse. Durch S treten in der Richtung von innen nach aussen

$$\mathfrak{Z} = \int_S \mathfrak{E}_N dS$$

Kraftlinien. Wo eine Kraftlinie in τ hineintritt, da ist $\mathfrak{E}_N$ negativ, und das betreffende Flächenelement liefert einen negativen Beitrag zu $\mathfrak{Z}$. $\mathfrak{Z}$ ist also der Ueberschuss der austretenden über die eintretenden Kraftlinien. Es ist aber nach Gleichung (A):

$$\mathfrak{Z} = \Sigma e_i.$$

Unsere Gleichung gilt auch noch, wenn der von S umspannte Raum τ beliebig klein ist; also folgt: Unsere Construction lässt sich auch für einen beliebig von Elektricität erfüllten Raum durchführen; nur muss am Ort jeder positiven Elektricitätseinheit eine Kraftlinie entspringen, am Ort jeder negativen Elektricitätseinheit eine Kraftlinie münden.

Fig. 7.

Die Raum- und Flächendichten ϱ und σ, welche wir bereits als räumliche, bezw. Flächen-Divergenz der Polarisation bezeichneten, sind identisch mit der Zahl von Kraftlinien, welche von einer Volum-, bezw. Flächeneinheit ausstrahlen.

Dies ist der Inhalt der Gleichung (A) bezw. (8) und (9) in unserer jetzigen Ausdrucksweise.

Ueber den Verlauf der einzelnen Kraftlinie geben uns die „allgemeinen Bedingungen" (S. 31) Aufschluss: Wo die Werthe von ε sich stetig ändern, da sind auch die Componenten von $\mathfrak{E}$ stetig, dort hat also die Kraftlinie stetige Krümmung. Wo aber, an einer von Elektricität freien Fläche, ε sich sprungweise ändert, da sind (man setze $\sigma = 0$ in (9)) stetig die Normalcomponente von $\mathfrak{E}$, und die Tangentialcomponente von E; in Zeichen

$$\varepsilon_1 E_{1N} = \varepsilon_2 E_{2N}$$
$$E_{1S} = E_{2S}$$

Daraus folgt zunächst, dass die Kraftlinien in beiden Medien und die Normale der Grenzfläche in einer Ebene liegen. Ferner (vgl. Fig. 7), wenn α_1 und α_2 die Winkel zwischen Normale und Kraftlinie auf beiden Seiten der Grenzflächen bezeichnen:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{E_{1S}}{E_{1N}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2S}}{E_{2N}}, \text{ also}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{17}$$

Dies ist das „Brechungsgesetz der Kraftlinien.“ Sie werden in dem Medium von grösserer Dielektricitätsconstante von der Normale fortgelenkt; aber eine „Totalreflexion“ existirt für sie nicht.

Weiter: die Polarisation hat an jeder Stelle des Raums, sofern sie nicht Null ist, eine bestimmte Richtung. Daraus folgt: eine Kraftlinie kann weder sich selbst, noch eine andere Kraftlinie schneiden.

Kann aber eine Kraftlinie etwa in einer einfachen Schleife in sich zurücklaufen? Hierauf giebt die Bedingung (C) die Antwort: erstreckten wir über eine solche geschlossene Kraftlinie l das Linienintegral

$$\int_{O} E_l \, dl,$$

so wäre, weil E und $\mathfrak{E}$ gleich gerichtet sind, auf dem ganzen Wege $E_l = + E$, also positiv, und somit das Integral positiv; es muss aber für jede geschlossene Curve Null sein. Also giebt es keine in sich zurücklaufenden Kraftlinien. Jede elektrostatische Kraftlinie hat zwei Endpunkte.

(Wir wollen aber schon hier bemerken, dass dies nur für statische, und allgemeiner für stationäre Felder gilt. Später werden wir elektrische Felder kennen lernen, in denen in sich zurücklaufende Kraftlinien existiren.)

Betrachten wir einen beliebigen Raum τ, so werden im allgemeinen Kraftlinien existiren, welche die Grenzen von τ durchsetzen; durch sie hängt das Feld in τ mit anderen Feldern zusammen. In einem Leiter aber ist nach (D): $E = 0$, dort existiren also keine Kraftlinien. Erstreckt sich demnach

der Raum τ zum Theil in's unendliche, und verlaufen im übrigen seine Grenzen in Leitern, so ist das Feld in τ mit keinem andern Feld durch Kraftlinien verbunden. Wir nannten es ein vollständiges Feld. Erstreckt sich τ in's unendliche, so können auch Kraftlinien im unendlichen verlaufen und dort enden; d. h. ihr Verlauf kann zum Theil unbestimmt sein. In jedem solchen Fall haben wir auf eine vollständige Behandlung des vorliegenden Problems zu verzichten. Alle exacten Versuche beziehen sich deshalb auf solche vollständige Felder, die zugleich endlich sind, auf Räume also, deren Grenzen durchweg in Leitern verlaufen. Einen zusammenhängenden Raum dieser Art haben wir ein geschlossenes Feld genannt. Der Satz, dass die gesammte Elektricitätsmenge eines geschlossenen Feldes Null ist (S. 37), heisst nichts anderes, als: jede Kraftlinie, die in dem Felde entspringt, muss auch in ihm münden. —

Der Satz, dass wir auf keine Weise die algebraische Summe aller Elektricität ändern können, ist, sobald wir unserer Darstellung des Feldes allgemeine Gültigkeit zuschreiben, selbstverständlich. Denn er heisst nichts anderes, als dass die allgemeinsten Veränderungen, die wir hervorrufen können, in der Herstellung beliebiger, aber vollständiger Kraftlinien bestehen, — mit anderen Worten, dass sie sich stets auf endliche Räume beschränken.

Wir schliessen mit einem allgemeinen Satz über Vectorenvertheilung im Raum:

Es genüge ein Vector A im Raum τ den folgenden Bedingungen: 1) es sei $\int \alpha A_l dl = 0$ für jede geschlossene Curve, wo α eine variable, aber stets positive Zahlgrösse bedeute; 2) es sei $A_n = 0$ an der ganzen Oberfläche von τ; 3) es sei $\Gamma(A) = 0$ im ganzen Raum τ. — Wir stellen den Vector in gleicher Weise durch „A-Linien" dar, wie wir es eben für $\mathfrak{E}$ durch die Kraftlinien gethan haben. Dann ist durch 1) ausgesagt: es existiren in τ keine geschlossenen A-Linien; durch 2): es treten keine A-Linien durch die Oberfläche von τ; durch 3): es existiren in τ keine Endpunkte von A-Linien. Daraus folgt offenbar: es existiren in τ überhaupt keine A-Linien, d. h. der Vector A ist in τ durchweg Null.

Bedeutet A speciell die elektrische Polarisation, so ist die Bedingung 1) für elektrostatische Felder allgemein erfüllt; 2) ist erfüllt für ein vollständiges Feld; 3) ist erfüllt, wenn sich in τ keine Elektricität befindet. Also: es giebt kein vollständiges elektrostatisches Feld, in dem sich keine Elektricität befindet.

§ 7. Allgemeine Lehrsätze. — Das Potential des Ellipsoids.

Aus unseren Grundannahmen, und zwar zunächst aus dem Inhalt der Gleichungen (A) (C) (D), sollen jetzt eine Anzahl allgemeiner Sätze abgeleitet werden. — Das Fundament bildet der Satz, den wir soeben mit Hülfe der Kraftlinien geometrisch bewiesen haben:

a) Es kann kein vollständiges elektrostatisches Feld geben, in welchem sich nirgends Elektricität befindet. — Der Satz ist nicht selbstverständlich; denn wir können im allgemeinen keineswegs, wie dies unter den Voraussetzungen des § 2 möglich war, die Feldintensität explicite durch die Elektricitätsmengen darstellen. Wir beweisen ihn nochmals in analytischer Form. Die Voraussetzung ist: in einem vollständigen Felde τ sei durchweg

$$\varrho = \Gamma_\tau(\varepsilon E) = 0 \text{ und } \sigma = \Gamma_S(\varepsilon E) = 0; \text{ kürzer: } \Gamma(\varepsilon E) = 0;$$

— die Behauptung: dann ist in τ auch durchweg $E = 0$.

Beweis: Für ein vollständiges Feld gilt die Gleichung (15a); aus ihr folgt unter unseren Voraussetzungen:

$$\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau = 0.$$

Die linke Seite ist aber eine Summe von Gliedern, deren keins negativ sein kann, folglich jedes einzeln Null sein muss. Also: $E = 0$ im ganzen Integrationsgebiet. — Zu diesem Beweise sind implicite die „allgemeinen Bedingungen des elektrostatischen Feldes“ benutzt: denn diese sind Voraussetzung für die Gültigkeit von (15a).

Zusatz 1: Befinden sich Leiter im Felde, so genügt es bezüglich der Elektricitätsvertheilung auf diesen, dass die gesammte Elektricitätsmenge eines jeden Leiters Null sei.

Zusatz 2: Statt der Bedingung, dass die Elektricitätsmenge eines Leiters Null sei, genügt auch die, dass sein Potential Null sei, — d. h. gleich dem Werth an der äusseren Begrenzung des Feldes.

Beweis: Zum Werthe von $\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau$ in (15a) liefert jeder Leiter i ein Summenglied

$$\varphi_i e_i.$$

Nach unseren Voraussetzungen aber wird in jedem Summenglied einer der beiden Factoren Null. —

Aus a) folgt:

b) Jedes vollständige elektrostatische Feld ist eindeutig bestimmt durch die Angabe seiner Elektricitätsvertheilung.

Beweis: Gesetzt, es gäbe zwei elektrische Feldintensitäten E' und E'', zu denen die gleiche Elektricitätsvertheilung ϱ, σ in dem vollständigen Felde τ gehörte. Es soll also sein

$$\Gamma_\tau(\varepsilon E') = \Gamma_\tau(\varepsilon E'') = \varrho$$

und

$$\Gamma_S(\varepsilon E') = \Gamma_S(\varepsilon E'') = \sigma,$$

und es soll sowohl E' wie E'' den „allgemeinen Bedingungen" genügen. Wir bilden dann das „Differenzfeld" E mit den Componenten

$$E_x = E_x' - E_x'' \text{ etc. (oder allgemein: } E_l = E_l' - E_l'' \text{ für jede Richtung } l).$$

Auch E genügt dann den allgemeinen Bedingungen, und es ist in τ durchweg:

$$\Gamma(\varepsilon E) = 0;$$

daraus folgt nach a) $E \equiv 0$ in τ, oder E' identisch mit E'' in τ, w. z. b. w.

Zusatz: Befinden sich Leiter im Felde, so genügt, um das Feld zu einem bestimmten zu machen, dass für jeden derselben die gesammte Elektricitätsmenge, oder auch das Potential, gegeben sei. Der Beweis folgt aus den Zusätzen zu a) in der gleichen Weise, wie der Beweis von b) aus a) selbst folgte.

Künftig soll unter einer „vorgeschriebenen Elektricitätsvertheilung“ verstanden werden: vorgeschriebene Werthe der Dichten ϱ, σ im Dielektricum und der gesammten Elektricitätsmengen e_i der einzelnen Leiter L_i.

c) Ist im ganzen Felde ε = const., so wird

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=\varrho$$

$$\varepsilon\,(E_{N_1}+E_{N_2})=\sigma.$$

Ein Feld E, welches diese Gleichungen befriedigt und zugleich den allgemeinen Bedingungen genügt, haben wir in §§ 3 und 4 kennen gelernt. Es ist nach dem dort bewiesenen

$$E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l},\ \text{wo}\ \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int\frac{\varrho\,d\tau}{r}+\int\frac{\sigma\,dS}{r}\right]$$

ein möglicher Werth des Feldes bei gegebenen ϱ, σ und gegebenem constantem ε. Wir sehen jetzt, dass es der nothwendige Werth ist.

Es kann von unserm jetzigen Standpunkt aus auffallen, dass der gleiche einfache Ausdruck auch gilt, wenn in das homogene Dielektricum Leiter eingebettet sind, ε also nicht durchweg constant ist. Die Erklärung liegt darin, dass in diesem Fall die Elektricitätsvertheilung auf den Leiteroberflächen derart bestimmt sein muss, dass E in jedem Leiter Null wird, — und dass andrerseits ε in den Gleichungen nur als Factor der Componenten von E auftritt.

Man kann also zunächst das ε der Leiter gleich dem des umgebenden Dielektricums annehmen. Ist die Aufgabe unter dieser Annahme gelöst, so genügt die Lösung auch den Gleichungen, welche entstehen, wenn man nachträglich für das ε der Leiter den wahren Werth einführt, — unter der alleinigen Voraussetzung, dass dieser wahre Werth nicht unendlich sei (vgl. S. 36).

Es könnte hiernach scheinen, als ob dem Begriff „Dielektricitätsconstante eines Leiters“ überhaupt kein physikalischer Inhalt entspräche. Das ist jedoch nicht der Fall. Die Grösse ist stets definirbar, und nach Umständen auch messbar (s. Kap. II, § 2); sie ist nur nicht definirbar aus elektrostatischen Erscheinungen. In der Ausdrucksweise von S. 7: auch

ein Leiter ist, allgemein gesprochen, ein „Dielektricum;“ aber er macht sich in der Elektrostatik nicht als solches geltend.

d) Aus dem unter b) bewiesenen ergiebt sich das folgende Superpositionsprincip:

In einem Raum τ, der ein vollständiges Feld erfüllt, sei gegeben

1) die Elektricitätsvertheilung ϱ', σ', e_i' (oder statt der e_i' auch die Potentiale der Leiter φ_i'). Durch sie ist bestimmt ein Feld E' und dann gemäss (9') die Dichte σ_i' auf den Leiteroberflächen.

In demselben Raum τ sei gegeben, bei unveränderter Anordnung der Materie (also unveränderten Werthen des ε),

2) ϱ'', σ'', e_i'', (oder φ_i'') und dadurch bestimmt E'', σ_i''.

Wenn dann

3) vorgeschrieben wird:

$\varrho = \varrho' + \varrho''$, $\sigma = \sigma' + \sigma''$, $e_i = e_i' + e_i''$ (oder $\varphi_i = \varphi_i' + \varphi_i''$), so entsteht ein Feld E, für welches $E_l = E_l' + E_l''$ mit der Vertheilung: $\sigma_i = \sigma_i' + \sigma_i''$ auf den Leitern.

Beweis: E genügt den allgemeinen Bedingungen, weil E' und E'' es thun, und die Functionen $\Gamma_\tau(\varepsilon E)$, $\Gamma_S(\varepsilon E)$, $\int_{S_i} \varepsilon E_N dS_i$ erhalten gemäss den Bildungsgesetzen (8), (9), (10) die vorgeschriebenen Werthe ϱ, σ, e_i (ebenso die Grössen φ_i). Durch diese Bedingungen aber ist E eindeutig bestimmt; also ist E das Feld der vorgeschriebenen Vertheilung.

Dann aber wird

$$\sigma_i = \varepsilon E_N = \varepsilon(E_N' + E_N'') = \sigma_i' + \sigma_i''.$$

Folgerungen:

α) Die ϱ'', σ'', e_i'' mögen ein Feld E'' (Potential φ'') bestimmen; sie seien bezw. das n-fache der ϱ', σ', e_i', welche das Feld E' (φ') bestimmen, wo n eine constante Zahl; dann ist $E_l'' = nE_l'$ oder $\varphi'' = n\varphi'$.

β) Es sei von den $\varrho' d\tau$, $\sigma' dS$, e_i' 1) eine Grösse, welche e_1 heissen möge, $= 1$, alle übrigen $= 0$, und dann sei das Potential bezeichnet durch φ_1.

Es sei 2) eine andere der Grössen $\varrho' d\tau$, $\sigma' dS$, e_i', nämlich

e_2, gleich 1, die übrigen $= 0$, und dann sei das Potential φ_2 etc. etc.

Wenn dann die einzelnen $\varrho' d\tau$, $\sigma' dS$, e_i' die beliebigen Werthe e_1, e_2 .. haben, so ist das Potential

$$\varphi = e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 + \cdots \tag{18}$$

wo die φ_1, φ_2 .. Functionen der Coordinaten, aber unabhängig von den e_1, e_2 .. sind. — In Worten:

Das Potential ist eine lineare homogene Function aller Elektricitätsmengen. Dabei liefert die Elektricitätsmenge jedes Volum- oder Flächenelements und die gesammte Elektricitätsmenge jedes Leiters je ein Summenglied.

e) Schirmwirkung leitender Hüllen.

Durch einen Hohlkörper H — innere Oberfläche S_i, äussere S_a — aus leitender Substanz werde ein vollständiges Feld in zwei zerlegt, τ_i und τ_a; die Grenze beider Räume bildet eine beliebige Fläche, welche in der Masse der Hülle verläuft und den Hohlraum einschliesst (s. Fig. 8). Den Körpern im Hohlraum sei im ganzen die Elektricitätsmenge e_J, der leitenden Hülle die Menge e_H mitgetheilt. Dann befindet sich auf der Fläche S_i die Menge $-e_J$, und folglich auf S_a die Menge $e_J + e_H$. — Das Feld E_i in τ_i und somit auch die Dichte σ_i auf S_i ist nach b) vollständig bestimmt durch die Elektricitätsvertheilung im Hohlraum. E_i und σ_i sind völlig unabhängig von dem äusseren Felde τ_a.

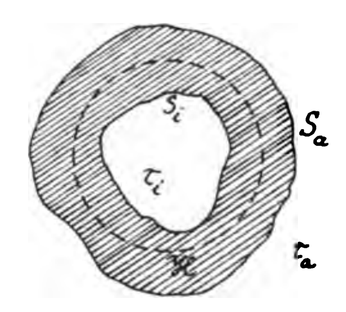


Fig. 8.

Sind speciell im Hohlraum die ϱ, σ, e_i Null, so ist dort nach a) kein Feld vorhanden, wie immer auch in τ_a Elektricität vertheilt sein mag. Die leitende Hülle H schützt ihr Inneres vor der Einwirkung jedes äusseren Feldes.

Aus $E_i \equiv 0$ folgt aber weiter $\sigma_i \equiv 0$. In unserm Fall befindet sich also die Elektricität, welche etwa der Hülle H mitgetheilt ist, im Gleichgewichtszustand ausschliesslich auf

der äusseren Oberfläche S_a. Denken wir also nach eingetretenem Gleichgewicht den Leiter H so zerlegt, dass ein Stück sich im Hohlraum des andern befindet, so ist dieses erstere Stück stets frei von Elektricität. Mit anderen Worten: elektrisiren wir einen Leiter, bringen ihn in den Hohlraum und dort zur Berührung mit dem umhüllenden Leiter, so dass beide für einen Moment einen zusammenhängenden Leiter bilden, so giebt der erste Leiter seine gesammte Elektricität an die Hülle ab (vgl. § 1, unter 4).

f) Wirkung des Hülleninhalts im äussern Raum. Das Feld E_a in τ_a (und somit auch die Dichte σ_a auf S_a) ist nach b) völlig bestimmt durch die Elektricitätsvertheilung im äussern Raum und die gesammte Elektricitätsmenge $e = e_J + e_H$ auf S_a. Es ist unabhängig davon, wie e sich auf seine zwei Summanden vertheilt, und wie e_J im Hohlraum vertheilt ist; es ist also stets das gleiche, als ob die ϱ, σ, e_i im Hohlraum durchweg Null wären und die gesammte Elektricitätsmenge der Hülle mitgetheilt wäre (vgl. § 1, unter 8). Das äussere Feld ist aber auch bestimmt nach b) durch die Elektricitätsvertheilung im Aussenraum und das Potential φ_H der Hülle. Es bleibt also von allen Vorgängen im Hohlraum unberührt, so lange φ_H sich nicht ändert. Wir machen φ_H unveränderlich, wenn wir die Hülle leitend mit einem Körper verbinden, dessen Potential durch unsere Hülfsmittel nicht verändert werden kann. Ein solcher Körper ist, wie wir in § 9 sehen werden, die Erde.

Alle bisherigen Sätze bezogen sich auf vollständige Felder. Für einen ganz beliebig begrenzten Raum aber gilt der Satz:

g) Wenn in τ sich 1) nirgends Elektricität befindet, 2) an einem Theil (S_1) seiner Oberfläche $E_n = 0$ ist, und 3) an dem Rest (S_2) der Oberfläche φ einen constanten Werth (a) besitzt, so ist das Feld in τ gleich Null.

Beweis: Für unsern Raum ergiebt Gleichung (15):

$$\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau = \Sigma\varphi e + \int_{S_1+S_2} \varphi \cdot \varepsilon E_n dS.$$

Zugleich folgt aus (A):

$$0 = -\Sigma ae - \int\limits_{S_1+S_2} a \cdot \varepsilon E_n dS;$$

also durch Addition:

$$\int\limits_{\tau} \varepsilon E^2 d\tau = \Sigma(\varphi\text{-}a)\, e + \int\limits_{S_1+S_2} (\varphi\text{-}a) \cdot \varepsilon E_n dS.$$

Nach unseren Voraussetzungen ist rechts jedes Summenglied gleich Null; demnach: $E = 0$ in ganz τ. —

Specialfälle erhalten wir, wenn entweder S_1 oder S_2 die ganze Oberfläche ausmacht. Insbesondere ergiebt sich also:

Um sicher zu sein, dass für eine bestimmte Elektricitätsvertheilung das Potential im ganzen Volumen eines Leiters, wie Gleichung (D) fordert, constant sei, braucht man nur nachzuweisen, dass es auf seiner ganzen Oberfläche constant ist.

Wir wollen den Beweis von g) nochmals mit Hülfe des Kraftlinien-Begriffs führen. Unsere Voraussetzungen bedeuten: 1) in τ befinden sich keine Endpunkte von Kraftlinien. Also, da in sich zurücklaufende Kraftlinien nicht existiren, muss eine jede mindestens zweimal die Oberfläche durchsetzen. 2) durch S_1 treten aber keine Kraftlinien. Also muss eine jede zweimal durch S_2 treten. Das aber ist ausgeschlossen; denn jede Kraftlinie führt von Stellen höheren zu Stellen niederen Potentials, und 3) alle Punkte von S_2 haben gleiches Potential. Folglich existiren keine Kraftlinien in τ.

Aus g) folgt in bekannter Weise:

h) Das Feld in einem beliebigen Raum τ ist eindeutig bestimmt, wenn gegeben ist

1) die Elektricitätsvertheilung im Innern, und 2) auf jedem Stück der Oberfläche entweder die Normalcomponente von E, oder φ bis auf eine additive Constante.

Insbesondere also: α) es ist bestimmt durch die Endpunkte der Kraftlinien im Innern und die Eintrittsstellen der Kraftlinien an der Oberfläche. — β) es ist bestimmt, sobald die $\Gamma(\varepsilon E)$ im Innern und die Tangentialcomponenten E_S auf der ganzen, zusammenhängenden Oberfläche gegeben sind.

Wir wollen eine Anwendung des Satzes b) machen. Wenn ε überall den constanten Werth 1 hat, und Elektricität mit gleichförmiger Dichte 1 den Raum τ erfüllt, so hat das Potential φ den Werth:

$$g = \int \frac{d\tau}{4\pi r}, \tag{19}$$

welchen wir das „Newton'sche Potential des Raumes τ" nennen wollen.

Sei τ das Volumen eines Ellipsoids; nehmen wir die Hauptaxen zu Coordinatenaxen, so hat die Oberfläche S von τ die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{20}$$

Die Aufgabe, das „Potential des homogenen Ellipsoids" zu finden, ist auf sehr mühsamem Wege gelöst worden.

Nachdem die Lösung aber gefunden ist, können wir sie mit Hülfe unseres Satzes leicht verificiren. Sie lautet:

$$\text{in } \tau: \; \varphi (\equiv \varphi_i) = \Phi - \tfrac{1}{2}[Ax^2 + By^2 + Cz^2] \tag{21}$$

$$\text{ausserhalb } \tau: \; \varphi (\equiv \varphi_a) = \Phi' - \tfrac{1}{2}[A'x^2 + B'y^2 + C'z^2], \tag{22}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= \tfrac{1}{4} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} \\
A &= \tfrac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D}, \quad B = \tfrac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda) D}, \\
C &= \tfrac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda) D}, \\
D &= \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und wo Φ', A', B', C' diejenigen Grössen sind, in welche sich Φ, A, B, C verwandeln, wenn an Stelle von 0 als untere Grenze der Integrale der Werth u tritt, welcher die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \tag{24}$$

bildet.

Wir haben nach dem Satze b) bewiesen, dass $\varphi = g$ ist, wenn wir zeigen, dass

1) φ endlich und stetig ist im ganzen Raum,
2) die Derivirten von φ endlich und stetig sind im ganzen Raum,
3) φR endlich bleibt, wenn $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ unendlich wird;
4) $\triangle\varphi = -1$ in τ, $\triangle\varphi = 0$ ausserhalb τ.

Zu 1): u in (24) ist der Parameter des zum Ellipsoid (20) confocalen Ellipsoids, welches durch den Punkt (x, y, z) geht; u ist demnach stetige Function von x, y, z. Φ', A', B', C' sind wiederum endliche und stetige Functionen der unteren Grenze ihrer Integrale. Also ist φ_a endliche und stetige Function von x, y, z. — Φ, A, B, C, sind Constanten; also ist φ_i ganze (quadratische) und somit endliche, stetige Function von x, y, z. — Auf S ist $u = 0$, also $\Phi' = \Phi$, $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$; folglich geht dort φ_i stetig in φ_a über. —

Zu 2): Es ist

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial x} = -A'x + \frac{\partial\Phi'}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial A'}{\partial x} + y^2\frac{\partial B'}{\partial x} + z^2\frac{\partial C'}{\partial x}\right]$$

$$= -A'x + \frac{1}{4}\,abc\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{1}{D'}\left\{-1 + \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}\right\},$$

$$\text{wo } D' = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}.$$

Folglich nach (24):

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial x} = -A'x.$$

Andererseits

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = -A\,x.$$

$\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}$ sind also endliche, stetig veränderliche Grössen, welche an S stetig in einander übergehen.

Zu 3): In den Integralen in φ_a durchläuft λ die Werthe zwischen u und ∞; also nach (24)

$$1 - \left[\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right]$$

die Werthe zwischen 0 und 1.

Demnach ist

$$\varphi_a < \tfrac{1}{2}\, abc \int_u^\infty \frac{d\lambda}{D}.$$

Sei nun $a > b > c$, so ist $D > (c^2 + \lambda)^{3/2}$, folglich

$$\varphi_a < \tfrac{1}{2}\, abc \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)^{3/2}}$$

$$\varphi_a < \tfrac{1}{2}\, abc \, \frac{1}{\sqrt{c^2+u}}.$$

Weiter ist nach (24):

$$x^2 + y^2 + z^2 < a^2 + u;$$

also

$$R < \sqrt{a^2+u}.$$

Somit

$$R\varphi_a < \tfrac{1}{2}\, abc \sqrt{\frac{a^2+u}{c^2+u}}.$$

Rückt nun der Punkt (x, y, z) in's unendliche, so wird nach (24):

$$u = \infty, \text{ und } \sqrt{\frac{a^2+u}{c^2+u}} = 1, \text{ also}$$

$$R\varphi_a < \tfrac{1}{2}\, abc, \text{ d. h. endlich.}$$

Zu 4): es ist

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = -A; \text{ also}$$

$$-\triangle\varphi_i = A + B + C = \tfrac{1}{2}\, abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} \cdot \frac{2}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda} = -abc\left[\frac{1}{D}\right]_{\lambda=0}^{\infty} = 1.$$

Ferner

$$\frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x^2} = -A' - x\,\frac{\partial A'}{\partial x} = -A' + \tfrac{1}{2}\,\frac{abc}{D'}\,\frac{x}{a^2+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Folglich

$$\triangle\varphi_a = -(A' + B' + C')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{abc}{D'}\left\{\frac{x}{a^2+u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u}\,\frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Aus (24) folgt:

$$\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]du$$
$$=\frac{2x}{a^2+u}\,dx+\frac{2y}{b^2+u}\,dy+\frac{2z}{c^2+u}\,dz$$

und daher für den Ausdruck in $\{\}$ der Werth 2; andererseits ist

$$A'+B'+C'=-abc\left[\frac{1}{D}\right]_{\lambda=u}^{\infty}=+\frac{abc}{D'}.$$

Also

$$\triangle\varphi_a=0.$$

Für spätere Anwendungen sind die Eigenschaften der Constanten A, B, C wichtig; sie sind nach den Ausdrücken stets positiv, und, wie soeben gezeigt,

$$A+B+C=1.$$

Ist ferner $a>b>c$, so ist $A<B<C$.

Setzt man

$$\lambda=a^2t,$$

so folgt

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+t)\left(1+\frac{a^2}{b^2}t\right)\left(1+\frac{a^2}{c^2}t\right)}}.$$

Die Werthe von A, B, C hängen also nur von den Axenverhältnissen des Ellipsoids ab.

A erhält seinen Maximalwerth 1, wenn a gegen b und c verschwindend klein ist; denn dann wird

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)^{3/2}}=1.$$

A erhält seinen Minimalwerth 0, wenn a gegen b oder c, oder gegen beide unendlich gross ist.

Sind die drei Axen a, b, c ungleich, so sind A, B, C elliptische Integrale.

Physikalisches Interesse haben vorwiegend die Werthe, welche sie für specielle Formen des Ellipsoids annehmen.

Es sei ein abgeflachtes Rotationsellipsoid; setzen wir dann

$$a = b = \frac{c}{\sqrt{1-e^2}}, \text{ so wird}$$

$$\left.\begin{aligned} A = B &= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2}\right] \\ C &= \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Es sei ein verlängertes Rotationsellipsoid (Ovoid); setzen wir dann

$$b = c = \sqrt{1-e^2}\cdot a, \text{ so wird}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1-e^2}{e^2}\left(\frac{1}{2e}\lg\frac{1+e}{1-e} - 1\right) \\ B = C &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3}\lg\frac{1+e}{1-e}\right) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Ist endlich das Ellipsoid eine Kugel, so wird

$$A = B = C = \tfrac{1}{3}. \tag{27}$$

Man findet ferner in diesem Fall ohne Mühe:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}a^2,\ A' = B' = C' = \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{R^3},\ \Phi' = \tfrac{1}{2}\frac{a^3}{R},$$

wo a der Radius der Kugel. Also

$$\left.\begin{aligned} \text{in der Kugel: } g &= \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}R^2 \\ \text{ausserhalb der Kugel: } g &= \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Diese Resultate sind natürlich sehr viel einfacher auf directem Wege zu erhalten.

Die bisher abgeleiteten Sätze waren Folgerungen aus den Grundgleichungen (A) (B) (C).

Wir ziehen nunmehr auch den Werth der Energie in Betracht.

In demselben Raum τ, der ein vollständiges Feld erfülle, seien bei gleicher Vertheilung der Materie drei verschiedene Elektricitätsvertheilungen gegeben: die der e_1, der e_2 der $e_1 + e_2$. Die Feldintensitäten und Potentiale seien im ersten

Fall E_1, φ_1, im zweiten Fall E_2, φ_2; dann ist nach dem Satz d) S. 46 im dritten Fall das Potential $\varphi_1 + \varphi_2$. Die Werthe der Energie für die Theilfelder und für das Gesammtfeld sind demnach:

$$W_{e1} = \tfrac{1}{2} \Sigma e_1 \cdot \varphi_1$$
$$W_{e2} = \tfrac{1}{2} \Sigma e_2 \cdot \varphi_2$$
$$W_e = \tfrac{1}{2} \Sigma (e_1 + e_2) \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$= W_{e1} + W_{e2} + R,$$

wo $$R = \tfrac{1}{2} \Sigma e_2 \cdot \varphi_1 + \tfrac{1}{2} \Sigma e_1 \cdot \varphi_2$$

ist, und die „wechselseitige Energie" der beiden Systeme der e_1 und der e_2 heissen soll.

Man setze nun in (12) S. 28 einmal: $U = \varphi_1$, $A = \varepsilon E_2$, und zum andern: $U = \varphi_2$, $A = \varepsilon E_1$; dann kommt:

$$\int_\tau \varepsilon (E_{1x} \cdot E_{2x} + E_{1y} \cdot E_{2y} + E_{1z} \cdot E_{2z})\, d\tau = \Sigma e_2 \cdot \varphi_1 = \Sigma e_1 \cdot \varphi_2 .$$

Also folgt die Energie des combinirten Systems:

$$\left.\begin{aligned} W_e &= W_{e1} + W_{e2} + R, \text{ wo} \\ R &= \Sigma e_2 \cdot \varphi_1 = \Sigma e_1 \cdot \varphi_2 = \int_\tau \varepsilon (E_{1x} \cdot E_{2x} + E_{1y} \cdot E_{2y} \\ &\qquad + E_{1z} \cdot E_{2z})\, d\tau . \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Besteht zunächst das System der e_1 aus einer Elektricitätsmenge Eins im Punkte p_1, das System der e_2 aus einer Elektricitätsmenge Eins im Punkte p_2, so giebt die zweite Gleichung:

$$\varphi_2 (p_1) = \varphi_1 (p_2), \quad (30)$$

d. h. das Potential der ersten am Ort der zweiten ist gleich dem Potential der zweiten am Ort der ersten Menge.

Nach Gleichung (18) S. 47 ist φ_2 eine lineare homogene Function aller e_2; wenn also die e_2 in endlicher Zahl und sehr klein angenommen werden, so werden die φ_2 und R klein von gleicher Ordnung, W_{e2} aber klein von der Ordnung der $e_2{}^2$. Es wird demnach bis auf kleine Grössen höherer Ordnung:

$$W_e - W_{e1} = R.$$

Bestehe speciell das System der e_2 aus der unendlich kleinen Elektricitätsmenge de_k eines Volumelements oder

eines Leiters, dann reducirt sich R auf das eine Glied: $\varphi_k \cdot de_k$, und $W_e - W_{e1}$ wird gleichbedeutend mit $\frac{\partial W_e}{\partial e_k} \cdot de_k$. Also

$$\varphi_k = \frac{\partial W_e}{\partial e_k}. \tag{31}$$

Aus der Ableitung folgt: das Potential eines Systems e im Punkte p ist numerisch gleich der wechselseitigen Energie des Systems der e und einer in p befindlichen, unendlich kleinen, Elektricitätsmenge Eins. — Gleichung (31) aber lautet in Worten:

Das Potential eines Punktes (eines Leiters) ist numerisch gleich der Vermehrung, welche die elektrische Energie erfährt, wenn diesem Punkt (diesem Leiter) die unendlich kleine Elektricitätsmenge Eins zugeführt wird, während alle übrigen Elektricitätsmengen constant bleiben; — oder

gleich der Energie, welche das System abgiebt, wenn die Elektricitätsmenge Eins dem Punkt (dem Leiter) entzogen wird.

Es folgt weiter: wenn die Elektricitätsmenge de vom Punkte p nach p' gebracht wird, so ist die abgegebene Energie

$$-\delta W_e = de\left(\varphi(p) - \varphi(p')\right) = -de \cdot \delta\varphi(p). \tag{7'}$$

Ist p' von p um die unendlich kleine Strecke dl entfernt, so wird diese Grösse

$$-de\,\frac{\partial \varphi}{\partial l}\,dl = de \cdot E_l \cdot dl.$$

Der übliche Ausdruck hierfür ist: Auf die Elektricitätsmenge de wirkt eine „Kraft“, deren Componente nach der Richtung l

$$E_l \cdot de \text{ ist.}$$

Die Bedeutung von φ und von E bleibt also auch unter den jetzigen allgemeineren Voraussetzungen in Uebereinstimmung mit der einen Gruppe von Definitionen, die wir für diese Grössen ursprünglich erhielten (vgl. S. 14). Dass wir die bewegte Elektricitätsmenge unendlich klein nehmen müssen, entspricht der dort gemachten Voraussetzung, dass diese Menge bei der Berechnung von φ und E nicht mit berücksichtigt werden sollte. — Folgendes aber ist zu be-

achten: wir mussten bei unserer jetzigen Ableitung voraussetzen, dass nur die Elektricitätsvertheilung sich ändere, die materielle Erfüllung des Raumes aber, die Vertheilung des ε, unverändert bleibe. Das ist durch eine Verschiebung der Elektricitätsmenge mit ihrem Träger nur dann zu erreichen, wenn im Bereich der Verschiebungen das Dielektricum homogen (von constantem ε) ist. Nur in diesem Fall also ist die sogenannte „Kraft auf die Elektricitätsmenge Eins" auch die mechanische Kraft, die auf den Träger dieser Elektricitätsmenge wirkt. — Den allgemein gültigen Ausdruck für die mechanischen Kräfte in einem gegebenen Felde werden wir später finden (s. § 11).

§ 8. Systeme von Leitern. Lineare Gleichungen zwischen Potentialen und Elektricitätsmengen.

Wir wollen nun eine beschränkende Voraussetzung machen, welche aber den Bedingungen aller genauen messenden Versuche entspricht: Es sei ein beliebiges System von Leitern in beliebige Dielektrica eingebettet; Elektricität aber befinde sich nur auf der Oberfläche der Leiter, nicht im Innern des Dielektricums. Der Raum τ, den wir betrachten, bilde ein vollständiges Feld. Die Potentiale der n einzelnen Leiter, — unter denen, falls eine solche vorhanden, die leitende Hülle nicht mitzählt, — seien

$$V_1 \quad V_2 \quad \ldots \quad V_n; \text{ ihre Elektricitätsmengen}$$
$$e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n.$$

Dann ist nach Gleichung (18) S. 47 das Potential φ jedes Punktes eine lineare, homogene Function der e_i, deren Zahl in unserm Fall endlich, nämlich $= n$ ist. Das gleiche gilt von den V_i, welche ja specielle Werthe von φ sind. Wir wollen die letzteren Functionen schreiben:

$$V_i = \beta_{i1}\, e_1 + \beta_{i2}\, e_2 + \ldots + \beta_{in}\, e_n. \tag{32}$$

Die Constanten β_{ik} sind bestimmt durch Gestalt und gegenseitige Lage der Leiter, und durch die Werthe der Dielektricitäts-Constante im Zwischenraum; — einfacher: durch Gestalt und physikalische Beschaffenheit des Dielektricums.

Denken wir uns die Gleichungen (32) nach den e_k aufgelöst, so erhalten wir Gleichungen der folgenden Form:

$$e_k = \alpha_{1k} V_1 + \alpha_{2k} V_2 + \ldots + \alpha_{nk} V_n, \tag{33}$$

wo sich die α_{ik} in bekannter Weise durch die β_{ik} ausdrücken.

Die n^2 Constanten β sind nicht alle von einander unabhängig; vielmehr ist allgemein

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}. \tag{34}$$

Denn es ist nach (32) und (31)

$$\beta_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial e_k} = \frac{\partial}{\partial e_k}\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_i}\right)$$

$$\text{und } \beta_{ki} = \frac{\partial V_k}{\partial e_i} = \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_k}\right).$$

Die Determinante der β_{ik} ist also symmetrisch, folglich ist gemäss den Gleichungen, welche die e als Lösungen von (32) ergeben, auch

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{35}$$

Man nennt die Grössen β „Potential-Coefficienten"; ein Coefficient α_{ik}, dessen Indices verschieden sind, heisst „wechselseitiger (elektrostatischer) Inductionscoefficient" der Leiter i und k; ein Coefficient α_{ii} heisst elektrostatische „Capacität" des Leiters i. Die Capacität eines Leiters ist demnach numerisch gleich der Elektricitätsmenge, welche er besitzt, wenn sein Potential gleich Eins, das aller übrigen Leiter gleich Null ist. Der Werth dieser Capacität hängt (ebenso wie die Werthe der übrigen α und der β) nicht nur von der Gestalt des Leiters i, sondern im allgemeinen auch von Gestalt und Lage aller übrigen Leiter ab. Er ist unabhängig vom Material des Leiters, dagegen abhängig vom Material des Dielektricums. —

Der Ausdruck für die Energie des Raumes τ in (15a) S. 37 nimmt in unserem Falle die Form an:

$$W_e = \tfrac{1}{2} \Sigma e_i V_i. \tag{36}$$

Unter Benutzung von (32) bis (35) können wir dafür auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} W_e = \tfrac{1}{2}\beta_{11}\, e_1^{\,2} \;&+ \beta_{12}\, e_1\, e_2 + \,.\,.\, + \beta_{1n}\, e_1\, e_n \\ &+ \tfrac{1}{2}\beta_{22}\, e_2^{\,2} + \,.\,.\, + \beta_{2n}\, e_2\, e_n \\ &\quad - \quad - \quad - \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\beta_{nn}\, e_n^{\,2} \end{aligned}\right\} \quad (36')$$

oder

$$\left.\begin{aligned} W_e = \tfrac{1}{2}\alpha_{11}\, V_1^{\,2} &+ \alpha_{12}\, V_1\, V_2 + \,.\,.\, + \alpha_{1n}\, V_1\, V_n \\ &+ \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\, V_2^{\,2} + \,.\,.\, + \alpha_{2n}\, V_2\, V_n \\ &\quad - \quad - \quad - \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\alpha_{nn}\, V_n^{\,2} \end{aligned}\right\} \quad (36'')$$

Wir fragen noch nach der Arbeit, welche bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung und Deformation der Leiter geleistet wird. Wenn in einem vollständigen Felde τ eine beliebige Veränderung in der Anordnung der Elektricität und der Materie stattfindet, so ändert sich nach § 7 *e*) und *f*) [S. 47f.] das elektrische Feld nur innerhalb τ; die gesammte Aenderung der elektrischen Energie beschränkt sich folglich auf die Aenderung der Grösse $W_e = \frac{1}{2}\int\limits_\tau \varepsilon\, E^2 d\tau$, deren Ausdruck wir soeben gebildet haben. Die Abnahme der Energie setzt sich nun in mechanische Arbeit jedesmal dann vollständig um, wenn bei der Verschiebung das elektrische Gleichgewicht gewahrt bleibt. Demnach fragt sich zunächst, ob und in welcher Weise dieser Bedingung genügt werden kann. Wenn die Leiter isolirt von einander, also mit unveränderlichen e, unendlich wenig verschoben oder deformirt werden, so würden, wenn wir uns die Elektricität zunächst auf den einzelnen Oberflächenelementen fixirt denken, die Potentiale unendlich wenig verändert, und somit auch die Potentiale der einzelnen Punkte des gleichen Leiters im allgemeinen unendlich wenig von einander verschieden werden. Die Bedingungen des Gleichgewichts wären also verletzt. Es stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand her, in welchem die Dichte der Elektricität unendlich wenig geändert ist. Dies geschieht durch einen als elektrische Strömung bezeichneten Vorgang, bei dem unendlich kleine Elektricitätsmengen de zu Stellen von unendlich wenig (um $d\varphi$) abweichendem Potential gelangen. Der Vorgang ist also mit einem Energieumsatz verknüpft, welcher unendlich klein ist von der Ord-

nung der $de \cdot d\varphi$. Dieser Energiebetrag tritt nicht als mechanische Arbeit, sondern, wie wir später in Kap. II sehen werden, im allgemeinsten Fall als Wärme und chemische Energie auf. Er ist aber nur ein verschwindend kleiner Bruchtheil der gesammten Energieänderung, welche unendlich klein von der Ordnung der $e \cdot d\varphi$ ist. Daher kann die bei der unendlich kleinen Verschiebung geleistete Arbeit aus der Abnahme berechnet werden, welche W_e bei constant gehaltenen e_i durch die Verschiebung erleidet. Also nach (36'):

$$\partial A = -\,[\tfrac{1}{2} e_1^{\,2}\, d\beta_{11} + e_1\, e_2\, d\beta_{12} + \cdot\cdot\,] \qquad (37')$$

Wir können für die Grösse auf der rechten Seite einen anderen Ausdruck herstellen. Sie ist

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_i e_i \sum_k e_k\, d\beta_{ik} \qquad \text{nach (34),}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_i e_i\, [d V_i - \sum_k \beta_{ik}\, de_k] \qquad \text{nach (32),}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_i d V_i \sum_k \alpha_{ik}\, V_k + \tfrac{1}{2} \sum_k de_k \sum_i e_i \beta_{ki} \qquad \text{nach (33) (34) (35),}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_k V_k\, [- \sum_i \alpha_{ik}\, d V_i + de_k] \qquad \text{nach (32),}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_k V_k \sum_i V_i\, d\alpha_{ik} \qquad \text{nach (33).}$$

Also ist auch

$$\partial A = +\,[\tfrac{1}{2} V_1^{\,2} d\alpha_{11} + V_1\, V_2\, d\alpha_{12} + \cdot\cdot\,] \qquad (37'')$$

Die beiden Werthe von ∂A in (37') und (37'') sind einander unter allen Umständen gleich. Der eine wie der andere giebt die Arbeit an, welche die mechanischen Kräfte elektrischen Ursprungs bei einer Configurationsänderung leisten, die entweder durch die Aenderungen $d\beta_{ik}$ der Parameter β_{ik} oder gleichwerthig durch die Aenderungen $d\alpha_{ik}$ der Parameter α_{ik} charakterisirt wird. Sobald man im Stande ist, für ein gegebenes Leitersystem den Werth von ∂A zu berechnen, welcher einer bestimmten virtuellen Configurationsänderung entspricht, kennt man aber auch die Kräfte, welche eben diese Aenderung hervorzubringen suchen. Ueber die Anwendung des einen oder anderen Ausdruckes für ∂A entscheidet nur der rechnerische Vortheil.

Eine andere Darstellung der Kräfte, welche auf die Leiter wirken, werden wir später kennen lernen. Wir werden finden, dass sie sich zusammensetzen lassen aus Elementarkräften,

welche an den einzelnen Oberflächenelementen dS der Leiter angreifen, normal nach aussen gerichtet sind, und die Grösse haben

$$\tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 \cdot dS.$$

§ 9. Eigenschaften der Coefficienten.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen zeigen, dass jedes specielle Feld der gegenwärtig von uns betrachteten Art völlig durch die Werthe der α und β charakterisirt wird. Wir wollen jetzt einige allgemeine Eigenschaften dieser Coefficienten ableiten. Wir wollen das thun mit Hülfe des Begriffs der Kraftlinien. Die Vertheilung der Kraftlinien ist entwickelt als Folgerung aus den Gleichungen (A) (C) (D); was aus dieser Vertheilung folgt, ist ebenso streng bewiesen, wie eine rein rechnerische Deduction aus jenen Gleichungen.

In unserem jetzigen Fall kommen Endpunkte von Kraftlinien im Dielektricum nicht vor. Indem wir in der positiven Richtung der Kraftlinie fortschreiten, gelangen wir zu immer kleineren Potentialwerthen; keine Kraftlinie kann folglich zwei Punkte des gleichen Leiters verbinden, keine in einen Leiter eindringen. Jede Kraftlinie spannt sich also entweder zwischen den Oberflächen zweier Leiter aus, oder sie verbindet einen Leiter mit der Grenze des Feldes, (die auch unendlich fern liegen kann).

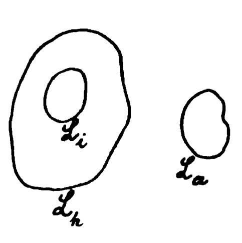


Fig. 9.

Am Ursprung (der Mündung) jeder Kraftlinie befindet sich eine positive (negative) Elektricitätseinheit. Auf einem nicht geladenen Leiter enden im allgemeinen auch Kraftlinien; aber es entspringen dort nothwendig ebensoviele, wie dort münden.

Möge zunächst der Leiter L_h gewisse Leiter L_i umhüllen, während er andere Leiter L_a ausschliesst. (Vgl. Fig. 9.) Wenn dann alle $e_i = 0$ sind, so existirt innerhalb L_h kein Feld, es sind also alle $V_i = V_h$, welches auch die Werthe von e_h und der e_a sein mögen. Das heisst nach (32): es ist unter diesen Verhältnissen

$$\beta_{ih} = \beta_{hh} \text{ und } \beta_{ia} = \beta_{ha}.$$

In Worten: Die Potentialcoefficienten leitend umhüllter Leiter bezüglich aller äusseren Leiter (und auch bezüglich der Hülle selbst) sind den entsprechenden Potentialcoefficienten der Hülle gleich. —

Umgekehrt: Wenn die sämmtlichen Potentiale $V_i = V_h$ sind, so können innerhalb L_h keine Kraftlinien verlaufen, da sie nicht Punkte gleichen Potentials verbinden können. Es ist also jedes $e_i = 0$, wenn V_h und alle V_i gleichzeitig $= 0$ sind, welches auch die Werthe der V_a sein mögen. Oder nach (33): $\alpha_{ia} = 0$. In Worten: Der wechselseitige Inductionscoefficient von zwei Leitern, welche durch einen dritten getrennt sind, ist stets $= 0$.

In dem soeben betrachteten Fall zerfiel unser Feld in mehrere getrennte Räume. Der Einfachheit wegen setzen wir von jetzt an voraus, dass keiner der n Leiter einen anderen umschliesst, dass wir es also mit einem einzigen zusammenhängenden Felde zu thun haben. Dieses kann sich in's unendliche erstrecken, oder an einer leitenden Hülle endigen.

Es möge nun der Leiter L_r das Potential $V_r = 1$, alle übrigen das Potential Null (d. h., gemäss der Definition, das gleiche Potential wie die äussere Grenze des Feldes) haben. Dann können auf L_r nur Kraftlinien entspringen, keine münden. Denn an allen Stellen, wo sich der zweite Endpunkt befinden kann, ist das Potential kleiner als V_r. Diese Kraftlinien münden zum Theil auf den übrigen Leitern, zum Theil in der Grenze. Zwischen den übrigen Leitern, oder zwischen einem von ihnen und einem Punkt der Grenze kann sich keine Kraftlinie ausspannen; denn alle diese Stellen haben das gleiche Potential. Das heisst: wenn $V_r = 1$, und alle übrigen $(V_a) = 0$, so ist e_r positiv, alle e_a sind negativ und $e_r > -\Sigma e_a$.

Das giebt nach (33) den folgenden Satz für die Coefficienten α:

1) Es ist allgemein $\alpha_{rr} > 0$, $\alpha_{ra} < 0$ und $\alpha_{rr} > -\Sigma\alpha_{ra}$.

Es sei ferner dem Leiter L_r die Elektricitätsmenge $e_r = 1$ mitgetheilt, jedem der übrigen die Menge Null. Ein beliebiger

dieser Leiter heisse L_a. Die Potentiale aller derjenigen Orte, wo Kraftlinien endigen, sind

$$V_r, \text{ die } V_a, 0.$$

Von diesen kann kein V_a grösser (oder kleiner) sein, als alle übrigen Grössen der Reihe. Denn dann könnten auf L_a Kraftlinien lediglich entspringen (münden), aber nicht münden (entspringen); dann wäre also e_a positiv (negativ), während es Null sein soll. Es kann ferner V_r nicht die kleinste der obigen Grössen sein; denn dann wäre e_r negativ, während es positiv sein soll. Die Reihenfolge kann also nur sein, vom grössten Werth angefangen:

$$V_r, \text{ die } V_a, 0.$$

Es folgt somit nach (32) für die Coefficienten β:

2) Jedes β ist positiv und es ist stets $\beta_{rr} > \beta_{ar}$.

Es besitze ein Leiter die Elektricitätsmenge e_1, alle übrigen Leiter die Menge Null. Die Energie ist dann

$$W_e = \tfrac{1}{2} \beta_{11} e_1^2.$$

Nun denke man sich die Materie in einem beliebigen Raum τ leitend gemacht, ohne dass jedoch diesem neuen Leiter Elektricität mitgetheilt würde. Die Energie hat auch jetzt die Form:

$$W_e' = \tfrac{1}{2} \beta_{11}' e_1^2.$$

Dadurch, dass der Raum τ leitend gemacht wurde, ist dem System eine neue Bedingung auferlegt, nämlich, dass $E = 0$ sei in τ. War das bereits der Fall, solange τ nicht leitend war, so sind auch unter den neuen Verhältnissen alle Bedingungen für das elektrostatische Feld erfüllt; das Feld bleibt also unverändert und folglich ist auch $W_e' = W_e$. War in τ nicht durchweg $E = 0$, so stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand her durch einen Strömungsvorgang. Bei diesem wird Wärme entwickelt und um den Arbeitswerth dieser Wärme vermindert sich die Energie. Allgemein also ist

$$W_e' \leqq W_e \text{ und folglich } \beta_{11}' \leqq \beta_{11}. \text{ — Also:}$$

3) Wenn ein neuer Leiter in das Feld eingeführt wird, so vermindern sich für alle vorhandenen Leiter die Potentialcoefficienten vom Typus β_{ii}. Sie bleiben constant nur dann,

wenn der neue Leiter einen Raum einnimmt, in dem kein Feld vorhanden war.

Der Satz 3) gilt a fortiori, wenn der neue Leiter mit einem der vorhandenen leitend verbunden wird. Also

4) Alle β_{ii} vermindern sich, wenn ein Leiter L_k vergrössert wird. Unter Vergrösserung ist aber gemäss dem zweiten Theil des Satzes 3) nur ein Zuwachs in das Feld hinein zu verstehen. Die β_{ii} ändern sich nicht, wenn ein Hohlraum von L_k, in dem sich keine anderen geladenen Leiter befinden, ganz oder theilweise leitend ausgefüllt wird.

Die Abnahme von β_{ii} lässt sich in einem besonderen Fall in anschaulicher Form darstellen:

Der Satz gilt speciell auch für $i = k$. L_i allein habe eine von Null verschiedene Elektricitätsmenge e_i. Dann befinden sich, wie unter 2) gezeigt, die Extremwerthe des Potentials einerseits auf L_i, andererseits an den Grenzen des Feldes. Alle Aequipotentialflächen umhüllen L_i. Man greife eine beliebige derselben, S, heraus, welche das Feld in den inneren und äusseren Raum, τ_i und τ_a, zerlegen möge. Vergrössert man, bei unverändertem e_i, L_i bis zu S, so bleibt das Feld in τ_a unverändert, in τ_i wird es Null. Dieses neue Feld nämlich genügt allen Bedingungen, da es von S aus: e_i Kraftlinien normal nach aussen sendet, innerhalb S Null ist, und ausserhalb dieselben Bedingungen befriedigen muss und befriedigt, wie das frühere Feld. Die Energie war:

$$\tfrac{1}{2}\beta_{ii} e_i^2 = \tfrac{1}{2}\int\limits_{\tau_i+\tau_a} \varepsilon E^2 d\tau.$$ Sie ist jetzt nur noch

$$\tfrac{1}{2}\beta_{ii}' e_i^2 = \tfrac{1}{2}\int\limits_{\tau_a} \varepsilon E^2 d\tau.$$

Es umfasse nun das Feld den ganzen unendlichen Raum. Zieht man dann von einem Punkt p innerhalb des ursprünglich von L_i eingenommenen Raumes radii vectores r, nennt R den kleinsten Werth von r an S, und $[\varepsilon E^2]$ den mittleren der Werthe, welche εE^2 in dem ursprünglichen Felde auf der Kugelfläche vom Radius r besass, so ist $\tfrac{1}{2}\int_R^\infty [\varepsilon E^2]\, 4\pi r^2 dr$ die

Energie des Raumes ausserhalb der Kugel vom Radius R, $\frac{1}{2}\beta_{ii}' e_i^2$ aber die Energie ausserhalb S, — und folglich, da die Kugel ganz innerhalb S liegt:

$$\tfrac{1}{2}\beta_{ii}' e_i^2 < \tfrac{1}{2}\int_R^\infty [\varepsilon E^2]\, 4\pi r^2\, dr.$$

Nimmt nun R unbegrenzt zu, so wird im Integrationsgebiet $E = 0$ wie $\frac{1}{r^2}$, und folglich das Integral $= 0$ wie $\frac{1}{R}$. Das gleiche gilt für β_{ii}'.

Wählt man als neue Oberfläche des Leiters eine beliebige Fläche S_1, welche S umschliesst, so wird β_{ii} weiter verkleinert.

Also folgt:

5) Wenn alle linearen Dimensionen eines Leiters L_i unbegrenzt wachsen, so wird der Coefficient β_{ii} verschwindend klein von der Ordnung des Reciproken dieser Dimensionen. Das gleiche gilt dann nach 2) von den Coefficienten β_{ik}.

Nun ist

$$V_i = \beta_{i1} e_1 + \beta_{i2} e_2 + \ldots$$

Also wird das Potential eines unendlich grossen Leiters durch endliche Elektricitätsmengen nur unendlich wenig geändert.

Es ist ferner

$$V_k = \beta_{ki} e_i + \beta_{k1} e_1 + \ldots$$

Also wird das Potential eines beliebigen Leiters nur unendlich wenig geändert, wenn einem unendlich grossen Leiter endliche Elektricitätsmengen zugeführt werden.

Unendlich gross ist gegenüber den Dimensionen unserer Versuchskörper die Erde. Es wird daher erstens ihr Potential durch unsere Versuche nicht geändert, — und zweitens sind die Elektricitätsmengen, die wir der Erde zuführen, für unsere Wahrnehmung verschwunden. Von beiden Eigenschaften macht man Gebrauch, wenn man einen Körper leitend mit der Erde verbindet.

Man denke sich die Dimensionen aller Körper des Feldes, der Leiter und der Dielektrica, in der Weise vergrössert, dass

sie sich geometrisch ähnlich bleiben. Dabei mögen die Potentiale der Leiter $V_1 \,..\, V_n$ unverändert bleiben. Durch diese ist das Feld in beiden Fällen bestimmt, und zwar offenbar so, dass allgemein φ in entsprechenden Punkten der beiden Räume gleiche Werthe hat. Die Elektricitätsmenge e eines Leiters ist

$$e = -\int_S \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial N} dS.$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ ändert sich umgekehrt proportional dem Verhältniss q der linearen Dimensionen, dS wie q^2, also e wie q. Aus (32) und (33) folgt also:

6) Die Coefficienten α ändern sich im directen, die Coefficienten β im umgekehrten Verhältniss der linearen Abmessungen, wenn das ganze Feld in gleichförmigem Massstabe vergrössert wird.

7) Es mögen die Leiter L_1 und L_2 einander sehr nahe sein, und sehr entfernt von den übrigen Leitern. Es möge ferner der Leiter L_1 das Potential 1 haben, alle übrigen Leiter das Potential 0; dann münden nahezu alle Kraftlinien, welche von L_1 ausgehen, auf L_2; d. h. es ist nahezu $e_2 = -e_1$. Das ergiebt aber nach (33):

$$\alpha_{12} = -\alpha_{11}. \quad \text{Ebenso folgt:}$$
$$\alpha_{12} = -\alpha_{22},$$

und daher bei beliebigen Potentialwerthen nahezu:

$$e_1 = \alpha_{11}(V_1 - V_2) = -e_2. \tag{38}$$

Eine solche Anordnung von zwei Leitern heisst ein „Condensator", und der gemeinsame Werth der drei Coefficienten α_{11}, $-\alpha_{12}$, α_{22} die „elektrostatische Capacität" des Condensators. Dieselbe ist nach (38) numerisch gleich der Elektricitätsmenge, welche einer der beiden Leiter besitzt, wenn sein Potential um die Einheit grösser ist, als das Potential des anderen Leiters.

Dies ist nach dem obigen im allgemeinen keine scharfe Definition. Es ist aber strenge

$$e_1 = \alpha_{11}(V_1 - V_2), \tag{39}$$

wenn L_1 (und kein anderer Leiter) von L_2 umhüllt wird. In diesem Fall soll der Condensator ein „geschlossener" und α_{11} seine Capacität heissen.

Es sei das Dielektricum des ganzen vollständigen Feldes homogen, also ε nicht abhängig von den Coordinaten. Dann genügt das Potential, da Elektricität sich nur auf den Leitern befinden soll, nach (8a) im ganzen Dielektricum der Gleichung

$$\triangle \varphi = 0$$

und durch diese Bedingung und die Werthe $\varphi = V_1 \, .. \, V_n$ an den Leiteroberflächen ist es vollständig bestimmt. Wenn also die V constant gehalten werden, so ändert sich φ nicht mit ε, und die e ändern sich folglich proportional mit ε. Das heisst:

8) Die α sind proportional ε, die β umgekehrt proportional ε, sofern ε im ganzen Felde den gleichen Werth hat.

Insbesondere ergiebt sich:

a) Die Capacität eines Condensators ist proportional der Dielektricitätsconstante seines Isolators. Dies gilt für einen geschlossenen Condensator, den der homogene Isolator vollständig ausfüllt, in Strenge, — und im allgemeinen Fall mit um so grösserer Annäherung, je grösser der Bruchtheil der Kraftlinien ist, welche in dem fraglichen Isolator verlaufen.

Die Werthe der α und β bestimmen ferner den Werth der Energie. Aus (37') und (37'') folgt im Falle eines homogenen Isolators:

b) die mechanischen Kräfte zwischen den Leitern sind bei gegebenen Elektricitätsmengen der Dielektricitätsconstante umgekehrt proportional; und

c) sie sind bei gegebenen Potentialwerthen der Dielektricitätsconstante direct proportional.

Der Satz a) enthält die Thatsache, an welcher Faraday den specifischen Einfluss verschiedener Isolatoren erkannt hat; — der Satz b) die Form, in welcher wir denselben zuerst in unsere Betrachtungen eingeführt haben.

Die Sätze a) und c) haben Messungsmethoden für die Verhältnisse von Dielektricitätsconstanten geliefert (s. im folgenden §).

§ 10. Beispiele. — Massmethoden.

Wir wollen nun für einige einfache und praktisch wichtige Fälle das Feld zwischen geladenen Leitern, d. h. im wesentlichen die Coefficienten α und β, bestimmen.

Die Aufgabe, welche zu lösen ist, lässt sich allgemein so formuliren: E berechnet sich gemäss

(a) $$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

wo φ folgenden Bedingungen genügen muss:

(b) im Dielektricum ist φ stetig und im allgemeinen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0;$$

(also im homogenen Dielektricum: $\triangle \varphi = 0$); wo ε sich unstetig ändert, ist

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} = 0.$$

(c) an jeder Leiteroberfläche: $\varphi =$ const. (Dieser constante Werth gilt dann auch für das Innere des Leiters.) Desgleichen für alle unendlich fernen Punkte: $\varphi =$ const.

(d) an jeder Leiteroberfläche S_i, — mit Ausschluss der äusseren Begrenzung des Feldes, falls ein geschlossenes Feld vorliegt —

$$-\int \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial N} dS_i = e_i ,$$

wo die e_i willkürlich gegebene Grössen.

1) Die Leiteroberflächen seien zwei concentrische Kugelflächen S_1 und S_2 mit den Radien r_1 und $r_2 > r_1$, den Potentialen V_1 und V_2. S_1 habe die (positive) Elektricitätsmenge e (auf S_2 befindet sich dann: $-e$). Der Zwischenraum τ sei von einem homogenen Dielektricum erfüllt. — Das Potential φ kann aus Symmetriegründen nur Function des Abstandes r vom Mittelpunkt sein. Eine rein rechnerische Behandlung der Aufgabe würde daher damit beginnen, die Gleichung $\triangle \varphi = 0$ in Polarcoordinaten auszudrücken. Wir benutzen statt dessen die geometrische Bedeutung der

Gleichung: von keinem Element des Dielektricums divergiren Kraftlinien. Unsere Kraftlinien sind radial nach aussen gerichtet und über jede einzelne der zu S_1 concentrischen Kugelflächen S mit gleichförmiger Dichte vertheilt. Also treten aus S heraus: $\mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} 4\pi r^2$ Kraftlinien, und $\mathfrak{Z}$ ist unabhängig von r. Das ist der Inhalt von (b) und (c); nach (d) aber ist dieser constante Werth gleich e.

Daraus folgt

$$E = E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \text{ wo } \varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon . r} + \text{const.};$$

da dieses φ auch den allgemeinen Bedingungen genügt, ist es die gesuchte Function.

Es folgt

$$V_1 - V_2 = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

und die Capacität des geschlossenen Condensators:

$$\alpha = \frac{e}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}. \tag{40}$$

Wird $r_2 = \infty$, so geht dieser Werth über in: $4\pi\varepsilon \cdot r_1$, welchen man als „Capacität der Kugel vom Radius r_1“ bezeichnet. Wir dürfen unsere Lösung auf diesen Fall anwenden, weil sie für $r = \infty$ ergiebt: φ — const. $= 0$ wie $\frac{1}{r}$, wie es gefordert ist. Der Fall ist nur eine mathematische Abstraction: bei Laboratoriumsversuchen münden die von der Kugel ausgehenden Kraftlinien spätestens auf den, als leitend zu betrachtenden, Zimmerwänden. Die obigen Formeln aber lehren, dass wir von der Existenz der leitenden Hülle absehen dürfen, sofern nur $\frac{r_2}{r_2 - r_1}$ der Einheit genügend nahe kommt.

2) S_1 und S_2 seien zwei coaxiale unendlich lange Cylinderflächen von den Radien r_1 und $r_2 > r_1$; die Elektricitätsmenge auf der Länge l von S_1 heisse e und sei positiv; ε sei constant im Zwischenraum τ. φ ist dann nur Function des normalen Abstandes r von der Cylinderaxe, also

$$E = E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ nur Function von } r;$$

durch jede beliebige, S_1 umhüllende Cylinderfläche S von beliebiger Basis und von der Länge l tritt — und dies ist der volle Inhalt der Gleichungen unter (b) und (d) — eine Anzahl Kraftlinien $= e$. Dies giebt insbesondere für einen zu S_1 coaxialen Kreiscylinder:

$$-\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} S = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} 2\pi r l = e.$$

Also
$$\varphi = -\frac{e}{l.2\pi\varepsilon} \lg r + \text{const.},$$

daraus

$$V_1 - V_2 = \frac{e}{l.2\pi\varepsilon} \lg \left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

und die Capacität der Länge l des Condensators

$$\alpha = \frac{e}{V_1 - V_2} = \frac{l.2\pi\varepsilon}{\lg r_2/r_1}. \qquad (41)$$

Für $r = \infty$ würde unser φ unendlich werden; wir müssen also nothwendig eine Grenzfläche S_2 im endlichen annehmen. Mit anderen Worten: die Lage der zweiten Grenzfläche ist stets wesentlich; es genügt nicht, — wie beim Kugelcondensator, — zu wissen, dass sie sehr entfernt ist. — Wir bemerken nochmals: in unserem Raume, in welchem $\varphi = -\frac{e}{l.2\pi\varepsilon} \lg r + \text{const.}$, ist für eine Cylinderfläche von der Höhe l und von beliebiger Basis: $\int \varepsilon E_N \, dS = \begin{cases} e \\ o \end{cases}$, je nachdem die Fläche die Axe der r einschliesst oder ausschliesst.

Im allgemeinen ist die Aufgabe, für eine gegebene Configuration der Leiter und Isolatoren das Feld zu finden, nicht direct lösbar. Ein Weg, auf welchem man Lösungen findet, ist aber dieser: man nimmt ein Feld E an, welches in einem gewissen Gebiet den allgemeinen Bedingungen und der Gleichung $\Gamma(\varepsilon E) = 0$ genügt. Von diesem Gebiet grenzt man einen Raum τ durch eine Anzahl von Aequipotentialflächen S_1 ($\varphi = V_1$), S_2 ($\varphi = V_2$) etc. ab. Die Flächen S_1, S_2 .. wählt man als Oberflächen von Leitern. Ein Feld, welches in τ mit E übereinstimmt, innerhalb der Leiter aber Null ist, genügt dann den allgemeinen Bedingungen und ertheilt den Leitern die Potentiale V_i und die Elektricitätsmengen $e_i = \int \varepsilon E_N \, dS_i$.

Es ist folglich — nach § 7, b) Zusatz S. 44 — **das Feld**, welches bei der gegebenen Configuration durch die V_i oder die e_i bestimmt ist.

So hätten wir **ausgehen** können von den Feldern

$$1)\qquad \varphi = \frac{a}{r} + \text{const.},\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$2)\qquad \varphi = - b \lg r + \text{const.},\ r^2 = x^2 + y^2,$$

welche beide der Gleichung $\triangle\varphi = 0$ genügen.

In 1) wäre der Punkt $r = 0$, in 2) die Linie $r = 0$ und das Gebiet $r = \infty$ auszuschliessen gewesen, weil dort φ unendlich wird. Als Leiteroberflächen hätten wir in 1) eine beliebige Anzahl concentrischer Kugeln, in 2) eine gerade Anzahl coaxialer Cylinder nehmen dürfen. Die oben behandelten Fälle sind jedesmal unter diesen möglichen die einfachsten.

3) Um weitere Lösungen zu erhalten, gehen wir von der Lösung $\varphi = - b \lg r$ aus. Wir superponiren diesem Felde ein zweites mit dem Potential: $+ b \lg r'$, wo r' den Abstand von einer zweiten, der ersten im Abstand 2a parallelen Axe bedeutet; d. h. wir betrachten ein Feld mit dem Potential

$$\varphi = b \lg \frac{r'}{r}.$$

Dieses Potential genügt den allgemeinen Bedingungen nicht in den beiden Axen, sonst aber im ganzen Raume, auch im unendlichen. Denn, wenn wir setzen

$$r' = r + \delta,$$

so ist δ numerisch stets $\leqq$ 2a; wenn aber r über alle Grenzen wächst, so wird

$$\lg \frac{r'}{r} = \lg\left(1 + \frac{\delta}{r}\right) = \frac{\delta}{r},$$

d. h. unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{r}$, wie es sein muss.

Es befriedigt ferner im ganzen Raume, ausser den Axen, die Gleichung $\triangle\varphi = 0$, da die Potentiale der beiden Theilfelder dies thun.

Eine Fläche constanten Potentials ist gegeben durch:

$$\frac{r'}{r} = c = \text{const.}$$

Nehmen wir als z-Axe die Mittelparallele zu den beiden Axen α_1 und α_2, und legen die x-Axe normal zu α_1 und α_2, x wachsend von α_2 nach α_1 (vgl. Fig. 10), so lautet diese Gleichung:

$$(x - f)^2 + y^2 = R^2, \text{ wo}$$

$$f = a\frac{c^2+1}{c^2-1}$$

$$R^2 = \left(\frac{2ac}{c^2-1}\right)^2 = f^2 - a^2.$$

Sie ist also die Gleichung eines zu den Axen parallelen Kreiscylinders vom Radius R, dessen Axe die x-Axe im Punkte $x = f$ trifft.

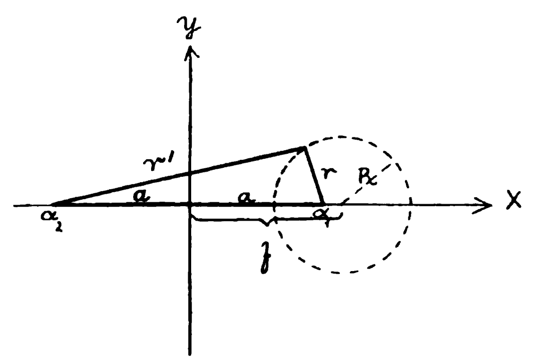


Fig. 10.

Ist $c \gtrless 1$, so umhüllt die Cylinderfläche die Axe $\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right.$; stets trennt sie die beiden Axen von einander. Wenn c von 0 bis 1 wächst, nimmt f von $-a$ bis $-\infty$ ab; wenn c von 1 bis ∞ wächst, nimmt f von $+\infty$ bis $+a$ ab.

Zwei beliebige solcher Cylinderflächen A_1 und A_2 grenzen einen Condensator ab, von dessen Belegungen die der Axe α_1 (bez. α_2) zugewandte die Elektricitätsmenge $2\pi\varepsilon \cdot b$ (bez. $-2\pi\varepsilon \cdot b$) auf der Längeneinheit besitzt (s. S. 70 und 71). Unterscheiden wir die auf die beiden Flächen bezüglichen Grössen durch die Indices 1 und 2, so ist

$$V_1 = b \lg c_1, \quad V_2 = b \lg c_2 \text{ und } c_1 > c_2$$

und folglich die Capacität der Längeneinheit:

$$\gamma = \frac{2\pi\varepsilon}{\lg c_1/c_2}. \tag{42}$$

Liegen nun die beiden parallelen, aber nicht coaxialen Cylinder A_1 und A_2 als gegeben vor, so sind bekannt ihre Radien R_1 und R_2 und der Abstand ihrer Axen d.

A) Umhüllen sie sich, so ist, (s. Fig. 11), für beide $c < 1$, oder für beide $c > 1$, also $f + a$ für beide von gleichem Vorzeichen; zugleich ist $f_1 < f_2$, also $d = f_2 - f_1$.

B) Schliessen sie sich aus, so ist $c_1 > 1$, $c_2 < 1$, $f_1 + a$ positiv, $f_2 + a$ negativ und $d = f_1 - f_2$.

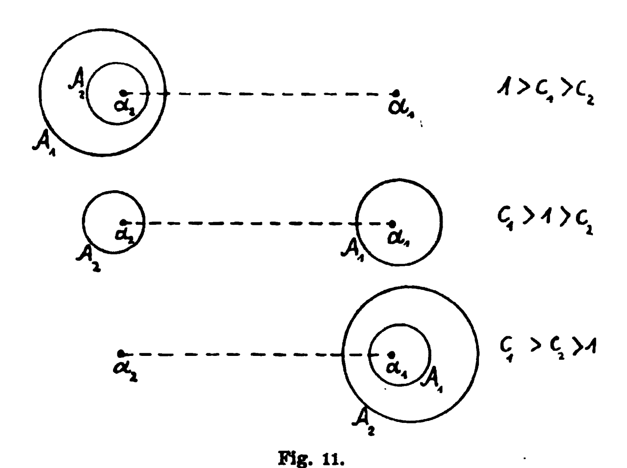


Fig. 11.

Aus den Werthen für f und R folgt:

$$c^2 = \left(\frac{f+a}{R}\right)^2, \; c \text{ positiv, folglich}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \pm \frac{f_1 + a}{f_2 + a} \frac{R_2}{R_1} \text{ im Fall } \frac{\text{A}}{\text{B}}.$$

Weiter

$$f_1{}^2 - a^2 = R_1{}^2; \; f_2{}^2 - a^2 = R_2{}^2; \; f_2 - f_1 = \pm d.$$

Löst man diese drei Gleichungen nach den Unbekannten f_1, f_2, a auf und setzt in die vorige Gleichung ein, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_1}{c_2} &= + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1{}^2 - R_2{}^2 + d^2 \mp 2\,da}{R_1{}^2 - R_2{}^2 - d^2 \mp 2\,da}, \\ \text{wo} \quad (2\,da)^2 &= (R_1{}^2 + R_2{}^2 - d^2)^2 - 4\,R_1{}^2\,R_2{}^2 \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

und die $\left.\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen im Falle $\left\{\begin{matrix}\text{A}\\ \text{B}\end{matrix}\right.$ gelten.

So wird c_1/c_2 stets positiv und grösser als Eins, und daher nach (42) γ reell und positiv.

Ist im Falle B) $R_1 = R_2 = R$, so wird

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4R^2}}{d - \sqrt{d^2 - 4R^2}};$$

ist dann ferner noch R sehr klein gegen d, so kommt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d^2}{R^2} \quad \text{und}$$

$$\gamma = \frac{\pi\varepsilon}{\lg d/R}. \tag{44}$$

Unsere Gleichungen unter 2) und 3) gelten nur für unendlich lange Cylinder: d. h. sie geben für zwei Cylinder, deren Längen sehr gross sind gegen ihre Radien und gegen den Abstand ihrer Axen, das Feld richtig in den Gebieten, die von den Enden sehr weit entfernt sind. γ ist demnach die Vermehrung, welche die Capacität eines solchen Systems erfährt, wenn die Länge der einander gegenüberstehenden Cylinderflächen um die Einheit wächst.

4) Ein weiteres Beispiel: ein Condensator sei begrenzt durch zwei unendlich ausgedehnte ebene parallele Platten mit den Potentialen V_a, V_b, den Dichten σ_a, σ_b. Zwischen ihnen befinde sich eine Reihe von Isolatoren in planparallelen Schichten von den Dicken h_1, h_2 . . , und den Constanten ε_1, ε_2 . . Das Feld ist dann überall normal zu den Platten gerichtet (etwa von der ersten zur zweiten), und seine Grösse kann nur mit dem Abstand von den Platten variiren. Die Gleichung (A) liefert demnach die Bedingungen:

$$\text{in } h_i\text{: } E = \text{const.} = E_i, \text{ und}$$

$$\sigma_a = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = \ldots = \varepsilon_i E_i = -\sigma_b.$$

Ferner

$$V_a - V_b = h_1 E_1 + h_2 E_2 + \ldots = \Sigma h_i E_i$$
$$= \sigma_a \Sigma \frac{h_i}{\varepsilon_i} = -\sigma_b \Sigma \frac{h_i}{\varepsilon_i},$$

folglich befindet sich auf der Fläche S einer Platte die Elektricitätsmenge

$$e = \pm \frac{V_a - V_b}{\Sigma h_i/\varepsilon_i} \cdot S.$$

Bestehe insbesondere der Isolator aus einer mittleren Schicht von der Constante ε und der Dicke h, und aus zwei äusseren Schichten von der Constante ε_0 und der Gesammtdicke h_0, so wird

$$e = \pm \frac{V_a - V_b}{h_0/\varepsilon_0 + h/\varepsilon} S.$$

Ersetzt man auch die Mittelschicht durch das Medium von der Constante ε_0, wo $\varepsilon_0 < \varepsilon$ sein mag, so bleibt die Capacität ungeändert, wenn man zugleich den Plattenabstand um eine Grösse x vermindert, derart dass

$$\frac{h + h_0 - x}{\varepsilon_0} = \frac{h}{\varepsilon} + \frac{h_0}{\varepsilon_0}$$

wird. Daraus folgt

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{h}{h - x}. \tag{45}$$

Diese Beziehung hat zur Vergleichung von Dielektricitätsconstanten gedient. Wesentlich ist nach dem vorstehenden nicht, wo die dielektrische Platte eingeschoben wird, — wohl aber, dass ihre Grenzflächen den Leiteroberflächen parallel gestellt werden.

Für einen homogenen Isolator, von der Dicke H, ist $E = \frac{V_a - V_b}{H}$, und die Dichte

$$\sigma = \pm (V_a - V_b) \frac{\varepsilon}{H}. \tag{46}$$

Zwei solche Condensatoren haben also gleiche Capacität der Flächeneinheit, wenn die Abstände sich verhalten, wie die Constanten ε. Auch diese Beziehung giebt ein Mittel zur Vergleichung der ε.

Bei einem Plattencondensator von endlicher Ausdehnung gelten unsere Werthe der σ nur für die von den Rändern sehr entfernten Theile der Oberflächen. Sie gelten noch mit grosser Annäherung, wenn man einen solchen Theil durch einen feinen Schnitt von dem Rest der Platte abtrennt, aber für leitende Verbindung beider Theile Sorge trägt. („Schutzring-Condensator.") Hat der Ausschnitt die Grösse S, so wirkt nach der Bemerkung am Ende des § 8 auf ihn eine Kraft

$$f = \tfrac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{V_a - V_b}{H}\right)^2 \cdot S, \tag{47}$$

welche ihn der gegenüberstehenden Platte zu nähern sucht. — Die genaue Lösung für diesen Fall und ebenso für den Fall zweier kreisförmiger Platten, deren Dicke und Abstand sehr klein ist gegen ihren Radius, hat Kirchhoff (Zur Theorie des Condensators, Ges. Abhdlgn. S. 101) gegeben.

In den Gleichungen dieses und der beiden vorigen Paragraphen sind die Grundlagen für die elektrostatischen Massmethoden enthalten.

Hier soll zunächst zusammengestellt werden, welche elektrostatischen Grössen in absolutem mechanischem Mass messbar sind. Die einzige Beziehung, welche die Elektrostatik mit der Mechanik verknüpft, ist in der Energie-Gleichung enthalten:

(B) $$W_e = \tfrac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\tau.$$

Sie lehrt, da W_e eine Energie, also von den Dimensionen einer mechanischen Arbeit $[M^1 L^2 T^{-2}]$, und $d\tau$ ein Volumen $[L^3]$ ist,

$$[\varepsilon E^2] = M^1 L^{-1} T^{-2}.$$

Die Verbindung mit

(A) $$\int \varepsilon E_N dS = \Sigma e,$$

bezw. mit

(C) $$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \text{ ergiebt:}$$

$$\left[\frac{e^2}{\varepsilon}\right] = [\varepsilon E^2 L^4] = M^1 L^3 T^{-2} \text{ und}$$

$$[\varepsilon \varphi^2] = [\varepsilon E^2 L^2] = M^1 L^1 T^{-2}.$$

Oder

$$[\sqrt{\varepsilon} \cdot E] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$$

$$\left[\frac{e}{\sqrt{\varepsilon}}\right] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$$

$$[\sqrt{\varepsilon} \cdot \varphi] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}.$$

Diesen Hauptgleichungen schliessen sich für Systeme von Leitern die folgenden an (aus (32) und (33)):

$$[\varepsilon\beta] = \left[\frac{\varepsilon\varphi}{e}\right] = L^{-1}$$

$$\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{e}{\varepsilon\varphi}\right] = L.$$

Die auf der linken Seite dieser Dimensionsgleichungen stehenden Combinationen elektrischer Grössen, — aber keine einzelne elektrische Grösse, — können mechanisch gemessen werden. — Im sog. „absoluten elektrischen Masssystem" (s. § 1) ist jedes ε eine reine Zahl, und sind folglich E, e, φ, β, α von den Dimensionen, welche oben für ihre Combinationen mit Potenzen von ε gefunden sind. —

Das Instrument, mit welchem mechanische Kräfte elektrischen Ursprungs gemessen werden, ist das Elektrometer.

Das „absolute Elektrometer" William Thomson's beruht auf der S. 75 besprochenen Anordnung des Schutzringes. Das Dielektricum ist Luft (Constante ε_0). Die Kraft f kann durch ein Gewicht compensirt und somit in absolutem mechanischem Mass ausgedrückt werden. Ist noch die Fläche S und die Länge H gemessen, so erhält man aus (47) $\varepsilon_0 (V_a - V_b)^2$ in mechanischem Mass, also auch (mittels $4\pi\varepsilon_0 = 1$), $V_a - V_b$ in „absolutem elektrischem Mass" ausgedrückt. $V_a - V_b$ ist aber zugleich die Potentialdifferenz irgend welcher zwei Leiter, welche mit den Platten des Elektrometers in Berührung sind.

Ein weitaus empfindlicheres Instrument, als das „absolute", ist das „Quadrantelektrometer". Man denke sich (s. Fig. 12) eine flache, cylindrische, metallische Büchse durch zwei zu einander senkrechte Axenschnitte in vier Quadranten zerlegt. Je zwei diagonal stehende Quadranten sind metallisch mit einander verbunden und folglich auf gleichem Potential (A resp. B). In der Büchse schwebt horizontal die metallische „Nadel" C (Potential C), so aufgehängt, dass sie sich um die verticale Cylinderaxe drehen kann. In der Ruhelage bilden die Schlitze zwischen den Quadranten Symmetrieebenen der

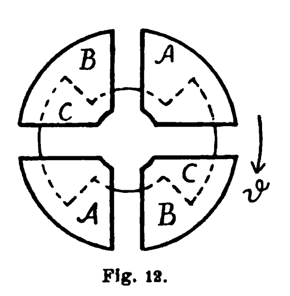


Fig. 12.

Nadel. Das ganze befindet sich in einer metallischen Hülle (deren Potential wir = 0 setzen). — Die Elektricitätsmengen der drei eingeschlossenen Leiter mögen e_a, e_b, e_c heissen. Dann können wir nach (33) setzen:

$$\begin{aligned} e_a &= q_{ab}(A-B) + q_{ac}(A-C) + q_a A \\ e_b &= q_{ba}(B-A) + q\ \ (B-C) + q_b B \\ e_c &= q_{ca}(C-A) + q_{cb}(C-B) + q_c C \end{aligned}$$

wo allgemein nach (35) $q_{ik} = q_{ki}$, und nach dem Satz 1) des § 9 (S. 62) alle q positiv sind.

Die Energie wird nach (36):

$$W_e = \tfrac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} q_{ab}(A-B)^2 + q_{ac}(A-C)^2 + q_{bc}(B-C)^2 \\ + q_a A^2 + q_b B^2 + q_c C^2 \end{matrix} \right\}$$

Wir fragen nach dem Drehungsmoment Θ, mit welchem die elektrischen Kräfte die Nadel aus einer gegebenen Lage in die Quadranten B hineinzuführen suchen. Bei einer unendlich kleinen Drehung $d\vartheta$ in diesem Sinne werde die Arbeit ∂A geleistet, dann ist

$$\partial A = \Theta \cdot d\vartheta.$$

∂A erhalten wir nach (36″) und (37″), indem wir im Ausdruck von W_e die A, B, C als Constanten behandeln und dW_e bilden. Also

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\left\{(A-B)^2 \frac{\partial q_{ab}}{\partial \vartheta} + \cdots\right\}$$

Bisher sind nur die allgemeinen Eigenschaften eines geschlossenen Feldes benutzt. Die weiteren Schlüsse sind bedingt durch die gemachten und noch zu machenden Annahmen über Bau und Verwendungsweise des Instruments. Man denke den Raum in radiale Streifen, entsprechend Winkeln $d\vartheta$, zerlegt; dann ist in der Mitte der sich gegenüberstehenden Flächen von A und C, und ebenso von B und C, die Elektricitätsvertheilung bezüglich ϑ gleichförmig. An den Rändern ist die Vertheilung nicht gleichförmig. Aber sie bleibt bei einer Drehung der Nadel ungeändert, so lange keine Kraftlinien zwischen den radialen Rändern von C einerseits und den radialen Rändern von A oder B andererseits verlaufen. Das gilt, so lange der Abstand der radialen Ränder

von Nadel und Quadranten sehr gross bleibt gegenüber den sonst in Betracht kommenden Dimensionen, der Höhe der Büchse und der Breite der Schlitze. Es soll vorausgesetzt werden, dass das Instrument so gebaut sei und nur für solche Stellungen der Nadel benutzt werde, dass dieser Forderung Genüge geschieht. Dann vermehrt sich bei einer Drehung um $d\vartheta$ die Zahl der Kraftlinien, die zwischen B und C ausgespannt sind, — und vermindert sich zugleich die Zahl derjenigen, die zwischen A und C verlaufen, — je um einen mit $d\vartheta$ proportionalen Betrag. Es ist also

$$\frac{\partial q_{bc}}{\partial \vartheta} = k,$$

und

$$\frac{\partial q_{ac}}{\partial \vartheta} = -k',$$

wo k und k' positive Constanten bedeuten.

Aus der Form und gegenseitigen Lage von A, B, C folgt weiter

$$k = k'.$$

Unter unserer Voraussetzung ist ferner klar, dass die zwischen Quadranten und Nadel einerseits und der Hülle andererseits, sowie die zwischen den beiden Quadrantenpaaren verlaufenden Kraftlinien bei der Drehung keine Veränderung erfahren. Das heisst

q_a, q_b, q_c, q_{ab} sind unabhängig von ϑ.

So ergiebt sich

$$\Theta = \frac{k}{2}\,[(B-C)^2-(A-C)^2]. \tag{48}$$

Dieses Drehungsmoment ist unabhängig von der Stellung der Nadel. Es ist abhängig nur von den Potentialdifferenzen zwischen Nadel und Quadranten. Es ist positiv, wenn $B-C$ numerisch grösser ist, als $A-C$; d. h. die Nadel wird stets in dasjenige Quadrantenpaar hineingezogen, dessen Potential von dem ihrigen am meisten abweicht. Macht man, durch metallische Verbindung, $A = C$, so wird das Drehungsmoment proportional mit dem Quadrat von $B-C$:

$$\Theta = \frac{k}{2}\,(B-C)^2. \tag{48a}$$

Man kann Gleichung 48 auch schreiben:

$$\Theta = k\,(A-B)\left[(C-A) + \frac{A-B}{2}\right].$$

Dieser Ausdruck führt auf eine andere Verwendung des Instruments: Sorgt man dafür, dass $C-A$ stets sehr gross bleibt gegen $A-B$, so kann gesetzt werden

$$\Theta = k\,(A-B)\,(C-A). \qquad (48\text{b})$$

Hält man nun eine der beiden hier auftretenden Potentialdifferenzen constant, so wird das Drehungsmoment direct proportional der andern.

Das Moment kann bei der einen, wie bei der andern Anordnung compensirt und gemessen werden, z. B. durch Fadentorsion. Die ersterwähnte Beobachtungsmethode ($A = C$) hat gegenüber der zweiten den Vorzug, dass sie eine Potentialdifferenz in unveränderlichem Mass zu messen gestattet, ohne dass die Constanz einer anderen Potentialdifferenz erfordert wird, — aber den Nachtheil, dass sie um so unempfindlicher wird, je kleiner die zu messende Grösse wird.

Der Factor k in Θ ist für ein gegebenes Instrument proportional mit dem ε des Isolators, welcher das Elektrometer erfüllt. Dasselbe ist also auch geeignet, die Dielektricitätsconstanten von Flüssigkeiten zu vergleichen. —

Auf die Vergleichung von Potentialdifferenzen lässt sich auch die Vergleichung von Capacitäten zurückführen: es werde ein geschlossener Condensator von der Capacität α_1 zur Potentialdifferenz V_1 geladen; die Ladung der inneren Belegung sei e_1. Dann mögen die Belegungen mit den entsprechenden Belegungen eines zweiten, bisher ungeladenen, geschlossenen Condensators von der Capacität α_2 leitend verbunden werden. Die gemeinsame Potentialdifferenz heisse jetzt V; dann folgt aus der „Unzerstörbarkeit“ der Elektricität die Gleichung

$$\alpha_1 V_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)\,V = e_1.$$

Daraus

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{V_1 - V}{V}.$$

Die Capacität eines beliebigen Condensators kann hiernach in unveränderlichem Mass ausgedrückt werden durch

Vergleichung mit einem Normalcondensator. Als Normalcondensatoren dienen diejenigen, für welche oben die Capacität aus Dielektricitätsconstante und geometrischen Daten berechnet wurde. — Jede Methode zur Vergleichung von Condensatoren liefert ferner (s. oben) ein Mittel, Dielektricitätsconstanten zu vergleichen.

„Elektrisirmaschinen“ heissen Apparate, mittels deren elektrische Energie aus mechanischer Arbeit gewonnen wird. Diese Arbeit wird verbraucht, um einen Körper, der an einer Stelle des Raumes eine elektrische Ladung empfangen hat, gegen die elektrischen Kräfte an eine andere Stelle zu bringen, wo er sie abgiebt. Die Leistung einer Elektrisirmaschine lässt sich nur qualitativ beurtheilen, wenn ihre wirksamen Theile zum Theil aus Isolatoren bestehen; sie wird aber vollkommen durchsichtig, wenn nur Leiter in Frage kommen. Eine solche Elektrisirmaschine wollen wir nach Maxwell beschreiben.

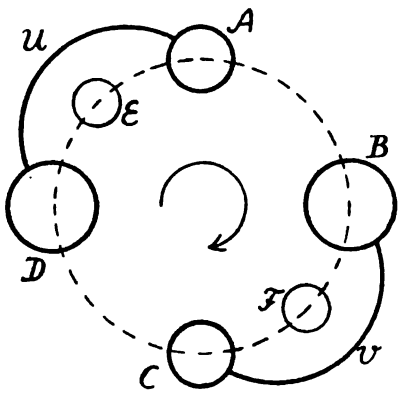


Fig. 13.

Wir denken uns (vgl. Fig. 13) vier im Kreise fest angeordnete Leiter $A\,B\,C\,D$; alle sollen Hohlräume enthalten und in diesen abwechselnd zwei Leiter E und F aufnehmen können, die in dem Kreise im Sinne $A\,B\,C\,D$ rotiren. A und C, B und D, E und F sollen paarweise einander geometrisch gleich sein und auf dem Kreise einander gegenüber liegen. A und D einerseits, B und C andererseits seien metallisch verbunden, die Potentiale mit U, resp. V bezeichnet. Die beiden Leiterpaare seien so entfernt von einander, dass ihre wechselseitige Induction vernachlässigt werden kann. Wenn E oder F von A oder C umschlossen ist, werde es für einen Moment mit einem Leiter von unveränderlichem Potential P (der Erde)

leitend verbunden, — wenn E oder F von B oder D umschlossen ist, werde es für einen Moment mit dieser seiner Hülle verbunden.

Im Anfang sei $U = U_0$, $V = V_0$. Dann erhält E in A die Ladung $q(P - U_0)$, wo q eine positive Grösse ist. E wird dann isolirt und gelangt mit dieser Ladung nach B. Bei der Verbindung mit B giebt es seine Ladung vollständig ab. Dadurch steigt das Potential von B und dem mit B verbundenen C um $\frac{q}{a}(P - U_0)$, wenn a die Capacität von B und C zusammen, also eine positive Grösse bedeutet. Es wird also jetzt

$$V = V_0 + \frac{q}{a}(P - U_0) = V_1.$$

Gleichzeitig hat F in C die Ladung $q(P - V_0)$ aufgenommen und sie an D abgegeben. Dadurch wurde

$$U = U_0 + \frac{q}{a}(P - V_0) = U_1.$$

Sobald E aus B und gleichzeitig F aus D herausgetreten ist, ist der erste halbe Umlauf vollendet. Das Resultat des $n$ten halben Umlaufs ist ebenso:

$$V_n = V_{n-1} + r(P - U_{n-1})$$
$$U_n = U_{n-1} + r(P - V_{n-1}),$$

wo $r = \frac{q}{a}$ eine positive Zahl bedeutet. Daraus

$$V_n - U_n = (V_{n-1} - U_{n-1})(1 + r), \text{ also}$$
$$V_n - U_n = (V_0 - U_0)(1 + r)^n.$$

Das heisst, bei wachsender Zahl der Umdrehungen wächst die ursprüngliche Potentialdifferenz in geometrischer Progression, behält aber dabei stets das ursprüngliche Vorzeichen.

Das Instrument kann also auch zu Messzwecken Verwendung finden. Zunächst erlaubt es, das Vorzeichen einer Potentialdifferenz erkennbar zu machen, welche zu klein ist, um direct wahrnehmbar zu sein. Weiter folgt, solange die Verstärkungszahl $(1 + r)$ constant bleibt, aus dem gemessenen $V_n - U_n$ auch das ursprüngliche $V_0 - U_0$. Die Verstärkungszahl bleibt aber nur constant, solange, — wie wir stillschweigend vorausgesetzt haben, — die einzelnen Theile des In-

struments vollkommen isolirt sind. Die Gefahr eines elektrischen Ausgleichs steigt mit wachsender Stärke des Feldes, also mit wachsender Zahl der Umdrehungen.

Die Energie des erzeugten elektrischen Feldes wird aus der aufgewandten mechanischen Arbeit gewonnen. Die letztere wird aber nur dann vollständig in elektrische Energie verwandelt, wenn die verschiedenen Leiter im Augenblick der Berührung stets gleiches Potential besitzen. Diese Bedingung ist bei unserm Instrument nicht erfüllt; wie sie erfüllt werden kann, s. bei Maxwell, Treatise, § 213.

§ 11. Die mechanischen Kräfte im gegebenen Feld.

Wir kehren zu dem allgemeinsten Fall zurück, wo sich Elektricität sowohl auf Leitern, wie in dem beliebig zusammengesetzten Dielektricum befindet, und wollen jetzt die mechanischen Kräfte berechnen, welche auf die einzelnen Körperelemente wirken.

Die Kraft auf ein Körperelement, welches den Raum $d\tau$ erfüllt, heisse $f \cdot d\tau$. Erleidet dieses Element eine unendlich kleine Verschiebung δ, deren Projectionen δx, δy, δz sind, so wird die Arbeit geleistet

$$(f_x \cdot \delta x + f_y \cdot \delta y + f_z \cdot \delta z)\, d\tau .$$

Indem wir diesen Ausdruck über einen endlichen Raum τ integriren, erhalten wir die gesammte Arbeit der Kräfte an den Körpern in τ. Und umgekehrt: jede Frage, welche in Bezug auf das wirkende Kraftsystem gestellt werden kann, ist beantwortet, wenn wir diese Arbeit für jedes beliebige System virtueller Verschiebungen anzugeben vermögen.

Welche Verschiebungen möglich sind, das hängt im einzelnen Fall von der physikalischen Beschaffenheit der betrachteten Körper ab. Ueber diese machen wir keinerlei beschränkende Annahme. Dann sind alle Verschiebungen möglich, bei denen die continuirliche Raumerfüllung gewahrt bleibt. (Das „Vacuum“ ist lediglich eine Abstraction; was man so bezeichnet, ist für uns stets ebenfalls ein raumerfüllendes Medium.) Das heisst, die δ unterliegen der einzigen Be-

dingung, dass an keiner Fläche ihre normalen Componenten sich sprungweise ändern können; oder: überall existiren die Differentialquotienten $\frac{\partial . \delta x}{\partial x}$, $\frac{\partial . \delta y}{\partial y}$, $\frac{\partial . \delta z}{\partial z}$ und sind von der Ordnung der δ.

Unser Raum τ soll ein vollständiges elektrostatisches Feld und unsere Kräfte f sollen die mechanischen Kräfte elektrischen Ursprungs sein. Dann ist ihre Arbeit gleich der Abnahme der elektrischen Energie des Raumes τ; also

$$\int (f_x \cdot \delta x + f_y \cdot \delta y + f_z \cdot \delta z)\, d\tau = - dW_e,$$

wo, wie im folgenden stets, das Integrationsgebiet das ganze vollständige Feld ist.

Es handelt sich also darum, die Abnahme, welche W_e bei einem beliebigen System virtueller Verschiebungen δ erleidet, in diese Form zu bringen. Dann kennen wir die Kräfte f. Das Feld, und somit W_e, ist bei gegebenem ε vollständig bestimmt durch die Elektricitätsvertheilung e (s. § 7, b). Durch die Verschiebung aber ändert sich in $d\tau$ im allgemeinen sowohl ε, wie de. Soweit es sich dabei um Leiter handelt, folgt aus den gleichen Ueberlegungen, wie in § 8, S. 59f., dass wir bei der Berechnung von dW_e die Elektricität als an den Leiterelementen haftend behandeln dürfen; wir haben also allgemein anzunehmen, dass die de die Verschiebungen ihrer materiellen Träger mitmachen. Auch die Werthe der ε haften an den Körperelementen, sofern wir davon absehen, dass die Dielektricitätsconstanten der Körper sich etwas mit der Dichte ändern, — was wir thun wollen. — Wir wollen ferner zunächst voraussetzen, dass sowohl ρ, wie ε stetig im Raum variirt, — womit a fortiori vorausgesetzt ist, dass ρ überall endlich ist, also nirgends eine Flächendichte σ existirt. [Das Schlussresultat unserer Rechnung wird sich von diesen Voraussetzungen befreien lassen.] Dann finden bei unendlich kleinen Verschiebungen der Körperelemente auch nur unendlich kleine Aenderungen der ε und de jedes Raumelements statt, und die Aenderung von W_e ist die Summe der beiden unendlich kleinen Aenderungen $d_\varepsilon W_e$ und $d_e W_e$ welche von den

Aenderungen der Elektricitätsvertheilung einerseits, der Dielektricitätsconstante andererseits herrühren.

Nun seien erstens bei unverändertem ε zwei Felder $e\ \varphi\ W_e$, und $e'\ \varphi'\ W_e'$ gegeben. Dann ist nach (6) und (29):

$$W_e' - W_e = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\varphi' e' - \tfrac{1}{2}\Sigma\varphi e = \tfrac{1}{2}\Sigma(\varphi' + \varphi)(e' - e) \quad (49)$$

und folglich

$$d_e W_e = \Sigma\varphi\cdot\partial e = \int\varphi\cdot\partial\varrho\cdot d\tau. \quad (49\,a)$$

Es seien zweitens bei unverändertem ϱ zwei Felder $\varepsilon_0\ E_0\ \varphi_0\ W_{e0}$ und $\varepsilon\ E\ \varphi\ W_e$ gegeben.

Dann ist also

$$\Gamma_\tau(\varepsilon_0 E_0) = \Gamma_\tau(\varepsilon E) = \varrho$$

$$\text{und}\quad W_e = \tfrac{1}{2}\int\varphi\ \varrho\ d\tau = \tfrac{1}{2}\int\varphi\ \Gamma(\varepsilon_0 E_0)\ d\tau,$$

$$W_{e0} = \tfrac{1}{2}\int\varphi_0\ \varrho\ d\tau = \tfrac{1}{2}\int\varphi_0\ \Gamma(\varepsilon E)\ d\tau.$$

Wir integriren partiell über τ; da τ ein vollständiges Feld bildet, verschwindet das Integral über die Oberfläche von τ. Also kommt unter Benutzung von (4):

$$W_e = \tfrac{1}{2}\int[E_x\cdot\varepsilon_0 E_{0x} + \ldots]\,d\tau$$

$$W_{e0} = \tfrac{1}{2}\int[E_{0x}\cdot\varepsilon E_x + \ldots]\,d\tau$$

und folglich

$$W_e - W_{e0} = -\tfrac{1}{2}\int(\varepsilon - \varepsilon_0)\,[E_x\cdot E_{0x} + \ldots]\,d\tau \quad (50)$$

und $$d_\varepsilon W_e = -\tfrac{1}{2}\int E^2\cdot\partial\varepsilon\cdot d\tau. \quad (50\,a)$$

Aus (49a) und (50a) aber folgt:

$$d\,W_e = \int\varphi\cdot\partial\varrho\cdot d\tau - \tfrac{1}{2}\int E^2\cdot\partial\varepsilon\cdot d\tau. \quad (51)$$

Hier bedeuten $\partial\varrho$ und $\partial\varepsilon$ die Aenderungen, welche das ϱ und ε eines Raumelements $d\tau$ durch die Verschiebungen

der materiellen Elemente erleiden. Nehmen wir $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$, so vermehrt sich der Elektricitätsinhalt $\varrho \cdot d\tau$ von $d\tau$ um die Elektricitätsmengen, welche durch die 6 Grenzflächen des Parallelepipedons eintreten. Durch die Fläche $dy\, dz$, welche zum kleineren x gehört, tritt diejenige Elektricitätsmenge ein, welche in einem Parallelepipedon von der Basis $dy\, dz$ und der Höhe δx enthalten war, d. h.:

$$(\varrho \cdot \delta x)_x \cdot dy\, dz.$$

Durch die gegenüberliegende Fläche tritt aus:

$$(\varrho \cdot \delta x)_{x+dx} \cdot dy\, dz.$$

Also tritt nach unserer Voraussetzung über die Stetigkeit von ϱ und δx durch beide zusammen ein:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\varrho \cdot \delta x)\, dx \cdot dy \cdot dz.$$

Bilden wir die entsprechenden Werthe für die beiden anderen Seitenpaare und setzen die Summe gleich $\partial(\varrho \cdot d\tau) = \partial\varrho \cdot d\tau$, so kommt:

$$\partial\varrho = -\frac{\partial}{\partial x}(\varrho \cdot \delta x) - \frac{\partial}{\partial y}(\varrho \cdot \delta y) - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho \cdot \delta z).$$

Das neue ε des Punktes (x, y, z) ist dasjenige, welches vor der Verschiebung der Punkt $(x - \delta x, y - \delta y, z - \delta z)$ besass; also ist die Vermehrung von ε:

$$\partial\varepsilon = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\delta x - \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\delta y - \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\delta z.$$

Diese Werthe haben wir in dW_e einzusetzen. Dadurch erhält das zweite Integral in (51) bereits die verlangte Form. Das erste formen wir durch partielle Integration um; es wird so

$$= +\int \varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \ldots\right) d\tau = -\int \varrho\,(E_x\, \delta x + \ldots)\, d\tau.$$

Wir erhalten demnach:

$$-dW_e = \int\left[\left(\varrho E_x - \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)\delta x + \ldots\right] d\tau. \qquad (52)$$

Indem wir diesen Ausdruck mit demjenigen auf S. 84 identificiren, kommt:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \varrho E_x - \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\ f_y &= \varrho E_y - \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ f_z &= \varrho E_z - \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Die Componenten der Kraft $f \cdot d\tau$ reduciren sich auf diejenigen von $\varrho E \cdot d\tau = de \cdot E$ an jeder Stelle des Raumes, wo ε constant, d. h. das Dielektricum homogen ist, — wie bereits S. 57 gefunden wurde. Im allgemeinen aber ist die mechanische Kraft auf das die Elektricitätsmenge de führende Körperelement verschieden von der sog. „Kraft auf die Elektricitätsmenge de.“ Es tritt zu der letzteren hinzu eine Kraft, welche nach der Richtung des stärksten Abfalls von ε weist, und welche, wenn diese Richtung N heisst, für die Volumeinheit die Grösse

$$\tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial N}$$

besitzt.

Wir wollen jetzt versuchen, ob wir die gefundenen Kräfte auf Wechselwirkungen zwischen den unmittelbar benachbarten Theilchen der Materie zurückführen können; d. h. die Kraft $f \cdot d\tau$, welche auf das Theilchen im Volumen $d\tau$ wirkt, soll dargestellt werden durch Kräfte, welche über die Oberfläche von $d\tau$ vertheilt sind und dem Gesetz der Gleichheit von Action und Reaction gehorchen.

Wir haben demnach zuerst zu untersuchen, welche Beziehungen allgemein zwischen gegebenen Volumkräften und ihnen äquivalenten Flächenkräften oder „Spannungen“ bestehen müssen.

Zwei Körperelemente, welche in der Fläche dS zusammenstossen, sollen Kräfte auf einander ausüben, welche mit dS proportional und an Grösse gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Auf der einen Richtung der Normalen von dS zählen wir wachsende Werthe N, und bezeichnen die Kraft, welche das Element zur Seite der grösseren N auf jenes zur Seite der kleineren N ausübt, mit $p_N \cdot dS$. Diese Oberflächenkräfte sollen den gegebenen Volumkräften äquivalent sein unter den allgemeinsten Bedingungen, — also auch, wenn

jedes beliebig kleine Körpertheilchen die Beweglichkeit eines freien Körpers hat. Dann müssen aber beide Kraftsysteme an ihm die gleichen Verschiebungskräfte nach jeder Richtung und die gleichen Drehungsmomente um jede Axe liefern.

Denken wir uns zunächst ein unendlich kleines Tetraeder, begrenzt durch eine unendlich kleine Fläche S und deren Projectionen S_x, S_y, S_z auf die Coordinatenebenen. Die nach aussen errichtete Normale von S sei N, die nach innen weisenden Normalen von S_x, S_y, S_z bezw. $+x$, $+y$, $+z$, das Volumen des Tetraeders $d\tau$. Dann ist die x-Componente der auf das Tetraeder wirkenden Kraft einerseits $f_x \cdot d\tau$, andrerseits setzt sie sich zusammen aus den x-Componenten der Oberflächenkräfte auf S, S_x, S_y, S_z. Die letzteren sind:

$$p_{Nx} \cdot S, \quad -p_{xx} \cdot S_x, \quad -p_{yx} \cdot S_y, \quad -p_{zx} \cdot S_z,$$

wo

$$S_x = S \cos(Nx), \quad S_y = S \cos(Ny), \quad S_z = S \cos(Nz).$$

Es muss also sein:

$$f_x \cdot d\tau = [p_{Nx} - p_{xx} \cos(Nx) - p_{yx} \cos(Ny) - p_{zx} \cos(Nz)] \cdot S.$$

Die linke Seite ist unendlich klein von der dritten Ordnung, S ist unendlich klein von der zweiten Ordnung. Also kann die Klammergrösse nicht endlich sein; d. h.

$$\left.\begin{aligned} p_{Nx} &= p_{xx} \cdot \cos(Nx) + p_{yx} \cdot \cos(Ny) + p_{zx} \cdot \cos(Nz) \\ p_{Ny} &= p_{xy} \cdot \cos(Nx) + p_{yy} \cdot \cos(Ny) + p_{zy} \cdot \cos(Nz) \\ p_{Nz} &= p_{xz} \cdot \cos(Nx) + p_{yz} \cdot \cos(Ny) + p_{zz} \cdot \cos(Nz). \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Die Oberflächenkräfte sind also allgemein bestimmt, sobald sie überall für diejenigen Flächenelemente bestimmt sind, welche den drei Coordinatenebenen parallel liegen.

Wir betrachten deshalb weiter ein Volumelement $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$. Die x-Componenten aller Oberflächenkräfte sind:

$$\left.\begin{aligned} &-(p_{xx})_x \cdot dy \cdot dz + (p_{xx})_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \\ &-(p_{yx})_y \cdot dz \cdot dx + (p_{yx})_{y+dy} \cdot dz \cdot dx \\ &-(p_{zx})_z \cdot dx \cdot dy + (p_{zx})_{z+dz} \cdot dx \cdot dy \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \\ &+ \frac{p_{zx}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Dies muss gleich $f_x \cdot d\tau$ sein; also

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}. \\ \text{Ebenso:} \qquad f_y &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ f_z &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Die 9 Grössen p_{ik} sind aber nicht alle von einander unabhängig. Wir erkennen das, wenn wir zum Ausdruck bringen, dass auch die Drehungsmomente der Oberflächenkräfte identisch sein müssen mit denen der gegebenen Volumkräfte. Die Bedingung für die Gleichheit der Momente um die x-Axe lautet:

$$(y \cdot f_z - z \cdot f_y)\, d\tau = \Sigma\,(y \cdot p_{Nz} - z \cdot p_{Ny})\, dS,$$

wo dS ein Oberflächenelement, N seine äussere Normale bezeichnet, und die Summe über alle Oberflächentheile des Parallelepipedons zu erstrecken ist. Die Summe ist:

$$\begin{aligned} &[-(y \cdot p_{xz} - z \cdot p_{xy})_x + (y \cdot p_{xz} - z \cdot p_{xy})_{x+dx}] \cdot dy \cdot dz \\ &+ [-(y \cdot p_{yz} - z \cdot p_{yy})_y + (y \cdot p_{yz} - z \cdot p_{yy})_{y+dy}] \cdot dz \cdot dx \\ &+ [-(y \cdot p_{zz} - z \cdot p_{zy})_z + (y \cdot p_{zz} - z \cdot p_{zy})_{z+dz}] \cdot dx \cdot dy \\ &= \left[y \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + p_{yz} - p_{zy} \right] dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned}$$

Setzt man andrerseits für f_z und f_y ihre Werthe aus (55) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} &= p_{zy} \\ \text{Ebenso} \qquad p_{zx} &= p_{xz} \\ p_{xy} &= p_{yx} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Wenn wir also die Kräfte f der Gleichungen (53) aus Spannungen herleiten wollen, so ist die Frage: lassen sich die rechten Seiten von (53) in der Form (55) darstellen durch Grössen p_{ik}, zwischen denen die Beziehungen (56): $p_{ik} = p_{ki}$ bestehen? Dies ist thatsächlich möglich. Wir haben:

$$f_x = \varrho\, E_x - \tfrac{1}{2}\, E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

$$= \left[\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right] \cdot E_x - \tfrac{1}{2}\left[E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right] \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, E_x^2) + E_x \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} - \tfrac{1}{2}\, E_y^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + E_x \cdot \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z} - \tfrac{1}{2}\, E_z^2\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

Nun ist aber in Folge von (4):

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\left(= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial y}\right) \text{ und } \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}\left(= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial z}\right)$$

und folglich

$$0 = \varepsilon\, E_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) + \varepsilon\, E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right).$$

Addiren wir diese Gleichung zu der obigen, so kommt:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon\, E_x\, E_y\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon\, E_x\, E_z\right].$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon\, E_y\, E_z\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon\, E_y\, E_x\right].$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon\, E_z\, E_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon\, E_z\, E_y\right].$$

Identificiren wir dies mit (55), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2), \\ p_{yy} &= \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2), \\ p_{zz} &= \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2), \\ p_{yz} &= p_{zy} = \varepsilon\, E_y\, E_z, \\ p_{zx} &= p_{xz} = \varepsilon\, E_z\, E_x, \\ p_{xy} &= p_{yx} = \varepsilon\, E_x\, E_y. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Hiermit sind die verlangten Spannungen gefunden. Man kann sie sehr einfach und nach (54) zugleich vollständig beschreiben: lassen wir an der betrachteten Stelle etwa die x-Axe mit der Richtung der Feldintensität zusammenfallen, sodass also $E_x = E$, $E_y = E_z = 0$, wird, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, E^2, \quad p_{yy} = p_{zz} = -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, E^2, \\ p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (57\text{a})$$

Die Spannungen wirken also normal auf jede Fläche, welche senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien liegt, und

gleichfalls normal auf jede Fläche, welche die Kraftlinien in sich enthält. Es bedeutet ferner p_{NN} die zu wachsenden N gerichtete Componente der Kraft, mit welcher die Theile zur Seite der grösseren N auf jene zur Seite der kleineren N wirken. Ein positiver Werth von p_{NN} bedeutet also einen Zug, ein negativer einen Druck auf das Volumelement. Also sagt (57a) aus: die auf ein Volumelement von seiner Umgebung ausgeübten Kräfte lassen sich darstellen durch normale Zugkräfte in Richtung der Kraftlinien vom Betrage $\frac{1}{2}\,\varepsilon E^2$ per Flächeneinheit, zusammen mit einem normalen Druck vom gleichen Betrage in jeder zu den Kraftlinien senkrechten Richtung.

Diesen Kräften numerisch gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, sind die Kräfte, mit welchen das Volumelement auf seine Umgebung wirkt. Also kann man das Resultat qualitativ auch so aussprechen: die Kraftlinien suchen sich zu verkürzen und gleichzeitig die benachbarten Kraftlinien fortzudrängen. (Faraday.)

Eine wesentliche Voraussetzung unserer Entwicklung war die, dass der Raum τ ein vollständiges Feld sei. Die von uns gefundenen Kräfte (53) oder auch (57) bilden also ein mögliches Kraftsystem in folgendem Sinn: bei Annahme dieses Kraftsystems können wir, wie auch die Körper des Feldes verschoben und deformirt werden mögen, nie mit der Erfahrung in Widerspruch kommen, sofern wir nur wirklich alle Veränderungen im Felde berücksichtigen. Man kann fragen, ob es zugleich das einzig mögliche System ist. Ein zweites Kraftsystem, welches uns dasselbe leistete, würde durch kein Experiment von dem unsrigen unterschieden werden können. Die Frage, welches von beiden das „wirkliche" Kraftsystem sei, hat also keinen physikalischen Inhalt. Das oben dargestellte, Maxwell'sche, empfiehlt sich durch seinen einfachen Ausdruck.

Unsere Grundgleichungen gelten für isotrope Körper. Voraussetzung für die Gültigkeit unserer Resultate ist also, dass die Körper trotz der soeben gefundenen Spannungen isotrop bleiben, — oder dass wir wenigstens die Rückwirkung der Aeolotropie auf die Verhältnisse des elektrischen

Feldes, ebenso wie diejenige der Dichtenänderung (s. S. 84) vernachlässigen dürfen.

Dagegen dürfen wir schliessen, dass die Werthe der Spannungen in (57) in Strenge auch da gültig bleiben, wo entgegen unseren bisherigen Voraussetzungen, die Dielektricitätsconstante und die elektrische Polarisation sich sprungweise ändern. Denn Differentialquotienten dieser Grössen kommen in den Ausdrücken (57) nicht mehr vor.*) Aus diesen können wir nun rückwärts die Volumkräfte auch für Unstetigkeitsflächen finden. Sei dS ein Element einer solchen, dann wählen wir als Volumelement einen unendlich flachen Cylinder, dessen Grundflächen zu beiden Seiten von dS parallel mit dS liegen. Die auf dieses Volumelement wirkende Kraft ist die Resultante der beiden auf die Grundflächen wirkenden und nach (57) zu berechnenden Spannungen.

Wir wollen hiernach zuerst die Kräfte finden, denen ein Leiter in einem gegebenen Felde unterliegt. Im Innern der leitenden Masse ist die Feldintensität durchweg Null, sind also auch die Kräfte (53) Null. Es bleiben die Kräfte auf die Oberflächenelemente, die wir wie angegeben begrenzen. Null sind auch hier die Spannungen an der im Leiter gelegenen Cylinderbasis nach (57); auf der äusseren Cylinderbasis ist die Feldintensität senkrecht. Es wirkt also auf sie, und somit auf das Oberflächenelement nach (57a) die normal nach aussen gerichtete Kraft:

$$d\nu = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 \cdot dS. \tag{58}$$

Aus diesen Kräften $d\nu$ setzt sich die Gesammtwirkung auf den Leiter in jedem Fall zusammen, — wie wir am Schluss des § 8 vorweg bemerkt haben.

Wir untersuchen ferner die Kräfte auf einen homogenen dielektrischen Körper, der keine elektrische Ladung besitzt. Seine Constante sei ε_1, die der Umgebung ε_0. Das Volumen des Körpers sei τ, seine Oberfläche S, die Feldintensität und die Spannungen in τ: E' und p'_{ik}, ausserhalb τ: E und p_{ik}.

*) Das Resultat lässt sich thatsächlich ohne diese Voraussetzungen ableiten; die Rechnung wird aber sehr umständlich.

In τ soll nach Voraussetzung $\rho = 0$ und ε constant $(= \varepsilon_1)$ sein. Also sind die Kräfte (53) Null im ganzen Raum τ. Es bleiben die Kräfte auf die Oberflächenelemente. Wählen wir für den Augenblick die äussere Normale N von dS zur x-Axe, so werden die Componenten für die Flächeneinheit nach (57)

$$p_{xx} - p'_{xx} = \tfrac{1}{2}\left[\varepsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) - \varepsilon_1 (E_x'^2 - E_y'^2 - E_z'^2)\right]$$
$$p_{xy} - p'_{xy} = \varepsilon_0 E_x E_y - \varepsilon_1 E_x' E_y'$$
$$p_{xz} - p'_{xz} = \varepsilon_0 E_x E_z - \varepsilon_1 E_x' E_z'.$$

Es ist aber an der Grenzfläche die tangentiale Componente der Feldintensität stetig, d. h.

$$E_y = E_y' \text{ und } E_z = E_z',$$

und da an S sich keine elektrische Ladung befinden soll, ist weiter die Normalcomponente der Polarisation stetig:

$$\varepsilon_0 E_x = \varepsilon_1 E_x'.$$

Daraus folgt:

$$p_{xx} - p'_{xx} = \tfrac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} E_x^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(E_y^2 + E_z^2)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\left[E^2 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} E_x^2\right]$$
$$p_{xy} - p'_{xy} = 0$$
$$p_{xz} - p'_{xz} = 0.$$

Das heisst, wenn wir die Normalenrichtung wieder durch N bezeichnen: es wirkt auf das Oberflächenelement dS eine normal nach aussen gerichtete Kraft von der Grösse

$$\left.\begin{aligned} d\nu &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\left[E^2 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} E_N^2\right] dS \\ &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E^2 \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cos^2(EN)\right] \cdot dS. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Ist $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ sehr nahe gleich Eins, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$d\nu = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E^2 \cdot dS. \quad (59\text{a})$$

Zum Zweck späterer Anwendung (in Kapitel VIII) wollen wir noch einen anderen Ausdruck für die virtuelle Arbeit bei gegebenen Spannungen p_{ik} ableiten. Wir setzen dabei voraus,

— wie es in unserem Fall zutraf, — dass die Spannungen an den Grenzen des betrachteten Raumes τ verschwinden.

Es war

$$\partial A = \int (f_x \cdot \delta x + f_y \cdot \delta y + f_z \cdot \delta z)\, d\tau.$$

Hierin sollen für die Volumkräfte f die äquivalenten Spannungen eingeführt werden. Dazu dienen die Gleichungen (55) mit dem Zusatz (56): $p_{ik} = p_{ki}$. Wir integriren partiell über τ. Dann kommt:

$$\partial A = -\int \left\{ \begin{array}{c} p_{xx} \frac{\partial \delta x}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial \delta y}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ + p_{yz}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + p_{zx}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) \\ + p_{xy}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right) \end{array} \right\} d\tau. \quad (60)$$

§ 12. Elektrisirung durch Influenz.

Die im letzten Paragraphen entwickelten Sätze enthalten u. A. die Erklärung der Thatsache, dass auch ein nicht elektrisirter, leitender oder dielektrischer, Körper von bewegenden Kräften ergriffen wird, wenn man ihn in ein elektrisches Feld bringt. Sie lehren weiter diese Kräfte berechnen unter der Voraussetzung, dass das den Körper umgebende Feld bekannt sei. Dieses Feld aber ist uns thatsächlich nicht direct gegeben. Gegeben ist vielmehr in der Regel das Feld, in welches der Körper gebracht wird und welches er durch seine Anwesenheit verändert.

Wir stellen uns zunächst die folgende Aufgabe: ein beliebiges Feld E_0 sei gegeben in beliebigen Körpern. Es werde in beliebiger Weise die materielle Raumerfüllung geändert bei ungeänderter Elektricitätsvertheilung. Gefragt ist nach dem neuen Feld E.

φ_0 ε_0 W_{e0} sollen sich auf das ursprüngliche, φ ε W_e auf das neue Feld beziehen.

Die Elektricitätsvertheilung (ϱ, σ, e_i) ist nach Voraussetzung

beiden Feldern gemeinsam. Es ist also, wenn noch S_i eine Leiteroberfläche bezeichnet,

$$\Gamma(\varepsilon_0 E_0) = \begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\end{Bmatrix} = \Gamma(\varepsilon E) \text{ und} \int\limits_{S_i} \varepsilon_0 E_{0N} dS = e_i = \int\limits_{S_i} \varepsilon E_N dS,$$

und durch diese ϱ, σ, e_i und die allgemeinen Bedingungen ist einerseits E_0, andererseits E eindeutig bestimmt. Wir bilden nun das „Zusatzfeld" Z, welches definirt ist durch die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} Z_l &= E_l - E_{0l} \text{ oder} \\ Z_l &= -\frac{\partial \chi}{\partial l}, \text{ wo } \chi = \varphi - \varphi_0. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Aus dieser Definitionsgleichung folgt:

$$\Gamma(\varepsilon_0 Z) = \Gamma(\varepsilon_0 E) - \Gamma(\varepsilon_0 E_0) = \Gamma(\varepsilon_0 E) - \Gamma(\varepsilon E),$$

und ebenso

$$\int\limits_{S_i} \varepsilon_0 Z_N dS = \int\limits_{S_i} \varepsilon_0 E_N dS - \int\limits_{S_i} \varepsilon E_N dS,$$

Setzen wir daher

$$-\Gamma\Big((\varepsilon - \varepsilon_0) E\Big) = \begin{Bmatrix}\varrho'\\ \sigma'\end{Bmatrix}; \quad -\int\limits_{S_i} (\varepsilon - \varepsilon_0) E_N dS_i = e_i' \tag{62}$$

so ist

$$\Gamma(\varepsilon_0 Z) = \begin{Bmatrix}\varrho'\\ \sigma'\end{Bmatrix}; \quad \int\limits_{S_i} \varepsilon_0 Z_N dS_i = e_i'. \tag{63}$$

Z genügt den allgemeinen Bedingungen, weil E und E_0 dies thun. Z ist daher nach (63) durch die Werthe der ϱ', σ', e_i' eindeutig bestimmt. Diese Werthe sind freilich nicht gegeben; man kennt sie nach (62) erst, wenn E bekannt, d. h. die gestellte Aufgabe gelöst ist. Aber aus der Form der Gleichungen (62) und (63) folgt:

Das Zusatzfeld Z kann aufgefasst werden als das elektrische Feld, welches einer gewissen fingirten Elektricitätsvertheilung $(\varrho', \sigma', e_i')$ in einem Raum mit der Dielektricitätsconstante ε_0 zukommt. Diese Vertheilung befindet sich nur dort, wo $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ ist, d. h. wo materielle Veränderungen vor-

genommen sind.[1]) Also: um aus dem ursprünglichen das neue Feld zu erhalten, können wir von der Veränderung des ε absehen, wenn wir dafür an den Stellen dieser Veränderung eine gewisse fictive Elektricitätsvertheilung (neben der etwa wirklich vorhandenen) annehmen.

Das allgemeine Symbol derselben soll e' sein; — das der wirklichen Elektricitätsvertheilung e. Wir nehmen materielle Veränderungen nur in endlichen Räumen vor. Sei also S eine geschlossene Fläche, welche den Raum τ einschliesst, und an welcher durchweg $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist, dann folgt für die in τ gelegenen e' aus (62):

$$\sum_\tau e' = -\int_\tau \Gamma\Big((\varepsilon-\varepsilon_0)E\Big)\,d\tau, \text{ oder nach (14a):}$$

$$= -\int_S (\varepsilon-\varepsilon_0)\,E_N\,dS; \text{ d. h. nach unserer Voraussetzung:}$$

$$\sum_\tau e' = 0. \tag{64}$$

Für jeden Theil des Raumes also, der ganz von unveränderter Materie umgeben ist, ist die Summe aller fictiven Elektricität gleich Null.

Wir wollen nun unsere Voraussetzungen nach verschiedenen Richtungen specialisiren: zunächst nehmen wir an, es sei im ursprünglichen Felde ausser Leitern nur ein homogener Isolator vorhanden, also ε_0 constant.

Dann ist nach (3):

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\Sigma\,\frac{e}{r};$$

und zugleich ist nach (63):

$$\chi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\Sigma\,\frac{e'}{r}$$

[vgl. S. 45, unter c]; also wird nach (61):

1) Man muss aber beachten, dass diese „Vertheilung“, welche Z bestimmt, nur die Gesammtmenge e'_i jedes Leiters, nicht die Dichte σ'_i enthält. Für jeden Leiter, an dessen Oberfläche $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist, ist $e'_i = \int \varepsilon_0 Z_N dS_i = 0$, aber nicht nothwendig $\varepsilon_0 Z_N = 0$.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma \frac{e+e'}{r}. \tag{65}$$

Dieses φ hat die Form von φ_0; d. h.: das Feld lässt sich auch bei Anwesenheit beliebiger, beliebig vertheilter Dielektrica in der gleichen Form darstellen, welche wir in Gleichung (3) für den Fall eines homogenen Dielektricums fanden; nur muss man ausser den wirklichen Elektricitätsmengen (e) noch gewisse andere (e') einführen, die in jedem Fall erst zu finden sind. Allgemein lässt sich von diesen e' nur folgendes sagen: sie befinden sich auf den dem „Normalmedium“ (ε_0) eingelagerten Körpern, nicht im ersteren selbst; für jeden einzelnen dieser Körper ist die Summe der e' gleich Null.

Diese Auffassung liegt den älteren Darstellungen der Elektricitätslehre zu Grunde. In ihnen ist das Vacuum das Normalmedium; ist, ausser Leitern, dieses allein vorhanden, so bestimmen die Elektricitätsmengen e das Feld gemäss (3). Werden dann in dieses Feld andere Isolatoren gebracht, so werden dieselben „dielektrisch polarisirt“ oder „durch Influenz, oder elektrostatische Induction elektrisirt“; es bilden sich neue Elektricitätsmengen e', und diese zusammen mit den e bestimmen nun wiederum das Feld gemäss (3). Das Feld ist hier physikalisch in zwei Theile zerlegt. Der Uebergang vom homogenen zum inhomogenen Isolator geschieht unter formaler Aufrechterhaltung des Integralgesetzes (3). Das wird ermöglicht durch Einführung der Grössen $(e + e')$, die Hertz als „freie Elektricität“ bezeichnet. Diesen Grössen kommt die Eigenschaft, in Isolatoren fest an den Körperelementen zu haften, nicht zu; denn die e' hängen selbst vom Felde ab.

In unserer Darstellung ist das Feld physikalisch stets ein einheitliches, die Zerlegung $\varphi = \varphi_0 + \chi$ eine rein rechnerische. Der Uebergang vom homogenen zum inhomogenen Dielektricum geschieht unter Aufrechterhaltung des Differentialgesetzes (A) $\int \varepsilon E_N dS = \Sigma e_i$ oder hiermit gleichwerthig (8) und (9) $\Gamma(\varepsilon E) = \begin{cases}\varrho\\ \sigma\end{cases}$, wobei die e ihre Bedeutung be-

halten. Diese, die wir nach wie vor ausschliesslich als „Elektricität" bezeichnen, haften an den Elementen des Isolators.

Mathematisch sind beide Darstellungen völlig äquivalent; es kann also auch im Gebiet der Elektrostatik keine Erscheinung geben, welche die eine als richtig, die andere als falsch erwiese. Für die Entwicklung der Elektrodynamik aber hat sich die von uns gewählte Darstellung als die fruchtbarere erwiesen.

Wir wollen jetzt weiter voraussetzen, es sei dem Normalmedium ($\varepsilon_0 =$ const) ein einziger polarisirbarer Körper (ε) mit dem Volumen τ und der Oberfläche S eingelagert. Auch Leiter sollen im Felde nicht vorhanden sein (vgl. Anmkg. S. 96). Dann befinden sich die ϱ', σ' ausschliesslich in τ, bezw. auf S, und durch diese drückt sich das „Zusatzpotential" χ aus:

$$\chi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int \frac{\varrho' d\tau}{r} + \int \frac{\sigma' dS}{r}\right\}. \tag{66}$$

Führt man die Werthe aus (62) ein, so folgt durch partielle Integration über τ:

$$\chi = \int \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[E_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + E_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + E_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right] d\tau, \tag{67}$$

wo x', y', z' laufende Coordinaten in τ bezeichnen, und r den Abstand des Punktes $p'(x', y', z')$ vom Punkte $p(x, y, z)$, für welchen der Werth χ gilt. Die Ableitung von (67) aus (66) gilt zunächst nur, solange $\frac{1}{r}$ stetige Function von x', y', z' ist. [Dass $(\varepsilon - \varepsilon_0)\, E_x\,..$ stetig sind in τ, ist in der Form der Gleichung (66) vorausgesetzt; andernfalls würden in (66) noch innere Flächen S_{ik} mit endlichen σ' auftreten; die Gleichung (67) aber würde in unveränderter Form bestehen.] Ist also p ein innerer Punkt, so ist sowohl in (66) wie in (67) die nächste Nachbarschaft von p aus τ auszuschliessen, damit die Gleichheit beider Integrale bestehe. Nun wurde aber in § 3 gezeigt, dass die ausgeschlossenen Gebiete sowohl zu dem Ausdruck in (66) wie in (67) nur verschwindende Beiträge liefern. Die Umformung gilt daher ganz allgemein.

Da nach (61) gilt:

$$E_l = E_{0l} - \frac{\partial\chi}{\partial l},$$

so ergiebt sich aus (67) der folgende Satz:

In ein gegebenes Feld E_0 werde im Raum τ ein „polarisirbarer" Körper gebracht. Dadurch ändert sich das Feld im ganzen Raum; aber das neue Feld E kann sofort für jeden Punkt angegeben werden, sobald es nur in τ gefunden ist.

Wir wollen endlich noch voraussetzen, dass der polarisirbare Körper homogen, also $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ const. sei, und dass er keine wahre Elektrisirung besitze. Die erste Voraussetzung ergiebt nach (62):

$$\varrho' = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\, \Gamma(E);$$

die zweite Voraussetzung bedeutet:

$$\varrho = \varepsilon_1\, \Gamma(E) = 0.$$

Also folgt:

$$\varrho' = 0.$$

Das heisst: Die fictive Elektricitätsvertheilung im Innern eines ungeladenen, homogenen Dielektricums ist Null; dasselbe besitzt eine fictive Ladung nur auf seiner Oberfläche. Das Zusatzpotential, welches ein solcher Körper erzeugt, hat also nach (66) und (62) den Ausdruck:

$$\chi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma'}{r}\, dS, \text{ wo } \sigma' = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\, E_{N_i}. \tag{68}$$

Wir gehen jetzt über zur Betrachtung der mechanischen Kräfte, welche auf einen dem Normalmedium (ε_0) eingelagerten Körper wirken.

A. Kräfte auf starre Körper.

Das Volumen des Körpers heisse wieder τ, seine Dielektricitätsconstante ε; der Körper kann inhomogen sein, und kann auch eine wahre elektrische Ladung besitzen.

Um die Darstellung zu vereinfachen, nehmen wir aber an, dass seine Dielektricitätsconstante stetig variirt und an der Grenze stetig in die Constante der Umgebung (ε_0) übergeht; ferner, dass die wahre Ladung überall endliche räumliche Dichte ϱ besitzt. Die auf $d\tau$ wirkende Kraft heisse $f \cdot d\tau$.

Ueberall, wo der Körper homogen ist, ist dann

$$f_x = \varrho E_x.$$

Das ist die Kraft des Coulomb'schen Gesetzes. Im allgemeinen aber hat die Kraft einen complicirteren Ausdruck; es ist nach (53) S. 87:

$$f_x = \varrho E_x - \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

Führt man nun statt der „wahren" elektrischen Dichte ϱ die „freie" Dichte $(\varrho + \varrho')$ ein, so lassen sich unter gewissen Beschränkungen auch diese Kräfte auf die Form des Coulomb'schen Gesetzes bringen.

Der Körper sei starr. Dann ist für alle virtuellen Verschiebungen die Arbeit bestimmt durch 6 Grössen: die 3 Componenten der Verschiebungskraft F, wo

$$F_x = \int f_x d\tau, \ldots$$

und die 3 Componenten des Drehungsmoments Θ, wo

$$\Theta_x = \int (y \cdot f_z - z \cdot f_y)\, d\tau, \ldots$$

Jedes System von Kräften $f_{1x} \ldots$, welches diesen 6 Grössen die gleichen Werthe ertheilt, ist dem Kräftesystem der $f_x \ldots$ am starren Körper äquivalent.

Es sei nun ein Kräftesystem von folgender Form gegeben:

$$f_x' = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \text{ etc.,}$$

$$\text{wo } p_{ik} = p_{ki};$$

dann erhält man durch partielle Integration über τ:

$$F_x' = \int \Big\{ p_{xx} \cos(Nx) + p_{xy} \cos(Ny) + p_{xz} \cos(Nz) \Big\} dS, \ldots$$

und

$$\Theta'_x = \int \Big\{ (y \cdot p_{xz} - z \cdot p_{xy}) \cos(Nx) + (y \cdot p_{yz} - z \cdot p_{yy}) \cos(Ny)$$
$$+ (y \cdot p_{zz} - z \cdot p_{zy}) \cos(Nz) \Big\} dS, \ldots$$

Also sind F' und Θ' gleich Null, wenn alle p an der Oberfläche S von τ verschwinden.

Wir setzen

$$f'_x = \varrho' E_x + \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x},$$
$$= - \Gamma((\varepsilon - \varepsilon_0) E) \cdot E_x + \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Dies lässt sich (vgl. S. 90) schreiben:

$$f'_x = - \frac{\partial}{\partial x} \Big[\tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \Big] - \frac{\partial}{\partial y} \Big[(\varepsilon - \varepsilon_0) E_x E_y \Big]$$
$$- \frac{\partial}{\partial z} \Big[(\varepsilon - \varepsilon_0) E_x E_z \Big], \text{ etc.}$$

An S ist $\varepsilon = \varepsilon_0$; also sind die Grössen

$F'_x \ldots \Theta_x \ldots$ gleich Null.

Demnach sind den Kräften $f \cdot d\tau$ am starren Körper die Kräfte $f_1 \cdot d\tau$ äquivalent, wenn

$$f_{1x} = f_x + f'_x, \ldots$$

also $$f_{1x} = (\varrho + \varrho') E_x, \ldots \qquad (69)$$

Das heisst: Jeder starre, dem Normalmedium eingelagerte Körper bewegt sich so, als wenn auf jedes seiner Theilchen eine Kraft wirkte, welche die Richtung des Feldes hat, und dem Product aus Feldintensität und „freier" Elektricität des Theilchens gleich ist.

Wesentliche Voraussetzung des Satzes ist, dass an der Grenze des sich als starre Masse bewegenden Körpers die Dielektricitätsconstante bereits den Normalwerth ε_0 besitze. Mit anderen Worten: wenn die obigen Kräfte die Arbeit richtig ergeben sollen, so darf ausschliesslich das Normalmedium Deformationen erleiden; von der Arbeit bei Ver-

zerrungen der „polarisirbaren" Körper, d. h. von den Spannungen in den letzteren, geben die Kräfte f_1 keine Rechenschaft.

Es ist im Punkte $p(x, y, z)$:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ und nach (65)}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{(e+e')_k}{r_k}, \text{ wo } r_k = pp_k;$$

also ist nach (69) die x-Componente der in p auf den Träger von $(e+e')$ wirkenden Kraft:

$$\frac{(e+e')}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{(e+e')_k}{r_k^2}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial x}.$$

Diese Kraft ist die Resultante von Elementarkräften

$$\frac{e+e'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(e+e')_k}{r_k^2},$$

welche die Richtung der wachsenden r_k haben. Also: Die Bewegungen starrer, dem Normalmedium eingelagerter Körper werden vollständig dargestellt durch die Annahme: zwischen je zwei Körpertheilchen wirkt eine abstossende Kraft von der Grösse

$$f_{12} = \frac{(e+e')_1\cdot(e+e')_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r_{12}^2}, \tag{70}$$

wo $(e+e')$ die „freie" Elektricität des Theilchens bezeichnet.

a) ein einziger polarisirbarer starrer Körper.

Eine weitere Vereinfachung erhalten wir durch besondere Annahmen: es sei, wie S. 98, ausser dem von uns betrachteten Körper weder ein polarisirbares Dielektricum noch ein Leiter vorhanden. Dann befinden sich die e' ausschliesslich in dem Körper selbst, und die Abstände r_k dieser e_k' von den Punkten p des Körpers ändern sich daher nicht, da der Körper ja starr sein soll. Es kann daher im Ausdruck der Kräfte φ durch φ_0, oder E durch E_0 ersetzt werden, ohne dass

die virtuelle Arbeit verändert wird. Das heisst: wir dürfen als die auf $d\tau$ wirkende Kraft jetzt auch annehmen: $f \cdot d\tau$, wo

$$f_x = (\varrho + \varrho') \, E_{0x} \, . \, . \qquad (71)$$

b) starrer Körper ohne elektrische Ladung.

Wir specialisiren in anderer Richtung: die weitere Umgebung unseres starren Körpers kann jetzt beliebig sein; lediglich das Medium, welches er bei seinen Bewegungen verdrängt, soll das Normalmedium sein. Der Körper selbst aber soll keine elektrische Ladung besitzen.

Die Kraft f in (53) erhält den Ausdruck:

$$f_x = -\tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial x}, \, . \, .$$

und es wird daher (mit den Bezeichnungen von S. 100):

$$F_x = -\int \tfrac{1}{2} E^2 \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial x} \, d\tau, \, . \, .$$

$$\Theta_x = -\int \tfrac{1}{2} E^2 \left(y \cdot \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial y} \right) d\tau, \, . \, .$$

Da $\varepsilon - \varepsilon_0 = 0$ an der Oberfläche von τ, so folgt durch partielle Integration über τ:

$$F_x = \int \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \frac{\partial(E^2)}{\partial x} \, d\tau, \, . \, .$$

$$\Theta_x = \int \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \left[y \, \frac{\partial(E^2)}{\partial z} - z \, \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] d\tau, \, . \, .$$

Das heisst aber: die Bewegungen des starren, ungeladenen Körpers gehen so vor sich, als ob auf jede Volumeneinheit eine Kraft f wirkte mit den Componenten

$$f_x = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \frac{\partial(E^2)}{\partial x}, \, . \, . \qquad (72)$$

Dieser Ausdruck ist nicht direkt brauchbar, wenn der Körper ohne stetigen Uebergang von ε zu ε_0 gegen seine Umgebung abgegrenzt ist; denn dann kann an der Oberfläche $\frac{\partial(E^2)}{\partial x}, \, . \, .$ nicht gebildet werden.

Er ist aber nützlich in einem besonderen Fall: der Körper unterscheide sich elektrisch nur sehr wenig von dem umgebenden Normalmedium, d. h. es sei $\varepsilon - \varepsilon_0$ sehr klein gegenüber ε_0. Nach (62) und (63) unterscheidet sich das Feld E von dem Felde E_0, welches vorhanden war, ehe man in τ das Normalmedium durch unsern Körper ersetzte, um ein Zusatzfeld Z, welches gegenüber E gleichzeitig mit $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ verschwindet. Es wird daher unter unserer Voraussetzung in erster Näherung:

$$f_x = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \frac{\partial(E_0^2)}{\partial x}, \dots \tag{73}$$

Dieser Ausdruck behält seinen bestimmten Sinn, auch wenn ε sprungweise in ε_0 übergeht. Er zeigt eine Kraft an, welche jedes Körpertheilchen in der Richtung vorwärts treibt, in welcher das ursprünglich gegebene Feld sich am schnellsten ändert. Mit der Richtung des Feldes hat die Richtung der Kraft nichts zu thun.

Der Ausdruck in (73) ist aber nur brauchbar, wenn $\frac{\partial(E_0^2)}{\partial x} \dots$ nicht Null ist. Ist das gegebene Feld E_0 in τ „gleichförmig", d. h. constant nach Grösse und Richtung, so folgt aus (72) als erste Näherung:

$$f_x = (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(E_{0x} \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_{0y} \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_{0z} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$= (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(E_{0x} \frac{\partial Z_x}{\partial x} + E_{0y} \frac{\partial Z_y}{\partial x} + E_{0z} \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right).$$

Da Z zugleich mit $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ verschwindet, so werden also die Kräfte in dem gleichförmigen Feld klein wie die zweite Potenz dieser kleinen Zahl.

B. Kräfte auf beliebige nicht geladene dielektrische Körper.

Alles bisherige bezog sich auf die Kräfte an starren Körpern. — Es lässt sich aber noch ein sehr brauchbarer Ausdruck herstellen für die virtuelle Arbeit bei beliebigen

Verschiebungen und Deformationen eines in das Normalmedium eingebetteten Körpers, unter der einzigen Voraussetzung, dass dieser Körper keine wahre elektrische Ladung besitzt.

Wenn bei irgend welchen Verschiebungen die Energie die Veränderung dW_e erleidet, so ist ganz allgemein von den elektrischen Kräften die Arbeit

$$\partial A = - dW_e$$

geleistet. Wir denken nun im Körper die Constante ε durch das ε_0 des umgebenden Normalmediums ersetzt, im übrigen aber nichts geändert, und nennen für diesen Fall die Energie W_{e0}. Da der Körper keine elektrische Ladung besitzt, so würden beliebige Verschiebungen jetzt das Feld gar nicht ändern; der entsprechende Werth von dW_{e0} ist also Null. Daher können wir schreiben:

$$\partial A = - d(W_e - W_{e0}). \tag{74}$$

Es ist aber nach (50)

$$W_e - W_{e0} = -\tfrac{1}{2}\int (\varepsilon - \varepsilon_0)\,(E_x E_{0x} + E_y E_{0y} + E_z E_{0z})\,d\tau.$$

Also kennt man das auf den Körper wirkende Kräftesystem, sobald man die rechts stehende Grösse als Function der Parameter dargestellt hat, welche die Lage und Form des Körpers bestimmen. Der Integrand hat von Null verschiedene Werthe nur in dem vom polarisirbaren Körper erfüllten Raum τ. Also braucht man auch zur Beurtheilung des Kraftsystems das Feld E nur innerhalb τ zu kennen.

Ehe wir unsere Sätze auf specielle Beispiele anwenden, wollen wir noch eine allgemeine Beziehung ableiten, welche gestattet, aus jeder für ein ungeladenes Dielektricum gefundenen Gleichung sofort eine andere abzuleiten, die ceteris paribus für einen ungeladenen Leiter gilt: In ein beliebiges gegebenes Feld werde an Stelle des Normalmediums (ε_0) ein homogener, ungeladener dielektrischer Körper gebracht. Sein Volumen heisse τ, seine Oberfläche S mit den Normalen N_i nach

innen, N_a nach aussen. Wir setzen also voraus: in τ ist $\varepsilon = \varepsilon_1$ constant; weder in τ noch auf S befindet sich wahre Elektricität. Das heisst:

$$\text{in } \tau\text{: } \varepsilon_1 \, \Gamma(E) = 0$$
$$\text{an } S\text{: } \varepsilon_0 E_{N_a} + \varepsilon_1 E_{N_i} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, da

$$\int \Gamma(E) d\tau = -\int E_{N_i} \, dS, \text{ die weitere:}$$
$$\int \varepsilon_0 E_{N_a} dS = 0.$$

Man lasse nun ε_1 unendlich werden, und fordere, dass das Feld im Aussenraum weiter den allgemeinen Bedingungen genüge, also u. A. endlich bleibe. Dann giebt die Bedingung an S:

$$E_{N_i} = 0,$$

und aus dieser Gleichung zusammen mit: $\Gamma(E) = 0$ folgt (vgl. S. 48 unter g):

$$E \equiv 0 \text{ in } \tau.$$

Wir vergleichen hiermit eine andere Aufgabe: statt des ungeladenen Dielektricums werde ein ungeladener Leiter in das Feld gebracht. Die Bedingungen für τ und S lauten jetzt:

$$E \equiv 0 \text{ in } \tau; \quad \int \varepsilon_0 E_{N_a} dS = 0.$$

Es sind dieselben Bedingungen, die wir soeben fanden; sie bestimmen aber zusammen mit der gegebenen Elektricitätsvertheilung im Aussenraume das Feld E eindeutig (vgl. S. 44 unter b). Das Feld ist also in beiden Fällen das gleiche.

Weiter: zum Werth der Energie trägt in beiden Fällen der Raum τ nichts bei; im Aussenraum aber haben ε und E in beiden Fällen identische Werthe.

Also folgt: wenn in irgend einem Fall die Feld- und Energieänderung gefunden ist, die durch Einführung eines ungeladenen dielektrischen Körpers (ε_1) an Stelle des Normalmediums hervorgerufen wird, so erhält man die Feld- und Energie-

änderung, welche ein ungeladener Leiter von gleicher Gestalt hervorruft, indem man in der Lösung $\varepsilon_1 = \infty$ setzt. — Das gleiche gilt nach (74) für die mechanischen Kräfte.

Dies ist aber eine blosse Rechnungsregel; es bedeutet keineswegs, wie zuweilen behauptet wurde, dass die Dielektricitätsconstante eines Leiters unendlich ist. Dass über diese Grösse aus elektrostatischen Erscheinungen nichts gefolgert werden kann, wurde schon früher (S. 45) hervorgehoben. Messungen anderer Art, welche für diese Grösse vorliegen, haben stets endliche Werthe ergeben. (Siehe Kap. II, § 2.)

Wir wollen endlich noch die Vertheilung der „inducirten" Elektricitätsmengen e' betrachten: im Innern des homogenen Dielektricums ist $\varrho' = 0$ (s. S. 99). An der Oberfläche ist nach (62):

$$\sigma' = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_{N_i} \text{ oder, da}$$

$$\varepsilon_0 E_{N_a} + \varepsilon_1 E_{N_i} = 0, \text{ auch}$$

$$\sigma' = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} E_{N_a}.$$

Wenn nun ε_1 unendlich wird, so wird

$$\sigma' = \varepsilon_0 E_{N_a}.$$

Für den Leiter aber gilt:

$$\text{im Innern: } \varrho = 0$$
$$\text{an } S\text{: } \sigma = \varepsilon_0 E_{N_a};$$

das heisst also: die fingirte Elektricitätsvertheilung im einen Fall ist identisch mit der wahren Elektricitätsvertheilung im andern Fall.

Die ältere Theorie bezeichnet die eine wie die andere als „inducirte" Elektricität. In der That: sie ist gegeben weder für das Dielektricum, noch für den Leiter; sie wird jedesmal gefunden nur durch die vollständige Lösung der Aufgabe: das Feld zu finden. Bekannt ist nur die Summe für den ganzen Körper; sie ist Null. Und wie wir soeben gesehen haben: die beiden Aufgaben — die inducirte Elektricität des Dielektricums und diejenige des Leiters zu

finden — stehen auch mathematisch im engsten Zusammenhang: die zweite bildet lediglich einen Grenzfall der ersten.

Hiernach kann es gewaltsam erscheinen, die beiden Vorgänge systematisch zu trennen, wie wir es gethan haben; es erscheint naturgemäss, die „freie", nicht die „wahre" Elektricität in's Auge zu fassen. Entscheidend für unsere Darstellung ist, dass nur für die „wahre" Elektricität das folgende gilt: sie haftet fest an den Elementen des Isolators; wenn sie im Leiter den Ort wechselt, so ist mit dieser Bewegung (elektrische Strömung) ein ganz bestimmter Energieumsatz verbunden.

Die Aufgabe, für ein gegebenes ursprüngliches Feld E_0 das Zusatzfeld Z zu finden, welches durch einen ungeladenen dielektrischen Körper von bestimmter Form hervorgerufen wird, ist nur für wenige Einzelfälle gelöst, von denen wir die wichtigsten jetzt behandeln wollen.

Allen diesen Fällen ist das folgende Merkmal gemeinsam: es wird vorausgesetzt, dass in dem ursprünglichen Felde nur ein homogener Isolator vorhanden sei, mit Ausschluss von Leitern. Dieser Voraussetzung wird durch die thatsächlichen Versuchsbedingungen in Strenge niemals genügt; denn die Elektricitätsmengen des Feldes E_0 befinden sich thatsächlich stets auf Leitern; damit also die jetzt abzuleitenden Resultate wenigstens eine brauchbare Näherung darstellen, müssen diese Leiter sehr entfernt sein von dem dielektrischen Körper, durch dessen Anwesenheit E_0 in E verwandelt wird.

Wir machen diese Annahme und wir setzen ferner voraus, dass der polarisirbare Körper homogen sei mit der Constante ε. Dann drückt sich das Zusatzpotential aus nach (67):

$$\chi = \int \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[E_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \dots \right] d\tau,$$

oder nach (68):

$$\chi = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \int E_{N_i} \frac{dS}{4\pi r};$$

und die Arbeit bei einer Verschiebung ist nach (74):

$$\partial A = -d\,(W_e - W_{e0}), \text{ wo}$$

$$W_e - W_{e0} = -\tfrac{1}{2}\int (\varepsilon - \varepsilon_0)\,(E_x \cdot E_{0x} + \ldots)\,d\tau.$$

Sowohl das Zusatzfeld, wie die Energieänderung enthalten die Grösse $\varepsilon/\varepsilon_0$. Diese kann daher bestimmt werden erstens aus der Feldänderung, welche der Körper hervorruft, — zweitens aus den mechanischen Kräften, welche er erleidet. Ihre Messung betrachten wir als die gestellte Aufgabe.

Es möge nun das ursprüngliche Feld E_0 im Raum τ gleichförmig sein und durch D bezeichnet werden, — so dass also D_x, D_y, D_z Constanten sind. Wir wollen annehmen, dass auch das neue Feld E, und somit das Zusatzfeld Z in τ gleichförmig sei. Es fragt sich zunächst, ob und unter welchen Bedingungen diese Annahme erfüllbar ist.

Unsere Annahme fordert, dass χ in τ eine lineare Function von x, y, z sei. Es ist aber andererseits, da E_x, E_y, E_z in τ Constanten sein sollen:

$$\chi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[E_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,d\tau + E_y \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\,d\tau + E_z \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\,d\tau\right];$$

oder, da $r^2 = (x - x')^2 + \ldots$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \text{ etc.}$$

und
$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau = \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{d\tau}{r} \text{ etc. ist:}$$

$$\chi = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left[E_x \frac{\partial g}{\partial x} + E_y \frac{\partial g}{\partial y} + E_z \frac{\partial g}{\partial z}\right] \qquad (75)$$

wo $g = \int \frac{d\tau}{4\pi r}$ das Newton'sche Potential des Raumes τ und E_x . . die constanten Werthe in τ bezeichnen.

Damit also χ innerhalb τ linear sei in x, y, z, muss g innerhalb τ ganze Function zweiten Grades von x, y, z sein.

Das ist, wie wir in § 7, S. 50 sahen, der Fall, wenn τ

ein Ellipsoid ist. Es ist dann, wenn die Hauptaxen des Ellipsoids zu Coordinatenaxen genommen werden,

in τ: $$g = \text{const.} - \tfrac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

wo A, B, C gewisse Constanten bedeuten, welche durch die Axenverhältnisse bestimmt sind.

Daraus folgt:

in τ: $$\chi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left[E_x \cdot A \cdot x + E_y \cdot B \cdot y + E_z \cdot C \cdot z\right]$$

und weiter nach (61):

in τ: $$-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \cdot E_x A = E_x - D_x \text{ etc. oder}$$

$$E_x = \frac{D_x}{1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} A}, \quad E_y = \frac{D_y}{1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} B}, \quad E_z = \frac{D_z}{1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} C}. \tag{76}$$

Daher ist für beliebige Punkte des Raumes nach (75):

$$\chi = -\left[\frac{D_x}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + A} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{D_y}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + B} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{D_z}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + C} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}\right] \tag{77}$$

$g = \int \frac{d\tau}{4\pi r}$ die in § 7, S. 50 angegebene Function,

oder auch (s. die letzte Gleichung S. 108):

$$\chi = -\int \left[\frac{D_x \cos(N_i x)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + A} + \frac{D_y \cos(N_i y)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + B} + \frac{D_z \cos(N_i z)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + C}\right] \cdot \frac{dS}{4\pi r}. \tag{78}$$

Wir wollen diese Lösung verificiren:

Das Potential φ_0 des ursprünglichen Feldes ist bestimmt durch folgende Bedingungen:

in τ: $$\Delta\varphi_0 = 0,$$

ausserhalb τ: $\varepsilon_0 \Delta\varphi_0 = -\varrho$ (gegebene Grössen),

an S: $$\frac{\partial \varphi_0}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial N_a} = 0;$$

das Potential φ des neuen Feldes durch folgende Bedingungen:

in τ: $\Delta\varphi = 0$,

ausserhalb τ: $\varepsilon_0 \Delta\varphi = -\varrho$ (dieselben Grössen, wie oben),

an S: $\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial N_i} + \varepsilon_0 \frac{d\varphi}{\partial N_a} = 0$;

also das Zusatzpotential $\chi = \varphi - \varphi_0$ durch die Bedingungen:

in τ und ausserhalb τ: $\Delta\chi = 0$

an S:
$$\varepsilon \frac{\partial\chi}{\partial N_i} + \varepsilon_0 \frac{\partial\chi}{\partial N_a} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_0}{\partial N_i}$$
$$= (\varepsilon - \varepsilon_0)\Big(D_x \cos(N_i x) + D_y \cos(N_i y) + D_z \cos(N_i z)\Big).$$

Dazu kommen jedesmal noch die „allgemeinen Bedingungen.“

Nun ist χ endlich und stetig und verschwindet im unendlichen. Es ist ferner $\Delta\chi = 0$ in τ und ausserhalb τ. Alles dies folgt aus dem Ausdruck von χ in (78), welcher die Form des in §§ 3, 4 behandelten Flächenpotentials besitzt. Es ist also nur noch die an S geltende Bedingung zu verificiren.

Nun folgt aus dem Ausdruck (78) weiter (vgl. § 4):

$$\frac{\partial\chi}{\partial N_i} + \frac{\partial\chi}{\partial N_a} = \frac{D_x \cos(N_i x)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + A} + \frac{D_y \cos(N_i y)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + B} + \frac{D_z \cos(N_i z)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + C}.$$

Aus dem Ausdruck (77) aber und dem Werth von g in τ:

$$g = \text{const} - \tfrac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2) \quad \text{folgt:}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial N_i} = \frac{\partial\chi}{\partial x}\cos(N_i x) + \frac{\partial\chi}{\partial y}\cos(N_i y) + \frac{\partial\chi}{\partial z}\cos(N_i z)$$
$$= \frac{D_x A \cos(N_i x)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + A} + \frac{D_y B \cos(N_i y)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + B} + \frac{D_z C \cos(N_i z)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} + C}.$$

Indem man die erste Gleichung mit ε_0, die zweite mit $\varepsilon - \varepsilon_0$ multiplicirt und addirt, erhält man die zu verificirende Gleichung.

Wir erhalten weiter aus (76):

$$W_e - W_{e0} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{D_x^2}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+A} + \frac{D_y^2}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+B} + \frac{D_z^2}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+C}\right]\tau. \quad (79)$$

Um auf den Werth von $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ zunächst aus dem erzeugten Felde zu schliessen, denke man etwa die a-Axe des Ellipsoids dem ursprünglichen Felde D parallel gestellt.

Es wird dann nach (77)

$$\chi = -\frac{D}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+A} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Es werde weiter das Feld beobachtet in einer Entfernung R vom Mittelpunkt des Ellipsoids, welche gross ist gegen die Dimensionen des letzteren. Dort ist

$$g = \frac{\tau}{4\pi R}.$$

Wenn etwa noch der betrachtete Punkt in der x-Axe (der verlängerten a-Axe) liegt, ist

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\tau}{4\pi R^2},$$

und die Werthe in der Nachbarschaft sind symmetrisch um die x-Axe vertheilt. Daher ist Z parallel mit x, und

$$Z_r = -\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{D.\tau}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+A}. \quad (80)$$

Ist nun $\varepsilon/\varepsilon_0$ eine grosse Zahl, so wird Z_r wesentlich nur abhängig von A, d. h. der Form des Ellipsoids, dagegen nahezu unabhängig von ε, — ausser wenn A sehr klein ist. Nun nähert sich A der Null, wenn die a-Axe sehr gross ist gegen wenigstens eine der beiden anderen Axen (s. S. 53).

Man muss also, da man Rotationsellipsoide benutzen wird, entweder ein sehr gestrecktes mit seiner Rotationsaxe in die Feldrichtung, oder ein sehr flaches mit seiner Rotationsaxe normal zur Feldrichtung stellen. Dann wird Z_r nahezu proportional mit $\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$.

Um auf die Grösse $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ aus den mechanischen Kräften zu schliessen, denke man das Ellipsoid, drehbar um die verticale c-Axe, aufgehängt. Dann ist jede der möglichen Lagen definirt durch den Winkel ϑ, welchen die a-Axe mit der horizontalen Componente H des Feldes D einschliesst, und es wirkt auf das Ellipsoid ein Drehungsmoment zu wachsendem ϑ:

$$\Theta = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}(W_e - W_{e0}).$$

Es ist aber:

$$D_x = H\cos\vartheta,\ D_y = H\sin\vartheta,\ D_z = \text{const},$$

also nach (79):

$$\Theta = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+B} - \frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+A}\right] H^2 \sin 2\vartheta \cdot \tau. \qquad (81)$$

Wenn $a > b$, so ist $A < B < 1$ (s. S. 53) und folglich die Klammergrösse negativ, also auch Θ negativ, wenn $\vartheta < \frac{\pi}{2}$. Das heisst: das Ellipsoid sucht sich mit der grösseren seiner horizontalen Axen in die Feldrichtung zu stellen, — und zwar findet diese Einstellung statt, gleichviel, ob ε grösser oder kleiner als ε_0 ist.

Ist aber $\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ eine sehr kleine Zahl, so wird, da A und B stets echte Brüche sind, das Drehungsmoment Θ proportional mit dem Quadrat dieser kleinen Zahl. — Unter der gleichen Voraussetzung geht (79) über in:

$$W_e - W_{e0} = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2} D^2 \tau.$$

Ist das Feld D nicht in Strenge gleichförmig, aber merklich gleichförmig in τ, so folgt aus diesem Ausdruck eine translatorische Kraft F auf das Ellipsoid, deren x-Componente ist:

$$F_x = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}\frac{\partial(D^2)}{\partial x}\tau.$$

Diese Kraft enthält nur die erste Potenz von $\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$, und sie kann daher, selbst bei langsam variirendem Feld, merklich sein, während das Drehungsmoment unmessbar klein ist. — Die Kraft F ist ferner unabhängig von A, B, C, d. h. von der Form des Ellipsoids. Sie kann betrachtet werden als die Resultante von Elementarkräften $f \cdot d\tau$, welche auf die einzelnen Volumelemente $d\tau$ wirken, wo dann

$$f_x = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2} \frac{\partial (D^2)}{\partial x}$$

zu setzen ist. Durch diese Ausführungen werden die allgemeinen Bemerkungen S. 104 bestätigt.

Wir wollen jetzt specialisiren: es sei $a=b=c$, der Körper eine Kugel. Da jetzt die Lage des Coordinatensystems gegen den Körper keine Bedeutung mehr hat, nehmen wir x parallel dem Feld D. Dann wird aus (77) nach (27) und (28) (S. 54):

$$\left.\begin{aligned} \text{in der Kugel: } \chi &= \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} D \cdot x \\ \text{ausserhalb der Kugel: } \chi &= \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} D \cdot x \cdot \frac{a^3}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

$$\text{wo } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

— und aus (79):

$$W_e - W_{e0} = -\frac{3}{2} \varepsilon_0 \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} D^2 \tau. \qquad (83)$$

Nehmen wir wieder an, das Feld D sei nicht in Strenge gleichförmig, so folgt aus diesem Ausdruck eine auf die Kugel wirkende Kraft F, welche in die Richtung l fällt, in der das Feld D am schnellsten variirt, — deren Werth, nach wachsenden l geschätzt, ist

$$F_l = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \tau \frac{\partial (D^2)}{\partial l}, \qquad (84)$$

und welche daher thatsächlich zu Stellen grösserer oder kleinerer Feldintensität weist, je nachdem ε grösser oder kleiner als ε_0 ist.

Qualitativ bedeutet das: die Kugel sucht diejenigen Stellen auf, in welchen sie möglichst viele (resp. möglichst wenige) Kraftlinien des ursprünglichen Feldes in sich aufnimmt. Besonders ist zu bemerken, dass die Richtung der mechanischen Kraft nichts mit der Richtung der Feldintensität zu thun hat. Es ist $\varepsilon > \varepsilon_0$, wenn ε_0 der Luft, ε aber einem beliebigen festen oder flüssigen Isolator angehört. Die Kräfte auf eine leitende Kugel finden wir nach S. 107, wenn wir $\varepsilon = \infty$ setzen; sie wird also zu Stellen höchster Feldintensität getrieben. Hiermit stimmt die Erfahrung überein, dass kleine nicht elektrisirte, — leitende oder isolirende, — Körper in Luft von elektrisirten Körpern angezogen werden: von den elektrisirten Körpern gehen die Kraftlinien aus; in ihrer Nähe sind sie am stärksten concentrirt.

Quantitativ ergiebt sich, dass die Kräfte auf eine dielektrische und auf eine leitende Kugel vom gleichen Radius, die in dasselbe Feld gebracht werden, im Verhältniss

$$q = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}$$

zu einander stehen. Wird also q gemessen, so findet man

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{1+2q}{1-q}.$$

Auf solche Weise hat Boltzmann die Verhältnisse der Dielektricitätsconstanten (ε) verschiedener Körper zu derjenigen der Luft (ε_0) bestimmt.

Im Anschluss an die letzten Betrachtungen behandeln wir noch den Fall einer Hohlkugel von der Constante ε und den Radien a_1 und a_2, welche in das gleichförmige Feld D gebracht wird.

Das Potential χ hat jetzt ausser den allgemeinen Bedingungen den folgenden Gleichungen zu genügen (s. S. 111):

$$\text{für } r = a_1 \qquad -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_- + \varepsilon \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_+ = (\varepsilon - \varepsilon_0) D \frac{x}{a_1},$$

$$\text{für } r = a_2 \qquad -\varepsilon \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_- + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_+ = -(\varepsilon - \varepsilon_0) D \frac{x}{a_2},$$

im übrigen im ganzen Raum: $\Delta \chi = 0$.

Hier sollen die $\frac{\partial \chi}{\partial r}$ Richtungsderivirte bezeichnen und die Indices — und + bedeuten, dass die Derivirten in unendlicher Nähe der fraglichen Kugelfläche auf der Seite der kleineren, bezw. grösseren r zu bilden sind.

Nun kann aus der Lösung (82) leicht entnommen oder auch direct verificirt werden, dass die Function

$$\begin{cases} \psi_1 = x & \text{für } r < a_1 \\ \psi_1 = x\left(\frac{a_1}{r}\right)^3 & \text{für } r > a_1 \end{cases}$$

den folgenden Gleichungen genügt:

$$\text{für } r < a_1 \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{x}{r},$$

$$\text{für } r > a_1 \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -2\,\frac{x}{r}\left(\frac{a_1}{r}\right)^3,$$

ferner überall, ausser für $r = a_1$:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \text{ stetig und } \Delta \psi_1 = 0.$$

Ebenso gilt für die Function:

$$\begin{cases} \psi_2 = x & \text{für } r < a_2 \\ \psi_2 = x\left(\frac{a_2}{r}\right)^3 & \text{für } r > a_2 \end{cases} \quad \text{das folgende:}$$

$$\text{für } r < a_2 \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{x}{r},$$

$$\text{für } r > a_2 \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = -2\,\frac{x}{r}\left(\frac{a_2}{r}\right)^3,$$

und überall, ausser für $r = a_2$:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \text{ stetig und } \Delta \psi_2 = 0.$$

Bilden wir also

$$\chi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2,$$

so genügt diese Function überall, ausser für $r = a_1$ und $r = a_2$, der Gleichung: $\Delta \chi = 0$. Und es ist ferner, wenn wir

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \beta$$

setzen:

für $r = a_1$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_- = (c_1 + c_2)\frac{x}{a_1},$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_+ = (-2c_1 + c_2)\frac{x}{a_1};$$

für $r = a_2$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_- = (-2c_1\beta + c_2)\frac{x}{a_2},$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_+ = (-2c_1\beta - 2c_2)\frac{x}{a_2}.$$

Diese Function genügt also auch den an den Kugeloberflächen zu erfüllenden Bedingungen, wenn noch c_1 und c_2 aus den Gleichungen:

$$-\varepsilon_0(c_1 + c_2) + \varepsilon(-2c_1 + c_2) = (\varepsilon - \varepsilon_0) D$$

und

$$-\varepsilon(-2c_1\beta + c_2) + \varepsilon_0(-2c_1\beta - 2c_2) = -(\varepsilon - \varepsilon_0) D$$

bestimmt werden.

Wir wollen nur das im Hohlraum entstehende Feld E näher betrachten. Dort ist es gleichförmig, und gleichgerichtet dem ursprünglichen Felde D. Es wird

$$E = D - \frac{\partial\chi}{\partial x} = D - (c_1 + c_2);$$

$$E = \frac{D}{1 + \frac{2}{9}\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}(1 - \beta)}. \tag{85}$$

β ist ein echter Bruch. Das Feld wird daher durch Umgeben mit einer Kugelschale stets geschwächt. Die Schwächung hängt nur ab vom Verhältniss der Radien und dem Verhältniss $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Sie ändert sich auch nicht, wenn ε und ε_0 vertauscht werden. Sie kann bei gegebenen Materialien nicht beliebig weit getrieben werden; denn es bleibt stets

$$E > \frac{D}{1 + \frac{2}{9}\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}}.$$

Nur wenn $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ unendlich wird, wird $E = 0$ selbst im

Innern der dünnsten Schale. Dies ist das bekannte Verhalten einer leitenden Hülle.

Wir wollen endlich noch die Gleichung (73) (S. 104) auf einen speciellen Fall anwenden:

Das Feld E_0 sei ein solches, wie es von zwei entgegengesetzt gleichen Elektricitätsmengen hervorgebracht wird, die auf der x-Axe in gleichen Abständen zu beiden Seiten der yz-Ebene liegen mögen. Aus den Symmetrieverhältnissen folgt dann, dass für kleine Werthe von x, y, z ist:

$$E_0^2 = \text{const} + a^2x^2 - b^2(y^2 + z^2),$$

wo a und b Constanten bedeuten.

In dieses Gebiet nun werde ein dünnes Stäbchen von der Länge $2l$ und dem Querschnitt q so gebracht, dass sein Mittelpunkt sich im Coordinatenursprung befindet, und es sich um diesen in der xy-Ebene drehen kann. Es ist dann für ein Element, welches sich im Abstand s vom Mittelpunkt befindet,

$$f_x \cdot d\tau = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, a^2x \cdot qds$$
$$f_y \cdot d\tau = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\, b^2y \cdot qds.$$

Ist ferner ϑ der Winkel zwischen der Richtung der wachsenden s und der x-Axe, so ist

$$x = s \cdot \cos\vartheta, \quad y = s \cdot \sin\vartheta,$$

und das Drehungsmoment zu wachsenden ϑ:

$$\Theta = \int (x \cdot f_y - y \cdot f_x)\, d\tau = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\,\frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2\vartheta \cdot \int_{-l}^{l} s^2 q ds.$$

Θ hat, wenn ϑ ein spitzer Winkel ist, das Vorzeichen von $-(\varepsilon - \varepsilon_0)$; d. h. das Stäbchen sucht sich in die x-Axe, also in die Richtung der Kraftlinien, „axial“, zu stellen, wenn $\varepsilon > \varepsilon_0$; dagegen in die y-Axe, senkrecht zu den Kraftlinien, „äquatorial“, wenn $\varepsilon < \varepsilon_0$. — Diese Beziehung ist aber keine allgemein gültige; sie ist bedingt durch die besonderen Symmetrie-Verhältnisse des von uns vorausgesetzten Feldes.

Wird das Stäbchen aus seiner Gleichgewichtslage um

einen kleinen Winkel abgelenkt, so führt es um dieselbe Schwingungen aus, deren halbe Periode

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{L}}$$

ist, wo K das Trägheitsmoment um die Drehungsaxe, L die Directionskraft, d. h. den Quotienten aus Drehungsmoment und Ablenkungswinkel bedeutet. Nun ist, wenn d die Dichte des Stäbchens,

$$K = d \cdot \int_{-l}^{l} s^2 q ds$$

$$L = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,(a^2 + b^2) \cdot \int_{-l}^{l} s^2 q ds\,;$$ also

$$T^2 = \frac{\pi^2 d}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\,(a^2 + b^2)}.$$

T hängt in einem gegebenen Felde nur von der Dielektricitätsconstante und der Dichte des Stäbchens, — nicht von seiner Form, — ab. Hieraus würde eine einfache Methode folgen, die Werthe ε verschiedener Isolatoren zu vergleichen; sie ist jedoch nur anwendbar, wenn $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ eine sehr kleine Zahl ist; nur für diesen Fall gilt die Ableitung.

Kapitel II.

Die elektrische Strömung.

§ 1. Allgemeine Gesetze.

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf ein statisches elektrisches Feld, d. h. ein solches, welches ohne Energieumsatz unverändert bestehen kann. Damit dieser Zustand möglich sei, musste in jedem Leiter eine gewisse Bedingung erfüllt sein. Die Gesammtheit der Erscheinungen, welche auftreten, wenn diese Bedingung verletzt ist, nennt man „elektrische Strömung“. Diesen Erscheinungen wenden wir uns jetzt zu.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel: es möge ein Condensator gebildet sein aus zwei Leitern L_a und L_b mit den Elektricitätsmengen e_a und e_b und den Potentialen φ_a und φ_b.

Es sei $\varphi_a > \varphi_b$. Nun werde für eine gewisse Zeit zwischen beiden Leitern eine Verbindung hergestellt durch einen Metalldraht. In diesem Draht ist dann die Bedingung des statischen Zustandes verletzt. Als Folge hiervon finden sich nach Aufhebung der Verbindung und Wiederherstellung eines statischen Zustandes die folgenden Veränderungen vor:

1) Der algebraische Werth von e_a hat sich vermindert, derjenige von e_b um den gleichen Betrag vermehrt.

Hiermit ist eine Abnahme der elektrischen Energie gesetzmässig verknüpft; es hat sich nun

2) der Draht erwärmt, und die erzeugte Wärmemenge, in mechanischem Mass gemessen, ist gleich der verlorenen elektrischen Energie.

Man bezeichnet den Vorgang, dessen Endergebnisse soeben genannt wurden, als einen „elektrischen Strom von L_a durch den Draht nach L_b“, und man definirt diesen Strom (i) quantitativ als die in der Zeiteinheit erfolgte Abnahme von e_a oder Zunahme von e_b:

$$i = -\frac{\partial e_a}{\partial t} = +\frac{\partial e_b}{\partial t}.$$

Mit anderen Worten: wenn S_a (resp. S_b) eine Fläche bezeichnet, welche L_a (L_b) einschliesst, aber L_b (L_a) ausschliesst, und N ihre äussere Normale, so ist i definirt durch:

$$i = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_a} \varepsilon E_N dS = +\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_b} \varepsilon E_N dS. \qquad \text{(a)}$$

Denken wir uns die leitende Verbindung nur während des Zeitelements dt bestehend und bezeichnen mit de die Elektricitätsmenge, welche von L_a auf L_b übergegangen ist, während die Körper selbst ruhen. Dann ist die Abnahme der elektrischen Energie nach Kap. I Gleichung (7') S. 56:

$$de\,(\varphi_a - \varphi_b) = -\left\{\frac{\partial e_a}{\partial t}\varphi_a + \frac{\partial e_b}{\partial t}\varphi_b\right\} dt.$$

Es ist also nach dem oben unter 2) angeführten Erfahrungssatz die in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge:

$$\Psi = -\Sigma \frac{\partial e}{\partial t}\varphi. \qquad \text{(b)}$$

Wir gehen nunmehr zum allgemeinen Fall über: wir nehmen an, es sei in beliebigen Volumtheilen eines Leiters von beliebiger Form das elektrische Gleichgewicht gestört. Was dann vorgeht, lässt sich darstellen mit Hülfe eines Vectors (A), dessen Grösse und Richtung im Leiter von Punkt zu Punkt sich ändert, und den man „die elektrische Strömung“ in dem betrachteten Punkte nennt. Diesem Vector kommen Eigenschaften zu, welche wir durch eine Verallgemeinerung der Gleichungen (a) und (b) erhalten. Die erste derselben lässt sich am einfachsten mit Hülfe einer geometrischen Darstellung aussprechen. Wir ziehen „Strömungslinien“, welche durch ihre Richtung und Dichte die Richtung und Zahlgrösse von A

in derselben Weise darstellen, wie dies für εE durch die Kraftlinien geschah (s. Kap. I, § 6). Dann lautet die Verallgemeinerung von (a):

Die Anzahl von Strömungslinien, welche aus einer beliebigen geschlossenen Fläche S austreten, ist gleich der in der Zeiteinheit erfolgenden Verminderung des Elektricitätsinhalts e_i von S (oder der aus S austretenden Kraftlinien).

In Zeichen: für jede geschlossene Fläche S ist

$$\int A_N dS = -\frac{\partial e_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon E_N dS. \tag{1}$$

Andere Formen von (1) erhalten wir, — wie in Kapitel I bei der Gleichung (A), — durch Specialisirung des von S umspannten Raumes als Volumelement; sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\tau(A) &= -\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma_\tau(\varepsilon E) \\ \Gamma_S(A) &= -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma_S(\varepsilon E) \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Zum Zweck der Erweiterung von (b) betrachten wir einen Raum τ, an dessen Grenzen durchweg die Strömung Null ist, — ein „vollständiges Stromgebiet", wie wir ihn nennen wollen. Wir bilden

$$\Psi = -\Sigma\frac{\partial e}{\partial t}\cdot\varphi = -\int\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma(\varepsilon E)\cdot\varphi\cdot d\tau\,.$$

Dies ist nach (1'):

$$\Psi = \int \Gamma(A)\cdot\varphi\, d\tau\,,$$

und durch partielle Integration, bei welcher das Oberflächenintegral fortfällt:

$$\Psi = \int (A_x E_x + A_y E_y + A_z E_z)\, d\tau\,.$$

Wir nehmen an, dass diese Grösse Ψ auch im allgemeinsten Fall (sofern nur alle Körper ruhen) die per Zeiteinheit in nicht elektrischer Form auftretende Energie darstellt, und weiter, dass hierbei im Volumelement $d\tau$ der Energiebetrag

$$d\Psi = (A_x E_x + A_y E_y + A_z E_z)\, d\tau = AE \cdot \cos(AE) \cdot d\tau \qquad (2)$$

erscheint.*)

Die Verallgemeinerung des Ausdrucks „Wärme" in „nichtelektrische Energieform" ist nöthig, um den allgemeinsten Erfahrungen gerecht zu werden, — ebenso aber auch die Umformung von Ψ, durch welche daraus das Potential φ verschwand: Wir erhielten (b) aus elektrostatischen Sätzen, indem wir zwei Zustände vor und nach dem Strömungsvorgang verglichen. Unsere jetzige Gleichung (2) dagegen beansprucht Gültigkeit in jedem Zeitpunkt des Strömungsvorgangs selbst. Für beliebige nicht-statische Zustände aber existirt, wie wir sehen werden, ein Potential nicht.

Es fragt sich nun, wie A an jeder Stelle des Feldes durch E bestimmt ist. Strömung ist vorhanden, wo in einem Leiter das Gleichgewicht gestört ist, und sie ist nur dort vorhanden. Das heisst nach Gleichung (D): es ist $A = 0$, wo $E = 0$. Die einfachste mögliche Annahme ist also, dass allgemein A proportional und gleichgerichtet mit E sei:

$$A_l = \lambda E_l \qquad (3a)$$

wo λ eine durch das Material des Leiters bestimmte, positive Constante bezeichnet. Diese Gleichung bestätigt sich thatsächlich in demselben Umfange, in welchem die Gleichung (D) Gültigkeit besitzt. Es ist aber leicht einzusehen, dass sie ganz allgemeine Gültigkeit nicht haben kann:

Betrachten wir einen speciellen Fall, den der stationären Strömung. Das Feld soll also nicht statisch, wohl aber der Zeit nach unveränderlich sein. Dann ist auch die elektrische Energie W_e unveränderlich, und folglich die erzeugte nichtelektrische Energie, welche in der Abnahme von W_e ihr Aequivalent findet, in ihrem Gesammtbetrage gleich Null. Diese Energie wird für ruhende Körper vollständig durch die Grösse Ψ dargestellt. Also muss sein:

$$\int (A_x E_x + A_y E_y + A_z E_z)\, d\tau = 0\,.$$

Führt man nun hier die Gleichung (3a) ein, so kommt:

$$\int \frac{A^2}{\lambda}\, d\tau = 0\,.$$

*) Vgl. Schluss von Kap. II.

Daraus aber würde folgen: $A = 0$ im ganzen Leiter. Das heisst: unter unseren Voraussetzungen wäre eine stationäre Strömung bei ruhender Materie überhaupt nicht möglich. Thatsächlich kennen wir nun solche Strömung; sie kommt aber nur vor, wenn chemisch oder physikalisch verschiedene Leiter mit einander in Berührung sind. Wir können also unsere Gleichungen ohne Widerspruch mit der Erfahrung festhalten für homogene Leiter; wir müssen sie fallen lassen, wo die materielle Beschaffenheit des Leiters räumlich variirt. Hier genügen wir der Erfahrung durch die Einführung einer gewissen Richtungsgrösse — K, welche wir als „(innere) elektromotorische Intensität" in dem betrachteten Punkte bezeichnen, und welcher wir folgende Eigenschaften beilegen: sie hat die Richtung, in welcher die materielle Beschaffenheit des Leiters am schnellsten variirt, und sie ist um so grösser, je schneller dieselbe variirt; sie ist Null für jeden Punkt, in dessen unmittelbarer Umgebung der Leiter homogen ist. Allgemeinste Bedingung des elektrischen Gleichgewichts ist, dass im Leiter überall die Feldintensität diesem gegebenen Vector nach Grösse und Richtung entgegengesetzt gleich sei:

$$E_l = K_l; \tag{D'}$$

ist diese Bedingung verletzt, so ist eine Strömung A vorhanden, welche der Abweichung des thatsächlichen E von seinem Gleichgewichtswerth proportional ist:

$$A_l = \lambda\,(E_l - K_l). \tag{3}$$

Dies ist die allgemeinste Beziehung zwischen Strömung und Feldintensität; es ist das „Ohm'sche Gesetz" in seiner umfassendsten Form.

Wo der Leiter homogen ist, gehen (3) und (D') in (3a) und (D) über. In jedem Punkt eines Leiters ist λ eine positive Constante, das „specifische elektrische Leitungsvermögen" der dort befindlichen Materie. In jedem Punkt eines Isolators ist $\lambda = 0$.

Setzt man den Werth von E aus (3) in (2) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} d\Psi &= dJ + dP, \text{ wo} \\ dJ = \frac{A^2}{\lambda}\,d\tau;\; dP &= (A_x K_x + \cdots)\,d\tau = AK\cos(AK)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die in $d\tau$ auftretende nicht-elektrische Energie zerfällt also in zwei Theile. Der erste dJ ist stets positiv; er stellt erfahrungsmässig stets entwickelte Wärme dar, welche als „Joule'sche Wärme" bezeichnet wird; er macht die ganze abgegebene Energie aus an jeder Stelle, wo sich ein homogener Leiter befindet. Wo der Leiter inhomogen ist, kommt ein zweiter Betrag dP hinzu; dieser wechselt sein Zeichen mit der Richtung der Strömung. Auch dP ist ausschliesslich entwickelte Wärme, wenn die Zusammensetzung der Materie in $d\tau$ während der Strömung unverändert bleibt, und wird in diesem Fall „Peltier'sche Wärme" genannt. Im entgegengesetzten Fall ist dP ganz oder zum Theil durch die Veränderung des materiellen Inhalts von $d\tau$ bedingt; solche Antheile wollen wir allgemein als „Aenderung der chemischen Energie" bezeichnen.

Die Möglichkeit materieller Veränderungen ist gegeben durch die Eigenschaften einer besonderen Classe von Leitern: der „Elektrolyte." Ein Elektrolyt ist chemisch zerlegbar in zwei Bestandtheile, seine „Ionen"; elektrische Strömung ist in ihm nur möglich bei gleichzeitiger Zersetzung. Die Zersetzungsproducte treten nicht im Innern des homogenen Elektrolyten auf, sondern dort, wo die Strömung den Elektrolyten verlässt, um in einen anderen Leiter, — sei dieser nun ein Metall, ein anderer Elektrolyt oder ein Gas, — überzutreten. Die in der Zeiteinheit zersetzten Mengen sind nach Faraday's Gesetz der Strömung proportional, — also auch die Aenderungen der chemischen Energie, wie dies unsere Gleichung aussagt.

Den Erfahrungssätzen, welche in den Gleichungen (1) bis (4) formulirt sind, fügen wir noch den weiteren hinzu, dass auch in jedem nicht-statischen Feld die Grösse

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\tau \qquad \text{(B)}$$

die elektrische Energie darstellt.

Diese Sätze enthalten allgemeine Gesetze der Strömung; sie gelten insbesondere unabhängig vom zeitlichen Verlauf derselben. Es sind darin zugleich die einzigen allgemein gültigen Eigenschaften der Strömung aufgeführt.*)

*) Die einzigen nach der Maxwell'schen Theorie; nach den älteren Theorien ist auch die Beziehung zwischen elektrischer Strömung und magnetischem Feld allgemeingültig.

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergiebt sich die Antwort auf die Frage, ob bezw. wann sich auch im Innern von Leitern Elektricität befinden kann. In Kapitel I leiteten wir ab, dass im Gleichgewicht das Innere der Leiter von Elektricität frei sei. Dies beruhte aber auf der Annahme, dass in jedem Leiter $E = 0$ sei, und diese Annahme mussten wir fallen lassen. Wir erhalten jetzt aus (D′) für den Fall des Gleichgewichts

$$\varrho = \Gamma_\tau(\varepsilon K) \text{ und } \sigma = \Gamma_S(\varepsilon K).$$

Es sind dies für jeden Punkt eines gegebenen Leiters fest vorgeschriebene Werthe, welche wir durch ϱ_0 und σ_0 bezeichnen wollen.

Wir fragen nunmehr nach den Aenderungen, welche diese Gleichgewichtswerthe im Fall der Strömung erfahren. Indem man (3) mit $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ multiplicirt und dann die Operation Γ_τ ausführt, ergiebt sich:

$$\Gamma_\tau\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} A\right) = \Gamma_\tau(\varepsilon E) - \Gamma_\tau(\varepsilon K) = \varrho - \varrho_0.$$

Schreiben wir

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = T, \tag{5}$$

so ist

$$\Gamma_\tau\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} A\right) = T \cdot \Gamma_\tau(A) + \left(A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Dies ist unter Benutzung von (1′):

$$= - T \frac{\partial \varrho}{\partial t} + A_N \frac{\partial T}{\partial N},$$

wenn N die Richtung der schnellsten Aenderung von T bezeichnet. Also

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{T}\left[(\varrho - \varrho_0) - A_N \frac{\partial T}{\partial N}\right].$$

Ebenso folgt

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{T}\left[(\sigma - \sigma_0) - A_N\, \delta T\right], \tag{6}$$

wenn N die eine Flächennormale, T den Werth auf der Seite der negativen N, und δT die Zunahme beim Durchgang zur positiven Seite bezeichnet. — Dichte und Strömung stehen

also in Zusammenhang überall da, wo T räumlich variirt. An allen Stellen eines Leiters aber, wo T nicht variirt, gilt

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\varrho - \varrho_0}{T}, \quad -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\sigma - \sigma_0}{T}, \text{ also}$$

$$\varrho - \varrho_0 = \text{const} \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \quad \sigma - \sigma_0 = \text{const} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

An allen solchen Stellen streben folglich beliebig gegebene Dichten mit vorgeschriebener Geschwindigkeit ihren vorgeschriebenen Gleichgewichtswerthen zu, die sie dann für alle Zeit, in der Strömung sowohl wie im statischen Zustand, behalten. Das bedeutet praktisch: wo T räumlich nicht variirt, da haben die Dichten stets ihren festen Gleichgewichtswerth, unabhängig von vorhandener Strömung. Dies gilt insbesondere von jedem Punkt in einem homogenen Leiter; hier ist dieser Gleichgewichtswerth Null. — Die hier eingeführte Grösse T hat eine weitergehende Bedeutung, wie sich sogleich zeigen wird.

§ 2. Erlöschendes Feld. — Elektrolyse.

Wir wurden auf den Begriff der elektrischen Strömung geführt durch einen Strömungsvorgang besonderer Art, die Entladung eines Condensators. Als Resultat der Strömung liess sich hier aussprechen: sie führt die Feldintensität im Leiter ihrem Gleichgewichtswerth zu, und sie bringt damit zugleich die vorhandene elektrische Energie zum verschwinden. Wenn wir aber den Vorgang selbst in seinem zeitlichen Verlauf experimentell näher untersuchen wollten, so würden wir auf keineswegs einfache Erscheinungen stossen. Es liegt dies in dem Umstand begründet, dass die verschwindende elektrische Energie ihren Sitz im Dielektricum des Condensators hat, während die zum Ersatz auftretende thermische Energie in dem Draht erscheint. (Vgl. Kap. V).

Es lassen sich einfachere Verhältnisse herstellen: wir denken uns den Raum τ des Condensators selbst von leitender Materie erfüllt, die wir der Einfachheit wegen als homogen voraussetzen wollen.

In τ soll das Feld E einen von Null verschiedenen Werth

haben, und somit die Bedingung (D) nicht erfüllt sein, im übrigen aber soll das Feld die Eigenschaften eines statischen besitzen: es soll sich aus einem einwerthigen Potential φ ableiten, welches auf jeder der „Belegungen" L_a und L_b einen constanten Werth hat und in τ der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Man kann diesen Zustand, wie wir sehen werden, herstellen und stationär erhalten mittels einer geeigneten leitenden Verbindung zwischen L_a und L_b (nämlich unter Einschaltung sogenannter galvanischer Elemente). Diese Verbindung werde in einem bestimmten Moment aufgehoben. Dann fällt erfahrungsmässig das Feld E zu seinem Gleichgewichtswerth Null ab, und zwar in der denkbar einfachsten Weise, so nämlich, dass die Geschwindigkeit des Abfalls in jedem Moment der noch vorhandenen Feldstärke proportional ist. In Zeichen: es ist

$$-\frac{\partial E_l}{\partial t} = \frac{E_l}{T}, \tag{7a}$$

wo T eine für den Leiter charakteristische Constante, und zwar seiner Dimension nach offenbar eine Zeit ist. Wir wollen sie als die (elektrische) „Relaxationszeit" des Leiters bezeichnen.

Sie hängt in einfacher Weise zusammen mit den uns bereits bekannten elektrischen Constanten: Es sei S eine geschlossene Fläche, welche die beiden Belegungen von einander trennt. Dann ist, da ε und λ in dem homogenen Körper Constanten sind, einerseits nach (1) und (3a):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon E_N dS = \int \Lambda_N dS = \lambda \int E_N dS;$$

andererseits nach (7a):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon E_N dS = \frac{\varepsilon}{T}\int E_N dS.$$

Also folgt:

$$T = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

T ist danach dieselbe Grösse, welche bereits in Gleichung (5) unter gleicher Bezeichnung eingeführt wurde.

Das Integral von (7a) ist

$$E_t = E_{t0}\, e^{-\frac{t}{T}}.$$

Weiter folgt aus (7a), (5) und (3a)

$$-\frac{\partial}{\partial t}(dW_e) = -\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 d\tau) = -\left[E_x\cdot\varepsilon\,\frac{\partial E_x}{\partial t}+\cdot\cdot\right]d\tau$$

$$= +\,[E_x\cdot\lambda E_x+\cdot\cdot]\,d\tau = [E_x A_x+\cdot\cdot]\,d\tau.$$

Also nach (2):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(dW_e) = d\Psi. \tag{8}$$

Während also die Feldintensität zum Werth Null abfällt, verwandelt sich die elektrische Energie jedes Volumelements am Ort ihres Verschwindens selbst in Wärme. Der von uns betrachtete Vorgang hat also dieses wesentliche Merkmal, dass keinem Volumelement von aussen Energie zugeführt wird, — ein jedes, wie wir sagen können, sich selbst überlassen bleibt. Gerade hierdurch ist er für unsere Anschauung wichtig.

Für jeden Isolator ist $\lambda = 0$, also T unendlich; ein beliebig gegebenes Feld kann in ihm ohne Zufuhr fremder Energie unbegrenzt fortbestehen, — wie eine elastische Deformation in einem festen Körper. In einem Leiter aber bricht das Feld unter gleichen Verhältnissen zusammen, — wie die elastische Deformation in einer zähen Flüssigkeit. Für einen jeden Leiter kann, nach später zu besprechenden Methoden, die Grösse $\frac{\lambda}{\varepsilon_0}$ (wo ε_0 Dielektricitätsconstante des Vacuums) bestimmt werden. Mit Hülfe von T folgt dann weiter $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Die Dielektricitätsconstante war bisher nur definirt für Isolatoren; sie wird nun eine messbare Grösse auch für jeden Leiter, dessen T messbar ist.

Damit der besprochene Vorgang der Beobachtung zugänglich sei, darf die Relaxationszeit des Leiters nicht klein sein gegenüber den kleinsten messbaren Zeiten. Die wenigen vorliegenden Beobachtungen beruhen auf Zeitmessungen, die auf etwa eine milliontel Secunde genau sind. Von dieser Grössenordnung etwa ist das T destillirten Wassers. Für die meisten der als „Leiter" angesprochenen Substanzen kann

der Vorgang nicht beobachtet werden; schon nach unmessbar kurzer Zeit finden wir in ihnen den Gleichgewichtszustand. Wir sind berechtigt, anzunehmen, dass dies in der Kleinheit ihrer T begründet ist. Aus dieser Annahme folgt aber, dass die Dielektricitätsconstante dieser Leiter eine endliche Grösse ist, für welche in jedem einzelnen Fall eine obere Grenze angegeben werden kann. Indirectere Methoden, von denen in Kapitel VII die Rede sein wird, gestatten, zu kleineren Werthen des T und somit weiter in das Gebiet der Leiter vorzudringen. Es mag vorweggenommen werden, dass sie die vorstehende Annahme lediglich bestätigt haben.

Bezüglich der Prüfung der Gleichung (8) muss folgendes bemerkt werden: die auftretende Wärme $d\Psi$ kann experimentell localisirt werden. Die elektrische Energie W_e als solche aber kann nicht wahrgenommen werden; nur ihre Umsetzungsproducte, und damit die Aenderung ihres Gesammtwerths, sind der Messung zugänglich. Ihre Vertheilung auf die einzelnen Volumelemente, gemäss dem Ausdruck $dW_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 d\tau$, ist daher zunächst nur eine mathematisch mögliche Zerlegung des Gesammtwerthes. Erscheinungen, wie die jetzt besprochene, sind es, welche dieser Zerlegung physikalischen Inhalt und Werth geben.

Eine naturgemässe Erweiterung des Inhalts von (7a) ist die Annahme, dass das sich selbst überlassene elektrische Feld im inhomogenen Leiter, wo der Gleichgewichtswerth von E eine von Null verschiedene Grösse ist, in gleicher Weise eben diesem festen Werth zustrebt. In Zeichen: für einen beliebigen Leiter

$$-\frac{\partial E_l}{\partial t} = \frac{E_l - K_l}{T} \tag{7}$$

oder

$$E_l - K_l = (E_l - K_l)_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Mittels der Gleichungen (5), (3) und (2) folgt dann wieder die charakteristische Beziehung (8):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(dW_e) = d\Psi,$$

wo nun $d\Psi$ im allgemeinen thermische und chemische Energie enthalten kann.

Schreiben wir (7) in der Form:

$$-\frac{\partial(\varepsilon E_l)}{\partial t} = \lambda(E_l - K_l)$$

und beachten, dass die rechte Seite ganz allgemein $= \Lambda_l$ ist, so ergiebt sich:

Die Strömung durch ein Flächenelement ist allgemein gleich der Anzahl durch das Element hindurchtretender Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit zerfallen würde, wenn dem umgebenden Leiterelement keine elektrische Energie zugeführt würde.

Entsprechend lautet (8):

Die in einem Leiterelement auftretende thermisch-chemische Energie ist allgemein gleich der Abnahme, welche seine elektrische Energie erfahren würde, wenn es sich selbst überlassen bliebe.

Eine naheliegende Folgerung ist: „es zerfallen per Zeit- und normale Flächeneinheit thatsächlich stets Λ Kraftlinien; — es verschwindet per Zeit- und Volumeinheit thatsächlich stets der Betrag $\Lambda E \cos(\Lambda E)$ an elektrischer Energie; — hierin ist das Wesen der elektrischen Strömung, des Verhaltens leitender Materie gegenüber elektrischen Kräften, begriffen; von äusseren Umständen hängt es ab, in welchem Masse die zerfallenen Kraftlinien, und damit die elektrische Energie wieder ersetzt werden."

Diese Folgerung ist hypothetisch nicht nur angesichts der gegenwärtigen Erfahrung; sie erscheint überhaupt der directen experimentellen Prüfung nicht zugänglich. Sie hat sich aber werthvoll erwiesen als heuristisches Princip; denn sie führt zu einer der Grundannahmen der Maxwell'schen Theorie. (Vgl. Kap. VI, § 2 u. 5.)

Die gleiche hypothetische Annahme ist enthalten in der häufig gebrauchten Definition der Strömung, welche durch die Nomenclatur den Anschein einer Identität gewinnt:

„Strömung durch ein Flächenelement ist gleich der in der Zeiteinheit hindurchtretenden Elektricitätsmenge." Aber

die in dieser Definition enthaltene Annahme ist specieller, als die unsrige: da die Endpunkte jeder Kraftlinie durch zwei Elektricitätsmengen + 1 bezeichnet werden, so kann zwar der Zerfall jeder zwischen zwei Endpunkten sich ausspannenden Kraftlinie aufgefasst werden als Wanderung der Elektricitätsmenge 1 vom Ursprung zur Mündung; — aber, wie schon erwähnt, nicht jede Kraftlinie besitzt Endpunkte. In einem Felde, das nur in sich zurücklaufende Kraftlinien enthält, befindet sich nirgends Elektricität. Will man hier die obige Definition aufrecht erhalten, so bedarf man der weiteren Annahme, dass sich in jedem Raumelement entgegengesetzt gleiche Elektricitätsmengen zu Null summiren. Zu dieser Hülfshypothese waren die älteren Darstellungen genöthigt; die unsrige bedarf derselben nicht.

Als Hauptstütze der soeben erwähnten älteren Anschauung, als Hauptschwierigkeit für die neuere, pflegt man die Erscheinungen der Elektrolyse anzuführen. Wir gehen auf dieselben soweit ein, wie es die vorliegende Frage verlangt:

Wir denken einen homogenen Elektrolyten von elektrischer Strömung durchsetzt; eine gewisse Anzahl von Strömungslinien möge an einer Fläche S_a, der „Anode", aus einem metallischen Leiter in den Elektrolyten eintreten; dieselbe Anzahl von Strömungslinien möge an einer Fläche S_k, der „Kathode", in einen metallischen Leiter austreten. Wir bezeichnen:

$$-\int_{S_a} A_N dS = \int_{S_k} A_N dS = i.$$

Dann lehrt die Erfahrung („Faraday's Gesetz"): An S_a erscheint der eine Bestandtheil des Elektrolyten, das „Anion", an S_k der andere Bestandtheil, das „Kation". Die Masse M der in der Zeit t auftretenden Zersetzungsproducte ist proportional mit t, mit i und mit dem Aequivalentgewicht a des Ions, — und ist von nichts anderem abhängig. In Zeichen:

$$M = \eta a i t \tag{9}$$

wo η eine lediglich von den Masseinheiten abhängige, universelle Constante bedeutet.

Aus diesem Erfahrungssatz ist zu folgern: in der Richtung der Strömung findet eine relative Bewegung der beiden Ionen statt, deren Geschwindigkeit der Strömung proportional ist. Genauer: es sei u_1 die Geschwindigkeit des Kations in der Richtung von A, u_2 die Geschwindigkeit des Anions in der entgegengesetzten Richtung, und es seien C Aequivalente des Elektrolyten, also auch jedes Ions, in der Volumeinheit enthalten. Dann treten in der Zeiteinheit durch ein Flächenelement dS nach der Seite seiner Normalen N

$$C u_1 \cdot dS \cdot \cos(A N) \text{ Aequivalente des Kations}$$

und $$- C u_2 \cdot dS \cdot \cos(A N) \text{ Aequivalente des Anions.}$$

Dies gilt für jedes Flächenelement im Innern des Elektrolyten. Ist dagegen dS ein Element der Oberfläche, N die äussere Normale, so findet die Bewegung nur statt auf der Seite der negativen N, sie fehlt dagegen auf der Seite der positiven N, und die obigen Beträge von Kation und Anion sammeln sich daher in der Zeiteinheit an dS. Dies ergiebt in der Zeiteinheit an der Kathode einen Ueberschuss von

$$C \int (u_1 + u_2) \cos (A N)\, dS \quad \text{freien Kation-Aequivalenten}$$

(und an der Anode einen Ueberschuss von ebensoviel freien Anion-Aequivalenten.) Diese Zahl $\frac{M}{at}$ ist aber nach (9):

$$= \eta i = \eta \int A \cos (A N)\, dS.$$

Da dies für jede Fläche S gilt, so folgt:

$$C(u_1 + u_2) = \eta A.$$

Es sei nun der Elektrolyt eine Lösung, — etwa eines Salzes in Wasser, — dann zeigt die Erfahrung weiter: die Concentration der Lösung an den beiden „Elektroden" wird durch die Elektrolyse verändert. Das Kation eines Salzes ist sein Metallbestandtheil; aus dem gleichen Metall möge Anode und Kathode bestehen. Dann wird auf der Kathode das frei werdende Kation niedergeschlagen, — aus der Anode aber werden gleichviel Aequivalente durch das frei werdende

Anion gelöst. Der gesammte Salzgehalt der Lösung also bleibt ungeändert. Aber: der zur Strömung normalen Flächeneinheit der Kathode werden durch die Bewegung („Wanderung") der Ionen in der Zeit Eins zugeführt Cu_1 Aequivalente des Kations; es verschwinden durch Niederschlag $C(u_1 + u_2)$ Aequivalente; die Lösung wird also ärmer um Cu_2 Aequivalente Kation; — desgleichen durch „Wanderung" um Cu_2 Aequivalente Anion; — im ganzen um Cu_2 Aequivalente des Elektrolyten. — (Um denselben Betrag nimmt der Salzgehalt an der normalen Flächeneinheit der Anode zu.) Die an der Kathode aus der Lösung verschwundene Anzahl von Aequivalenten des Elektrolyten steht also zu der Anzahl der auf der Kathode niedergeschlagenen Aequivalente des Kations in dem Verhältniss

$$n_2 = \frac{u_2}{u_1 + u_2}. \qquad \text{(Hittorf.)}$$

Wir setzen noch

$$n_1 = \frac{u_1}{u_1 + u_2}.$$

n_1 und n_2 sind experimentell bestimmbare Grössen. Indem man diese und zugleich $\Lambda = \lambda E$ in die letzte Gleichung einführt, kommt

$$u_1 = \frac{n_1 \lambda}{C} \eta E$$

$$u_2 = \frac{n_2 \lambda}{C} \eta E.$$

Nun zeigt die Beobachtung an einer grossen Zahl von Elektrolyten in verdünnter Lösung, dass die Grössen

$$c_1 = \frac{n_1 \lambda}{C} \text{ und } c_2 = \frac{n_2 \lambda}{C}$$

charakteristische Constanten für das betreffende Ion sind, derart, dass z. B. das erste bei der Feldintensität E stets die Geschwindigkeit

$$u_1 = c_1 \eta E$$

besitzt, mit welchem andern Ion es auch im Elektrolyten vereinigt sein mag. (F. Kohlrausch.) Die Bewegung des Ions erfolgt gegen den Widerstand der Flüssigkeit, in welche es eingelagert ist. Auf die mechanische Kraft, welche sie

aufrecht erhält, lässt sich schliessen, sobald man die Bewegung kennt, welche das Ion in der gleichen Flüssigkeit unter der Wirkung einer bekannten Kraft erhält. Diese Daten werden geliefert durch die Beobachtung der Diffusion der Elektrolyte. Die Vergleichung ergiebt (Nernst) als die Kraft, welche, an einem Aequivalent des Ions wirkend, ihm die Geschwindigkeit u_1 ertheilen würde:

$$f = \frac{u_1}{c_1 \eta^2}, \text{ also } f = \frac{E}{\eta}.$$

Demnach lassen sich die Gesetze der Elektrolyse in den Satz zusammenfassen: in einem Felde von der Intensität E bewegt sich jedes Aequivalent jedes Ions so, als ob auf dasselbe eine mechanische Kraft $\frac{E}{\eta}$ in der Richtung, bezw. entgegen der Richtung von E wirkte. (Aus den Beobachtungen folgt dies direct freilich nur für sehr verdünnte Lösungen, und nicht einmal für alle solche. Die Ueberlegungen, welche zu der obigen Verallgemeinerung führen, gehören wesentlich der Thermodynamik an; sie können hier nicht erörtert werden.) Noch einfacher: jedes Aequivalent jedes Ions bewegt sich in jeder Verbindung und in jedem Felde, wie sich ein kleiner Leiter, geladen mit der ganz bestimmten Elektricitätsmenge $\pm \frac{1}{\eta}$ in einem homogenen Dielektricum bewegen würde.

Es drängt sich die Vorstellung auf: jedes Ionen-Aequivalent ist thatsächlich der Träger einer Elektricitätsmenge $\pm \frac{1}{\eta}$; Strömung im Elektrolyten ist nichts anderes als Fortführung dieser Elektricitätsmengen mit ihren materiellen Trägern. Dann aber erscheinen die Endpunkte der Kraftlinien an den kleinsten Theilchen der Ionen fixirt; die Kraftlinien haben nothwendig Endpunkte.

Auf die Vorhaltung, dass damit unsere frühere Behauptung hinfällig werde, ist zu erwidern, dass die in vorstehenden Sätzen zusammengefassten Erscheinungen aus dem Rahmen nicht nur unserer, sondern nothwendig jeder Darstellung herausfallen müssen, welche sich bescheidet, einen bestimmten Elektrolyten als homogenen Körper zu behandeln, dessen elektrisches Verhalten in jedem Raumpunkt durch die-

selben Constanten, λ und ε, definirt ist, — und allgemein jedes elektrische Feld als einen Raum, in welchem elektrische Constanten und Feldstärke stetige Functionen der Coordinaten sind (abgesehen höchstens von gewissen Flächen). Denn in der obigen Fassung der elektrolytischen Gesetze erscheint der Elektrolyt als Conglomerat mindestens zweier Bestandtheile, deren kleinste Partikeln die Endpunkte der Kraftlinien bilden, — Constanten und Feldstärke also als sprungweise und regellos veränderlich. Die entsprechende, in die Detailstructur eindringende, Darstellung kann nur eine Molecularhypothese liefern. Denken wir sie ausgeführt, so würde aus ihr die unsrige hervorgehen, indem man für elektrische Dichten, wie für alle übrigen Grössen räumlich und zeitlich stetige Mittelwerthe bildete.*)

§ 3. Stationäre Strömung.

Weitaus leichter der Beobachtung zugänglich, und in Folge dessen weitaus genauer erforscht, als der in § 2 besprochene, ist ein anderer specieller Fall der elektrischen Strömung, dem wir uns jetzt zuwenden. Das elektrische Feld möge überall einen von der Zeit unabhängigen Werth haben, „stationär" sein. (Ausserdem sei, — wie stets, wenn nicht das Gegentheil gesagt wird, — vorausgesetzt, dass die Materie ruhe.)

Dann ist u. A. auch $\Gamma(\varepsilon E)$ von t unabhängig, und folglich nach (1) oder (1'):

$$\int \Lambda_N dS = 0 \text{ für jede geschlossene Fläche,} \tag{10}$$

oder

$$\Gamma(\Lambda) = 0. \tag{10'}$$

*) Der scheinbare Vorzug der älteren Anschauung wird durch eine nicht consequente Nomenclatur vorgetäuscht. In diesem Zusammenhang nennt sie „freie Elektricität", was wir „Elektricität" schlechthin nennen. Solche „freie Elektricität" darf auch nach ihr im Innern eines homogenen Leiters nicht vorhanden sein; — und gerade „freie Elektricität" verlangt die moleculare Betrachtung der Elektrolyse als an den Molekeln der Ionen haftend.

Stellen wir also, — wie in Kapitel I die elektrische Polarisation durch Kraftlinien, — die Strömung A nach Richtung und Grösse durch Form und Dichte von Stromlinien dar, so sind diese Linien im Fall stationärer Strömung durchweg in sich zurücklaufende Curven. Wählen wir, — in gleicher Weise, wie in Kapitel I (S. 38f.) Kraftfäden, — „Stromfäden“ zur Darstellung, so ist das Product aus Strömung A und Querschnitt q des Fadens eine Constante. Ein solcher Stromfaden ist durch die Form seiner Leitcurve s und die Werthe der zu jedem s gehörigen Querschnitte q praktisch ausreichend definirt, wenn q und der Krümmungsradius der Leitcurve längs s hinlänglich langsam variiren, und wenn die Lineardimensionen von q sehr klein sind gegenüber allen sonst in Betracht kommenden Längen. Ist die Form des Leiters so beschaffen, dass er in seiner Gesammtheit als ein solcher Faden betrachtet werden kann, so bezeichnet man ihn als „linearen Leiter.“ Einen solchen wollen wir zunächst betrachten. Die materielle Beschaffenheit, und somit λ und K, soll längs s beliebig variiren dürfen. Auch q darf es, sofern nur der obigen Bedingung genügt wird. Der längs s constante Werth

$$Aq = i \tag{11}$$

ist der „Strom“ in dem linearen Leiter. —

Da der elektrische Zustand stationär sein soll, muss die gesammte in der Zeiteinheit in nicht-elektrische Form übergeführte Energie, d. h. das Integral von $d\Psi$, über das ganze Volumen des linearen Leiters erstreckt, Null sein. Es ist aber $d\tau = q \cdot ds$ und $A \parallel s$, also

$$\Psi = \int_O Aq \cdot E_s ds = i \int_O E_s ds = 0$$

oder

$$\int_O E_s ds = 0 .$$

Wir können folglich setzen

$$E_s = - \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s},$$

wo φ eine einwerthige Function seines Arguments s ist.

Grenzen wir ein Stück des Leiters ab durch zwei Querschnitte bei $s = e$ (Eintrittsstelle) und $s = a$ (Austrittsstelle des Stromes), so ist die in diesem Stück abgegebene Energie:

$$\Psi = i\int_e^a E_s\,ds = i\left(\varphi(e) - \varphi(a)\right).$$

Es ist ferner nach (3):

$$\frac{i}{q} = \lambda(E_s - K_s)$$

und folglich

$$i\int_e^a \frac{ds}{\lambda q} = \varphi(e) - \varphi(a) - \int_e^a K_s\,ds.$$

Die beiden Integrale sind Constanten des zwischen e und a liegenden Leiterstücks. Der Werth

$$-\int_e^a K_s ds = \mathcal{E}, \tag{12a}$$

das Linienintegral der (inneren) elektromotorischen Intensität, oder die von e nach a wirkende „(innere) elektromotorische Kraft", ist vollständig bestimmt durch die physikalisch-chemische Natur der auf einander folgenden Substanzen; es ist Null für jedes homogene Leiterstück. — Das Integral

$$\int_e^a \frac{ds}{\lambda q} = w \tag{12b}$$

hängt von der materiellen Beschaffenheit und von der Form des Leiters ab und heisst sein „Widerstand". Mit diesen Bezeichnungen können wir schreiben:

$$iw = \varphi(e) - \varphi(a) + \mathcal{E}. \tag{12c}$$

Die Gleichungen (12) enthalten das Ohm'sche Gesetz für einen linearen Leiter.

Für den ganzen Leiter gilt:

$$iw = \mathcal{E}.$$

Für ein beliebiges Stück eines linearen Leiters gilt:

$$w = [illegible] - [illegible].$$

Ferner erhalten wir für ein beliebiges Leiterstück:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= i^2 w - i\mathcal{E}, \\ J &= i^2 w, \quad P = -i\mathcal{E} \end{aligned}\right\} \quad ([illegible])$$

als Werthe der gesammten auftretenden Energie bezw. ihrer Theile, der Joule'schen Wärme und der Energie der umkehrbaren Processe. —

Wir wollen uns nun eine beliebige Zahl linearer Leiter zu einem Netzwerk zusammengesetzt denken. In jedem Zweige unseres Systems können beliebige elektromotorische Kräfte enthalten sein, — in den Verzweigungspunkten aber müssen wir, um definirbare Verhältnisse vor uns zu haben, die Materie als homogen voraussetzen. Die Bedingung ([illegible]) fordert wieder, dass in jedem Zweige der Strom eine Constante sei; er heisse i_k für den Zweig k. Sie fordert ferner, dass für alle in einem Verzweigungspunkt zusammenlaufenden Zweige

$$\Sigma i = 0 \qquad (14a)$$

sei, wenn alle nach dem Punkt hingerichteten i positiv, alle von ihm fortgerichteten negativ gezählt werden.

Wir nehmen, als Erweiterung unseres früheren Resultates und in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, an, dass auch jetzt für jeden vollständigen Umlauf in unserm System gilt:

$$\int_O E_s\, ds = 0.$$

Dann lässt sich wieder schreiben

$$E_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

wo φ (abgesehen von einer willkürlichen additiven Constante) für jeden Punkt des Netzwerks einen bestimmten Werth hat. Bezeichnen wir die Integrale w und $\mathcal{E}$, erstreckt über den Zweig k, durch w_k und $\mathcal{E}_k$, die Verzweigungspunkte, welche

den Zweig k begrenzen, durch e_k und a_k, so erhalten wir also wie oben:

$$i_k w_k = \varphi(e_k) - \varphi(a_k) + \mathcal{E}_k.$$

Addiren wir alle Gleichungen, welche sich auf die verschiedenen Zweige eines vollen Umlaufs beziehen, so wird wegen der genannten Eigenschaft von φ

$$\Sigma i_k w_k = \Sigma \mathcal{E}_k. \qquad (14\text{b})$$

Die Gleichungen (14a) und (14b) heissen die „Kirchhoff'schen Regeln"; man erhält ihrer in jedem Fall so viele von einander unabhängige, wie Zweige vorhanden sind*). Sie bestimmen also die Grössen i aus den Constanten w und $\mathcal{E}$.

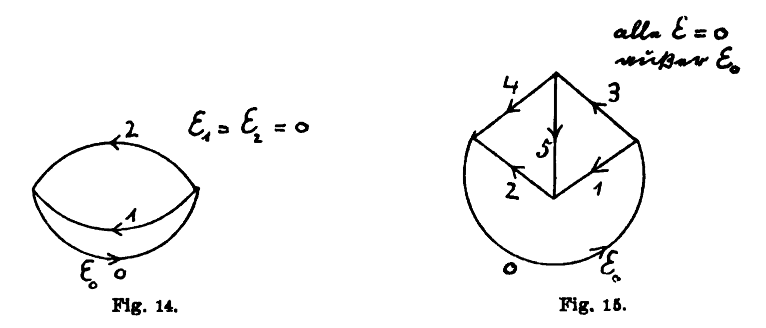


Fig. 14. Fig. 15.

Als Beispiele mögen die durch die Figuren 14, 15, 16 dargestellten Leitersysteme dienen. Die Pfeile bezeichnen die Richtungen, in welchen die $\mathcal{E}$ und i positiv gerechnet sind, die Zahlen die Indices der i und w.

a) Einfache Verzweigung (s. Fig. 14):

$$i_0 = i_1 + i_2;\ i_0 w_0 + i_1 w_1 = i_0 w_0 + i_2 w_2 = \mathcal{E}_0.$$

Daraus i_0, i_1, i_2. Insbesondere:

$$i_1 w_1 = i_2 w_2. —$$

b) „Wheatstone'sche Brücke" (s. Fig. 15). Man fordert: $i_5 = 0$. Dann muss sein:

*) s. Kirchhoff, Ges. Abhdlgn. S. 22.

$$i_1 = i_2 \qquad i_1 w_1 = i_3 w_3$$
$$i_3 = i_4 \qquad i_2 w_2 = i_4 w_4.$$

Daraus:
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}.$$

Die Anordnung dient zur Vergleichung zweier w. Praktisch wichtig ist, dass in die Gleichung $\mathcal{E}_0$ und w_0 nicht eingehen. —

c) Man fordert (s. Fig. 16): $i_2 = 0$. Dann muss sein:

$$i_0 = i_1\,; \quad i_0 w_0 + i_1 w_1 = \mathcal{E}_1\,; \quad i_0 w_0 = \mathcal{E}_2.$$

Daraus
$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{w_0}{w_0 + w_1}.$$

Hat man also durch Abgleichung der w erreicht, dass $i_2 = 0$ wurde, so ist die Vergleichung zweier $\mathcal{E}$ auf diejenige zweier w zurückgeführt. Praktisch wichtig ist, dass durch den Zweig (das „galvanische Element“) mit der elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}_2$ kein Strom geht.

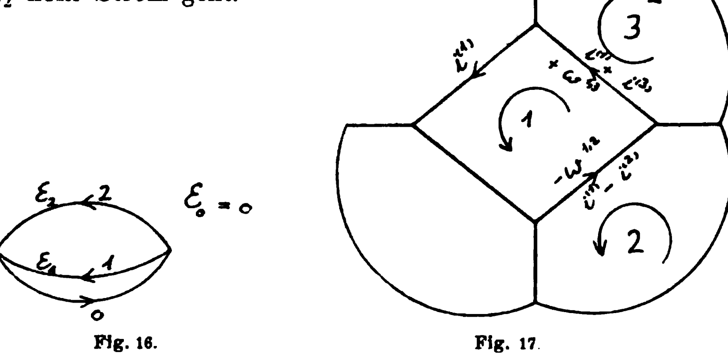


Fig. 16. Fig. 17.

Man kann die zur Bestimmung der i nothwendigen Gleichungen noch in eine andere Form bringen, welche für gewisse Anwendungen Vorzüge besitzt*). Das System sei derartig beschaffen, dass es nach Durchschneidung von h passend gewählten Zweigen keinen vollständigen Umlauf mehr auf-

*) s. Helmholtz, Wissensch. Abhdlgn. I, S. 435 u. unten in Kap. V.

Dann können wir es uns entstanden denken ... von k einfachen Umläufen. In diese ... Figur 17. Einem jeden dieser k Umläufe ... bestimmter Werth von i zu ($i^{(1)}, i^{(2)} .. i^{(k)}$); ... irgend eines Zweiges k ergiebt sich, indem ... Umläufe, denen k angehört, algebraisch ... noch durch $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ .. $\mathcal{E}^{(k)}$ die ... durch $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ .. $w^{(k)}$ die Wider- ... bedeute $+ w^{p,m}$ den Widerstand ... und m^{ten} Umlauf zugleich an- ... je nachdem $i^{(p)}$ und $i^{(m)}$ in diesem ... gesetzt gerichtet sind; — es be- ... die beiden Umläufe keinen ge-

$$= E, - K_s) ds$$

... Umlauf ...:

$$\left.\begin{aligned} \ldots - i^{k} w^{1,k} &= \mathcal{E}^{(1)}, \\ \ldots - i^{k} w^{2,k} &= \mathcal{E}^{(2)} \\ \ldots - i^{k} w^{k} &= \mathcal{E}^{(k)}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

... $w^{p,m} = w^{m,p}$ gegebene Con- ... also die k Grössen ... Gleichungen (14 b) so ... gestatten, und die

... Strömung in Leitern ... für dieselbe fanden wir

... die an linearen ... hinzu:

ele m
eitersy
in wel
Indices

Verzweig
$+ i_2$; $i_0 w_0$
Insbesonde
$i_1 w_1$
tstone'sche Brü
Dann muss sein:

Ges. Abhdlgn. S. 22.

$$\int_{\circlearrowleft} E_l dl = 0 \text{ für jede geschlossene Curve.}$$

der gleichbedeutend:

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}, \; \varphi \text{ einwerthig.}$$

Dies ist nichts anderes als die Bedingung (C), von der r bereits wussten, dass sie für statische Felder gilt. nennen wir auch jetzt das elektrische Potential. E setzen r als überall endlich voraus. Dann können und wollen wir ls eine überall stetige Function der Coordinaten bestimmen. üglich E folgt: es können wohl Flächen existiren, an hen die Normalcomponente E_N unstetig ist; die tangenn Componenten E_S aber sind durchweg stetig (s. Kap. I,).

Zu den beiden Bedingungen (10′) und (C) für den staren Zustand gesellt sich als allgemeines Gesetz der ng das Ohm'sche Gesetz (Gleichung (3)):

$$A_l = \lambda\,(E_l - K_l).$$

haben die Folgerungen aus den drei Gleichungen zu n.

Gleichung (10′) nimmt für eine Unstetigkeitsfläche die

$$A_{1N} = A_{2N}. \qquad (10a)$$

edium 2 ein Isolator. d. h. λ_2 = [illegible] A_1 [illegible]

h $A_{1N} = 0$: oder [illegible]

Normale jetzt [illegible]

A_n [illegible]

gegen einen [illegible]

Grenzfläche. [illegible]

E, K.



weisen würde. Dann können wir es uns entstanden denken durch Superposition von h einfachen Umläufen. In diese lösen wir es auf (s. Figur 17). Einem jeden dieser h Umläufe gehört dann ein bestimmter Werth von i zu ($i^{(1)}$, $i^{(2)} \ldots i^{(h)}$); das thatsächliche i_k irgend eines Zweiges k ergiebt sich, indem man die $i^{(p)}$ derjenigen Umläufe, denen k angehört, algebraisch summirt. Wir bezeichnen noch durch $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)} \ldots \mathcal{E}^{(h)}$ die elektromotorischen Kräfte, durch $w^{(1)}$, $w^{(2)} \ldots w^{(h)}$ die Widerstände der h Umläufe. Endlich bedeute $\pm\, w^{p,m}$ den Widerstand eines Zweiges, welcher dem p^{ten} und m^{ten} Umlauf zugleich angehört, und zwar + oder —, je nachdem $i^{(p)}$ und $i^{(m)}$ in diesem Zweige gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind; — es bedeute den Werth Null, wenn die beiden Umläufe keinen gemeinsamen Zweig besitzen.

Dann giebt die Gleichung

$$i\frac{ds}{\lambda q} = (E_s - K_s)\,ds$$

integrirt über den vollen Umlauf (1):

Ebenso

$$\left.\begin{array}{l} i^{(1)}w^{(1)} + i^{(2)}w^{1,2} + \cdots + i^{(h)}w^{1,h} = \mathcal{E}^{(1)}. \\ i^{(1)}w^{2,1} + i^{(2)}w^{(2)} + \cdots + i^{(h)}w^{2,h} = \mathcal{E}^{(2)} \\ \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \\ i^{(1)}w^{h,1} + i_{(2)}w^{h,2} + \cdots + i^{(h)}w^{(h)} = \mathcal{E}^{(h)}. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Hierin sind die $\mathcal{E}^{(p)}$, $w^{(p)}$ und $w^{p,m} = w^{m,p}$ gegebene Constanten. Die h Gleichungen bestimmen also die h Grössen $i^{(p)}$. (Sie entstehen, wenn man in den h Gleichungen (14b) so viele i_k eliminirt, wie die Gleichungen (14a) gestatten, und die neue Bezeichnungsweise einführt.) —

Wir gehen über zur stationären Strömung in Leitern beliebiger Form. Als eine Bedingung für dieselbe fanden wir bereits in Gleichung (10'):

$$\Gamma(\Delta) = 0.$$

Als zweite Bedingung nehmen wir nunmehr, die an linearen Strömen gewonnene Erfahrung verallgemeinernd, hinzu:

$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_{O} E_l dl = 0 \text{ für jede geschlossene Curve,} \\ \text{oder gleichbedeutend:} \\ E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l},\ \varphi \text{ einwerthig.} \end{array}\right\} \quad (C)$$

Dies ist nichts anderes als die Bedingung (C), von der wir bereits wussten, dass sie für statische Felder gilt. φ nennen wir auch jetzt das elektrische Potential. E setzen wir als überall endlich voraus. Dann können und wollen wir φ als eine überall stetige Function der Coordinaten bestimmen. Bezüglich E folgt: es können wohl Flächen existiren, an welchen die Normalcomponente E_N unstetig ist; die tangentialen Componenten E_S aber sind durchweg stetig (s. Kap. I, S. 18).

Zu den beiden Bedingungen (10′) und (C) für den stationären Zustand gesellt sich als allgemeines Gesetz der Strömung das Ohm'sche Gesetz (Gleichung (3)):

$$A_l = \lambda\,(E_l - K_l).$$

Wir haben die Folgerungen aus den drei Gleichungen zu entwickeln.

Die Gleichung (10′) nimmt für eine Unstetigkeitsfläche die Form an:

$$A_{1N} = A_{2N}. \tag{10a}$$

Ist das Medium 2 ein Isolator, d. h. $\lambda_2 = 0$, so ist $A_{2N} = 0$ und folglich auch $A_{1N} = 0$; oder wenn wir die in den Leiter hinein errichtete Normale jetzt durch n bezeichnen,

$$A_n = 0, \tag{10b}$$

d. h. an der Grenze gegen einen Isolator verläuft die Strömung stets parallel der Grenzfläche. Es folgt weiter aus (3):

$$E_n = K_n,$$

und für die Grenze eines homogenen Leiters:

$$E_n = 0.$$

Die Normalcomponente des Feldes also hat an solchen Grenzflächen im Leiter vorgeschriebene Werthe.

Ist hingegen die Unstetigkeitsfläche Grenze zwischen zwei längs ihr homogenen Leitern, so ist beiderseits: $K_S = 0$, wenn S eine beliebige zur Grenzfläche tangentiale Richtung bezeichnet, und aus (C) folgt (s. oben):

$$E_{1S} = E_{2S}.$$

Aus (3) ergiebt sich also für solche Grenzflächen:

$$\frac{A_{1S}}{\lambda_1} = \frac{A_{2S}}{\lambda_2}. \tag{16}$$

(10a) und (16) enthalten zusammen das „Brechungsgesetz" der Strömungslinien:

1) A_1 und A_2 liegen mit der Normalen der Grenzfläche in einer Ebene.

2) sind α_1 und α_2 die Winkel von A_1 und A_2 mit der Normalen, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A_{1S}}{A_{1N}} \text{ und } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{A_{2S}}{A_{2N}}, \text{ also}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Es giebt also keine „totale Reflexion" für die stationäre Strömung.

Es sei speciell $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ eine verschwindend kleine Zahl. Dann folgt das gleiche für $\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}$. Der Bedingung wird genügt, a) wenn $\operatorname{tg} \alpha_1$ unendlich, $\operatorname{tg} \alpha_2$ endlich ist. Dies bedingt: $A_{1N} = 0$, und weiter $A_{2N} = 0$ wegen (10a); daraus wieder $A_{2S} = 0$. Die Strömung dringt also in 2 gar nicht ein, und ist in 1 parallel der Grenze. Alles verhält sich, wie wenn 2 ein Isolator wäre; es ist der oben schon behandelte Fall. Es kann aber auch b) $\operatorname{tg} \alpha_2$ verschwindend klein sein. Dies bedingt $\frac{A_{2S}}{A_{2N}} = 0$ und weiter $\frac{E_{2S}}{E_{2N}} = 0$. Das heisst: Strömung und Feld sind im zweiten Medium merklich normal zur Grenzfläche; oder auch: die Aequipotentialflächen sind im zweiten Medium

unmerklich gegen die Grenzfläche geneigt. Ueber die Verhältnisse im ersten Medium lässt sich nichts aussagen.

Bezüglich der Elektricitätsvertheilung im stationären Strömungszustand folgt aus den Gleichungen (6) S. 126:

$$\varrho - \varrho_0 = A_N \frac{\partial T}{\partial N}; \qquad \sigma - \sigma_0 = A_N \cdot \delta T.$$

Die Abweichungen der Dichte von den Gleichgewichtswerthen sind also durch die Strömung bestimmt, und können angegeben werden, sofern die Relaxationszeit T bekannt ist. Das letztere trifft zu für verdünnte Lösungen von Salzen in Wasser; T ist für dieselben sehr nahe dem Salzgehalt umgekehrt proportional. Wo also die Concentration der Lösung variirt, da besitzt der Elektrolyt eine angebbare, von der Strömung abhängige, innere elektrische Ladung. Es sind daher an solchen Stellen die Ionen nicht in äquivalenten Mengen vorhanden. — Unabhängig von jeder Kenntniss der T folgt aus den Gleichungen, dass sich im homogenen Leiter bei stationärem Zustand keine Elektricität befinden kann. —

Das Leitungsvermögen λ und die elektromotorische Intensität K sind in jedem Punkt eines Leiters gegebene Constanten. Wir wollen zeigen, dass in einem zusammenhängenden Leitersystem (Raum τ), welches vollständig von Isolatoren umschlossen ist, — einem „vollständigen Stromgebiet“, — die stationäre Strömung eindeutig bestimmt ist, sobald man in τ überall die Werthe λ, und ferner für jede in sich zurücklaufende Curve den Werth von $\int_O K_l \, dl$ kennt.

Dazu beweisen wir zunächst den Hülfssatz, dass die Strömung überall Null ist, wenn für jede in τ verlaufende geschlossene Curve $\int_O K_l \, dl = 0$ ist.

Dies folgt sogleich aus dem am Ende des § 6, Kap. I, bewiesenen Satze (S. 42). Aus der Annahme über K und der Gleichung (C) ergiebt sich nämlich nach (3):

$$\int \frac{A_l}{\lambda} dl = 0$$

für jede geschlossene Curve in τ.

Die Bedingung, dass die Grenze S von τ durch Isolatoren gebildet sein soll, giebt:

$$A_n = 0 \text{ an } S.$$

Die Forderung, dass die Strömung stationär sei, giebt nach (10'):

$$\Gamma(A) = 0 \text{ in } \tau.$$

Dann aber ist (l. c.):

$$A = 0 \text{ in } \tau.$$

Durch das bekannte Verfahren (s. Kap. I, § 7, unter b) folgt aus diesem Hülfssatz die ursprüngliche Behauptung. — Unser Hülfssatz aber lässt sich so aussprechen: ein stationäres Feld in ruhenden Körpern, für welches allgemein $\int_{\circlearrowleft} K_l\, dl = 0$ ist, ist nothwendig ein statisches Feld.

Ist der betrachtete Raum τ kein vollständiges Stromgebiet, so lässt sich über die Werthe von A_n an seiner Oberfläche a priori nichts sagen. Schreibt man aber vor, dass sie Null sein sollen, so bleibt der Beweis unseres Hülfssatzes bestehen. Daraus folgt: die stationäre Strömung in einem beliebigen Leiterstück ist eindeutig bestimmt durch die Einströmung an der Oberfläche und durch die Werthe der $\int_{\circlearrowleft} K_l\, dl$ für alle vollständigen Umläufe in seinem Innern.

Aus der Strömung A folgt dann das elektrische Feld E nach (3), wenn die Werthe der K selbst gegeben sind.

Es ergiebt sich ferner das folgende Superpositionsprincip: Sind in einem vollständigen Stromgebiet die Werthe λ fest gegeben, und ist die Strömung (das Feld) bekannt für zwei verschiedene Systeme der K, K_1 und K_2, so findet man die Strömung (das Feld) für den Fall, dass K_1 und K_2 combinirt werden, durch Superposition. Der Beweis ist zu führen nach dem Muster von Kap. I, § 7, unter d.

Die stationäre Strömung in einem vollständigen Stromgebiet τ ist (s. oben) durch gewisse in τ gegebene Grössen eindeutig bestimmt, also unabhängig von allen Vorgängen ausserhalb τ. Das Energieprincip fordert daher, dass die gesammte bei dem Strömungsvorgang in τ erzeugte Energie für sich Null sei, oder, da die elektrische Energie stationär ist, dass die gesammte in τ auftretende nicht-elektrische Energie Ψ gleich Null sei. Wir wollen zeigen, dass dies zutrifft: es ist

$$\Psi = \int_\tau (A_x E_x + \ldots)\, d\tau, \text{ oder nach (C):}$$

$$= -\int_\tau \left(A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \ldots\right) d\tau, \text{ oder durch partielle Integration über } \tau\text{:}$$

$$= \int_\tau \varphi \cdot \Gamma(A) d\tau + \int_S \varphi \cdot A_n dS,$$

also wegen (10'):

$$\Psi = \int_S \varphi \cdot A_n\, dS. \tag{17}$$

Diese Gleichung gilt für die in einem beliebigen Raum τ bei stationärer Strömung abgegebene Energie. Ist aber τ ein vollständiges Stromgebiet, so ist nach (10b): $A_n = 0$, und folglich

$$\Psi = 0.$$

§ 4. Geschichtete Leiter.

Wir machen jetzt über die Anordnung der Leiter eine Voraussetzung, welche bei allen messenden Versuchen sowohl, wie bei allen praktischen Anwendungen erfüllt ist.

Es ist im allgemeinen möglich, dass an einer Stelle des Leiters etwa in einer Richtung die Temperatur, in einer anderen die materielle Zusammensetzung sich ändert. Eine „Richtung der schnellsten Aenderung der Beschaffenheit“ ist dann nicht definirbar, also die Richtung von K a priori nicht

angebbar. Unsere jetzige Voraussetzung aber ist: es soll sich in dem Leiter eine Schaar von Flächen constanter Beschaffenheit legen lassen; der Leiter soll, wie wir sagen wollen, „geschichtet“ sein. Dann fällt die Richtung von K nothwendig überall in die Normale der Schichten.

Bezüglich der Grösse von K bedarf der Fall einer besonderen Betrachtung, welcher häufig als der typische Fall behandelt wird, — der Fall, wo in einer Fläche S mit der Normale N zwei verschiedene Körper, wie etwa Kupfer und Zink, zusammenstossen. Man pflegt anzunehmen, dass dann $K = K_N$ unendlich ist, und ebenso E_N, derart jedoch, dass sowohl $E_N - K_N$, wie auch $K_N \delta N$ endliche Grössen bleiben, wo δN die unendlich kleine Dicke der Uebergangsschicht bezeichnet. Hieraus folgt an S eine unstetige Aenderung des Potentials vom Betrage $E_N \delta N = K_N \delta N$. Dieser Potentialsprung hat also einen durch die Natur der beiden Leiter fest gegebenen Werth, welchen man die „elektrische Differenz“ derselben nennt. Die Fläche S heisst „elektromotorische Fläche.“ Es folgt ferner nach (3), dass A endlich bleibt, und dass auch der durch die Strömung bedingte Energieumsatz an der Fläche S

$$\Psi = \int E \, \delta N \cdot A_N dS$$

endlich ist. Es wird aber die elektrische Energie für die Flächeneinheit von S:

$$\tfrac{1}{2} \varepsilon E_N^2 \delta N,$$

also unendlich wie E; d. h. es würde einen unendlichen Energieaufwand erfordern, den vorausgesetzten Zustand: Berührung der beiden heterogenen Leiter, hervorzurufen. Diese unzulässige Consequenz vermeiden wir, wenn wir die auch sonst wahrscheinliche Annahme machen, dass der Uebergang von einem Leiter zum andern stets in einer Schicht von endlicher, wenn auch sehr kleiner, Dicke erfolgt, in welcher die physikalischen Constanten sich schnell, aber stetig ändern. In dieser Schicht ist dann K gross, aber endlich. Wir werden also K und E als überall endlich voraussetzen. —

Es sei nun α der Parameter der Flächenschaar, welche

die Schichtung unseres Leiters charakterisirt; die Gleichung einer Schicht etwa

$$g(x, y, z) = \alpha,$$

und N ihre Normale im Punkte p.

Dann ist

$$K_l = f \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial l} \text{ und } K = f \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial N}.$$

K soll wachsen mit $\frac{\partial \alpha}{\partial N}$. Macht man die einfachste Annahme, dass es mit $\frac{\partial \alpha}{\partial N}$ proportional, und im übrigen nur von der Beschaffenheit der Materie in p abhängig ist, so ist f lediglich Function von α. Also wird

$$K_l = f(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial l} = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial l} = - \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial l}. \tag{18}$$

Wenn sich noch zeigen liesse, dass v eine einwerthige Function von x, y, z ist, so wären die Voraussetzungen des Hülfssatzes auf S. 145 erfüllt, und es ergäbe sich, dass in einem geschichteten Leiter eine stationäre Strömung nicht möglich ist. Es fragt sich also: ist v nothwendig einwerthig, wenn K_l eine eindeutig definirte Grösse ist?

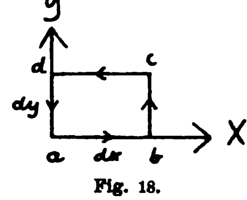


Fig. 18.

Wir bilden das Linienintegral von K um die Begrenzung des unendlich kleinen Rechtecks $dx\,dy$. Zu demselben tragen bei, wenn x, y die Coordinaten von a sind, (s. Fig. 18)

die Strecke ab: $(K_x dx)_y$

" " bc: $(K_y dy)_{x+dx}$

" " cd: $-(K_x dx)_{y+dy}$

" " da: $-(K_y dy)_x$.

Das Integral ist daher:

$$\left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial K_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial K_x}{\partial y},$$

also der Factor von $dx\,dy$ gleich Null. Die Coordinatenrichtungen sind willkürlich; also ergiebt sich: Die Gleichung

$$K_l = -\frac{\partial v}{\partial l} \qquad \text{(a)}$$

ist gleichbedeutend mit:

$$\frac{\int\limits_{\circ} K_l dl}{dL} = 0, \qquad \text{(b)}$$

wo dL ein rechtwinkliges Flächenelement und $\circ$ seine Randcurve bedeutet. —

Andrerseits: die Beziehung

$$K_l = -\frac{\partial v}{\partial l},\ v \text{ einwerthig}, \qquad \text{(a')}$$

ist gleichbedeutend mit:

$$\int\limits_{\circ} K_l\, dl = 0 \text{ für jede geschlossene Curve.} \qquad \text{(b')}$$

Die Frage: folgt (a') aus (a)? ist also identisch mit der Frage: folgt (b') aus (b)? Die Antwort hängt ab von der geometrischen Beschaffenheit des Raumes τ, für welchen die Prämisse gelten soll.

Man nennt einen Raum τ zusammenhängend, wenn sich jeder seiner Punkte mit jedem andern durch eine ganz in τ liegende Linie verbinden lässt; — einfach zusammenhängend, wenn diese Eigenschaft durch einen Querschnitt (d. h. eine Schnittfläche, deren Randcurve ganz auf der Oberfläche von τ liegt) verloren geht; — mehrfach zusammenhängend, wenn dies nicht der Fall ist.

Uns interessiren nur einfach und zweifach zusammenhängende Räume. Zweifach zusammenhängend heisst ein Raum, wenn er durch einen Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt werden kann.

Einfach zusammenhängend ist der ganze unendliche Raum, der Raum einer Kugel, der Raum ausserhalb einer Kugel, der

Raum einer Hohlkugel. Zweifach zusammenhängend ist a) ein ringartiges Gebilde, b) der Raum, welcher übrig bleibt, nachdem ein solches aus einem einfach zusammenhängenden Raum herausgeschnitten ist.

Ein einfach zusammenhängender Raum τ hat die Eigenschaft, dass sich durch jede geschlossene Curve l, welche ganz in τ verläuft, stets eine Fläche L legen lässt, welche ebenfalls ganz in τ liegt, und l zur vollständigen Begrenzung hat. Für einen mehrfach zusammenhängenden Raum gilt dies nicht:

a) durch eine geschlossene Curve im Ringkörper, welche den Ring durchläuft, lässt sich keine Fläche begrenzen, welche ganz im Ringkörper liegt. Jede geschlossene Curve aber, welche im aufgeschnittenen Ringkörper noch möglich ist, lässt sich durch eine ganz in ihm gelegene Fläche ausfüllen. —

b) Eine Curve, welche den Ring umschlingt, lässt sich durch keine Fläche ausfüllen, welche nicht den Ringkörper durchbricht. Wenn aber der Aussenraum durch einen Querschnitt, — er hat die Form einer dem Ring angehefteten Membran, — einfach zusammenhängend gemacht ist, so sind in dem auf solche Weise neu begrenzten Raum keine den Ring umschlingenden Curven mehr möglich.

Können wir nun durch eine in τ gegebene, geschlossene Curve eine ganz in τ liegende Fläche begrenzen, so zerlegen wir diese durch zwei Curvenschaaren in rechtwinklige Elemente; für die Randcurve jedes Flächenelements gilt (b). Wir addiren alle Gleichungen von der Form:

$$\int\limits_{\circ} K_l \, dl = 0 \cdot dL$$

und beachten, dass jedes Linienelement (s. Fig. 19 a. f. S.), welches zwei Flächenelemente trennt, zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, dass also links nur das Integral über die vorgelegte Curve übrig bleibt. So folgt (b'). Also: (b') folgt aus (b), wenn die Construction für jede geschlossene Curve in τ möglich ist, — d. h. wenn τ einfach zusammenhängend ist. Ist τ mehrfach zusammenhängend, so ist die

Gleichung (b′) nicht die geometrisch nothwendige Folge unserer Prämissen; sie kann aber selbstverständlich auch dann erfüllt sein. Das letztere trifft erfahrungsmässig zu für jede ringartig geschlossene Schichtenfolge aus nicht-elektrolytischen (metallischen) Leitern von gleichförmiger Temperatur. Für jeden solchen Ring ist der durch die ganze Schichtenfolge erstreckte Werth von $\int K_l\, dl$, oder in andrer Ausdrucksweise: die Summe aller elektrischen Differenzen, gleich Null. Es ist in ihm ein stationärer Strom nicht möglich. Dieser Satz ist das „Volta’sche Gesetz der Spannungsreihe.“ Die theoretische Begründung aus allgemeinen physikalischen (thermodynamischen) Principien, welche man ihm geben kann, liegt ausserhalb des Rahmens unserer Untersuchung.

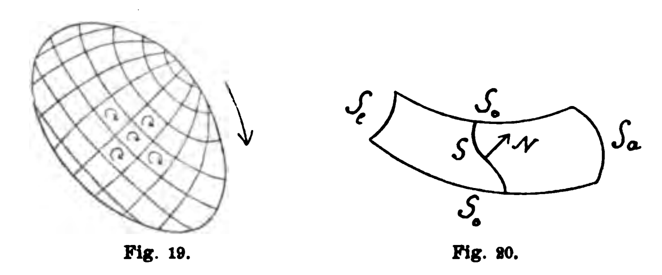


Fig. 19. Fig. 20.

Unser geschichteter Leiter erfülle zunächst einen einfach zusammenhängenden Raum τ. Wenn dann eine stationäre Strömung in ihm möglich sein soll, so kann diese nur einen Theil eines vollständigen Stromsystems bilden; τ muss mit einem Theil seiner Oberfläche an andere Leiter grenzen. Dieser Theil bestehe aus zwei getrennten Flächen S_e und S_a, deren jede in homogener Leitersubstanz verläuft, also einen constanten Werth von v besitzt, und zugleich eine Fläche constanten Potentials ist. (Die letztere Forderung ist z. B. stets erfüllt, wenn unser Leiter an einen andern von sehr viel grösserem Leitungsvermögen grenzt; s. S. 144.) Den Rest der Oberfläche bilde die „Mantelfläche“ S_0, mit welcher τ an Isolatoren grenzt (s. Fig. 20).

Wir führen ein

$$\varphi' = \varphi - v, \tag{19}$$

so dass nach (C) und (18) aus (3) wird:

$$A_l = -\lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial l}. \tag{20}$$

Die Strömungslinien bilden die normalen Trajectorien der Flächen $\varphi' = \text{const.}$ und haben die Richtung von grösseren zu kleineren φ'-Werthen. Sie durchsetzen insbesondere normal die Grenzflächen S_e und S_a.

Die Function φ' ist einwerthig und stetig in τ, und hat nach (10'), (10b) und unseren speciellen Annahmen den folgenden Bedingungen zu genügen:

$$\text{innerhalb } \tau: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) = 0$$

$$\text{an } S_0: \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 0$$

$$\text{an } S_e: \quad \varphi' = \varphi_e' = \text{const.}$$

$$\text{an } S_a: \quad \varphi' = \varphi_a' = \text{const.}$$

Diese Bedingungen bestimmen φ' eindeutig (s. Kapitel I, § 7, unter h), und somit auch A.

Nun bezeichne man durch Φ eine Function, welche in τ und an S_0 denselben Gleichungen genügt, wie φ', an S_e und S_a aber den specielleren:

$$\text{an } S_e: \ \Phi = 1; \quad \text{an } S_a: \ \Phi = 0.$$

Ist diese Function gefunden, so ist

$$\varphi' = \varphi_a' + (\varphi_e' - \varphi_a')\,\Phi;$$

denn dieses φ' genügt dann allen Bedingungen. Es folgt

$$A_l = -(\varphi_e' - \varphi_a')\,\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial l}$$

oder, wenn wir wie in (12a) schreiben:

$$-\int_e^a K_l dl = -(v_e - v_a) = \mathcal{E},$$

$$A_l = -[\varphi_e - \varphi_a + \mathcal{E}]\,\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial l}. \tag{21}$$

In den Bestimmungsgleichungen für Φ kommen weder φ_e und φ_a noch die K vor; sie enthalten ausser geometrischen Daten nur noch die Werthe der λ und, falls λ eine Constante in τ ist, auch diese nicht.

Die Strömung hängt also von den Grössen K nur insoweit ab, als diese die gesammte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ bestimmen. Aus der Strömung folgt die Feldintensität nach (3) an jeder Stelle, wo K bekannt ist. Also ergiebt sich: wenn innerhalb einer gewissen Schicht die Grössen K geändert werden, so bleiben davon alle elektrischen Erscheinungen ausserhalb der Schicht unberührt, sofern nur das durch die Schicht erstreckte Linienintegral von K unverändert blieb. Handelt es sich insbesondere um die Grenzschicht zweier heterogener Leiter, so macht es für die Erscheinungen ausserhalb dieser Schicht keinen Unterschied, ob man, wie dies in der Regel geschieht, in ihr eine endliche „elektrische Differenz" an einer Fläche oder, wie wir es thaten, endliche Werthe von K annimmt, falls nur das Linienintegral von K mit jener elektrischen Differenz übereinstimmt.

Wir denken nun (vgl. Fig. 20) durch den Leiter eine beliebige Fläche S gelegt, deren vollständige Begrenzung auf der Mantelfläche S_0 liegt; N sei diejenige Normale von dS, welche von S_e nach S_a weist. Durch S_0 treten keine Stromlinien; also ist nach (10) die Grösse

$$\int A_N dS = i, \tag{22}$$

d. h. die Anzahl der in der Richtung von S_e nach S_a durch S hindurchtretenden Stromlinien, unabhängig von der besonderen Wahl der Fläche S. Die Grösse i heisst der von S_e nach S_a durch den Leiter fliessende „elektrische Strom."

Es ist nach (21)

$$i = -(\varphi_e - \varphi_a + \mathcal{E})\int \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS.$$

Setzen wir

$$-\int \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS = \frac{1}{w}, \tag{23}$$

so wird

$$iw = \varphi_e - \varphi_a + \mathcal{E}.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach überein mit der für lineare Leiter gefundenen Gleichung (12c). Die Zeichen i, $\mathcal{E}$, φ_e, φ_a haben hier genau die gleiche Bedeutung wie dort. w ist hier wie dort eine Grösse, welche durch die Werthe von λ und geometrische Daten bestimmt ist; sie heisst auch hier der „Widerstand" des Leiters. Es ist aber zu beachten, dass für ein gegebenes Stück leitender Substanz der Widerstand erst dann eine definirte Grösse ist, wenn die Oberfläche in bestimmter Weise in drei Theile zerlegt ist, nämlich S_e und S_a, durch welche die Strömung normal eintritt, bezw. austritt, und S_0, durch welche keine Strömung hindurchtritt. Aus den Bedingungen für Φ folgt, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial N}$ überall negativ ist; also ist w stets eine positive Grösse. Ist λ constant in τ, so ist Φ unabhängig von λ, und folglich w umgekehrt proportional mit λ. $\frac{1}{\lambda}$ wird auch als „specifischer Widerstand" des homogenen Leiters bezeichnet.

Denken wir, es sei τ ein schalenförmiger Raum, dessen vollständige Begrenzung die Flächen S_e und S_a bilden. Dann ist Φ vollkommen bestimmt durch die Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit und die Gleichungen:

$$\text{in } \tau: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \cdots = 0$$

$$\text{an } S_e: \quad \Phi = 1$$

$$\text{an } S_a: \quad \Phi = 0.$$

Diese Forderungen sind identisch mit denjenigen für das elektrostatische Potential in einem Condensator, wenn die Werthe der Dielektricitätsconstante ε im letzteren Fall überall den Werthen von λ in der Strömungsaufgabe proportional sind. Es würde also die Lösung einer jeden derartigen Strömungsaufgabe zugleich die Lösung einer Condensatoraufgabe enthalten und umgekehrt. —

Sei im Condensator ε constant, im geometrisch gleichen

Leiter λ constant, dann ist Φ in beiden Fällen durch die gleichen Bedingungen bestimmt. S ist jetzt eine beliebige geschlossene Fläche, welche S_e von S_a trennt. Die Capacität des Condensators ist, wenn e die Elektricitätsmenge auf S_e bezeichnet:

$$c = \frac{e}{\Phi_e - \Phi_a} = e = -\varepsilon \int \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS.$$

Der Widerstand w des Leiters ist gegeben durch:

$$\frac{1}{w} = -\lambda \int \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS, \text{ also}$$

$$cw = \frac{\varepsilon}{\lambda}. \tag{24}$$

Nun ist zwar der vorausgesetzte Fall in Strenge nicht realisirbar; denn die von S_e durch τ nach S_a führenden Stromlinien müssen nothwendig ausserhalb τ nach S_e zurückkehren; es kann also thatsächlich die Fläche S_0 in der Strömungsaufgabe nie fehlen. Andrerseits lässt sich das genaue Analogon von S_0 in der elektrostatischen Aufgabe nicht herstellen; denn es giebt zwar Körper, für welche $\lambda = 0$ ist (die Isolatoren), aber nicht solche, für welche $\varepsilon = 0$ ist. Das folgende wird zeigen, dass die hervorgehobene Analogie gleichwohl von Werth ist.

Der Leiter sei homogen und habe die Form eines Hohlcylinders von der Länge l und den Radien r_1 und $r_2 > r_1$.

S_e sei die Fläche $r = r_1$,

S_a „ „ „ $r = r_2$,

S_0 sei gebildet von den zwei zur Axe normalen Schnitten. Nach Kapitel I, S. 70 haben wir

$$\Phi = \frac{\lg {}^{r_2}\!/_{r}}{\lg {}^{r_2}\!/_{r_1}}, \qquad w = \frac{\lg {}^{r_2}\!/_{r_1}}{\lambda \cdot 2\pi l}.$$

Während aber die Lösung in Kapitel I nur galt für die von den Enden unendlich entfernten Theile eines unendlich langen Cylinders (praktisch also für die Differenz der Capacitäten zweier langen Cylinder), gilt die jetzige Lösung in Strenge

für beliebige Dimensionen. Denn die an den Endflächen S_0 neu hinzukommende Bedingung: $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ wird durch unser Φ befriedigt.

In gleicher Weise lassen sich die in Kap. I für nicht-coaxiale Cylinderflächen erhaltenen Resultate übertragen. —

Die Grenzfläche S_0 eines homogenen Leiters sei ein Theil eines Kegelmantels von beliebiger Form und dem Oeffnungswinkel α, während die Flächen S_e und S_a Theile von Kugelflächen um die Spitze des Kegels mit den Radien r_1 und $r_2 > r_1$ sein sollen. Die Anschauung führt darauf, dass die Strömung radial und mit nach allen Richtungen gleichförmiger Dichte verläuft. Dies giebt

$$\Lambda = \frac{a}{r^2}, \text{ also } \Phi = \frac{A}{r} + B.$$

Φ genügt thatsächlich allen Bedingungen, wenn $\frac{1}{A} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ gesetzt und B passend bestimmt wird.

Es wird:

$$w = \frac{1}{\lambda \cdot \alpha}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Dieses w geht in den Werth von $\frac{1}{c}$ für den Kugelcondensator, Gleichung (40) S. 69, über, sobald wir $\alpha = 4\pi$ setzen (und $\lambda = \varepsilon$). Auch hier ist in der Strömungsaufgabe die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Oeffnungswinkel möglich, weil die neue Grenzfläche aus Strömungslinien gebildet ist. —

Diese Bemerkung lässt sich verallgemeinern: Wenn das Strömungsproblem für einen Leiter gelöst ist, den die Flächen S_e und S_a allein begrenzen (was nie einer realisirbaren Anordnung entspricht), so stelle man eine Grenzfläche S_0 aus Stromlinien her. Auch in dem neu begrenzten Raum genügt das frühere Φ allen Bedingungen und ist folglich die Lösung. Aus ihm berechnet sich w nach (23); w ist durch die Begrenzung grösser geworden, weil S sich verkleinert hat. —

Es sei der Leiter ein homogener Cylinder, die Flächen S_e und S_a seien zwei zur Axe senkrechte Ebenen; dann ist,

wie leicht ersichtlich, die Strömung parallel der Axe und über den Querschnitt gleichförmig vertheilt. —

Habe endlich der Leiter eine Form, welche gestattet, ihn als „linearen Leiter“ (s. S. 137) mit der Leitcurve s und dem variablen Querschnitt q zu behandeln. Dann werden die Bedingungen (10b) und (10) dadurch befriedigt, dass Λ parallel s und $q\Lambda$ unabhängig von s ist. Da nun allgemein

$$\Lambda_l = \text{const.}\ \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial l},$$

so folgen daraus als Bedingungen für Φ:

$$\Phi \text{ nur Function von } s, \text{ und } q\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial s} = c.$$

$$\text{Daraus } \Phi = c \int \frac{ds}{q\lambda} \text{ und, da } \Phi_e = 1,\ \Phi_a = 0 \text{ sein muss:}$$

$$-1 = c \int_e^a \frac{ds}{q\lambda}, \text{ wodurch } c \text{ bestimmt ist.}$$

Es wird aber die allgemeine Definitionsgleichung (23) für w in unserm Fall

$$\frac{1}{w} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial s} q = -c; \text{ also}$$

$$w = \int_e^a \frac{ds}{q\lambda}.$$

Hiermit ist die specielle Definitionsgleichung (12b) wiedergewonnen. —

Wenn man w nach der allgemeinen Definition (23) bestimmt, so sind die früher entwickelten Sätze über verzweigte lineare Leiter ohne Aenderung ihrer Form auf beliebige Leiter übertragbar, sofern diese nur in der Nähe der Verzweigungspunkte als lineare betrachtet werden können.

Bisher behandelten wir ein, aus einem geschichteten Leiter gebildetes, unvollständiges Stromgebiet. Wir gehen über zur Behandlung eines vollständigen Stromgebietes. Dieses muss (s. S. 152) nothwendig mehrfach zusammen-

hängend sein. Wir beschränken uns auf den Fall eines ringartigen, also zweifach zusammenhängenden Gebietes τ. Eine Strömung kann, wie oben gezeigt, in ihm existiren, wenn v in τ mehrwerthig ist. Sie existirt dann aber auch stets; denn da φ einwerthig ist, so kann in diesem Fall $\varphi - v$ nicht constant, und folglich Δ nicht Null sein.

Die Oberfläche des Leiters heisse S_0; dann ist (s. S. 145 f.) Δ vollkommen bestimmt durch die Bedingungen:

$$\text{in } \tau: \quad \Gamma(\Delta) = 0, \quad \text{und} \oint \frac{\Delta_l}{\lambda}\, dl = -\oint K_l dl,$$

$$\text{an } S_0: \quad \Delta_n = 0,$$

sobald die λ und die Werthe von $\int K_l dl$ für jede geschlossene Curve gegeben sind.

In unserm Fall ist das Integral gleich Null für jede Curve der Art a (s. Fig. 21); denn durch diese lässt sich eine in τ verlaufende Fläche S begrenzen.

Für eine Curve der Art b ist es nicht Null. Ziehen wir aber zwei derartige Curven, b und b', und verbinden sie durch eine Linie l, so haben wir eine in τ liegende Fläche S abgegrenzt. Wir umkreisen dieselbe, indem wir b in einem, b' im andern Sinn und l zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufen. Da das Integral Null sein muss für die ganze Umkreisung von S, so folgt, dass es gleiche Werthe hat für b und b', wenn beide in gleichem Sinn durchlaufen werden. Also: das Integral ist Null für alle Curven a, und hat denselben Werth für alle Curven b.



Fig. 21.

Es werde bezeichnet

$$-\oint K_l dl = \mathcal{E},$$

wenn der Weg in einem bestimmten, von uns als positiv bezeichneten, Sinn um den Ring führt.

Man schneide nun den Ring an einer beliebigen Stelle auf, nenne S_e die positive, S_a die negative Seite der Schnittfläche und bestimme eine in dem neubegrenzten einfach zusammenhängenden Raume einwerthige und stetige Function Φ durch genau dieselben Bedingungen, wie oben S. 153. Dann ist die Strömung

$$A_l = -\mathcal{E}\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial l}. \tag{21a}$$

Denn für dieses A ist $\Gamma(A) = 0$, und an S_0 : $A_n = 0$. Es wird ferner

$$\int\limits_{\circlearrowleft} \frac{A_l}{\lambda} dl = -\mathcal{E}\int\limits_{\circlearrowleft} \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl = 0 \text{ für jede Curve } a, \text{ und}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft} \frac{A_l}{\lambda} dl = -\mathcal{E}\int\limits_{e}^{a} \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl = \mathcal{E}(\Phi_e - \Phi_a) = \mathcal{E} \text{ für jede Curve } b.$$

Definiren wir den Strom i und den Widerstand w wie früher aus (22) und (23), so folgt aus (21a):

$$iw = \mathcal{E},$$

übereinstimmend mit der für einen geschlossenen linearen Leiter gefundenen Gleichung. —

Die in einem beliebigen Leiter auftretende thermisch-chemische Energie ist nach (17):

$$\Psi = \int\limits_S \varphi . A_n dS.$$

Für einen geschichteten Leiter, der mit der Mantelfläche S_0 an Isolatoren, mit den Aequipotentialflächen S_e (φ_e) und S_a (φ_a) an andere Leiter grenzt, wird

$$\Psi = \varphi_e \int\limits_{S_e} A_n dS + \varphi_a \int\limits_{S_a} A_n dS = (\varphi_e - \varphi_a)\, i$$

oder auch,

da $$\varphi_e - \varphi_a = i w - \mathcal{E},$$
$$\Psi = i^2 w - i \mathcal{E}.$$

Die Joule'sche Wärme ist nach (4):

$J = \int \frac{A^2}{\lambda} d\tau$ oder nach (20):

$= - \int \left(A_x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \cdot\cdot \right) d\tau$, also wegen (10') durch partielle Integration:

$= \int A_n . \varphi' . dS = (\varphi_e - \varphi_a') i = (\varphi_e - \varphi_a + \mathcal{E}) i$, oder

$$J = i^2 w.$$

Ebenso folgt der umkehrbare Energiebetrag

$$P = \int (A_x K_x + ..) d\tau = \int A_n . v . dS = (v_e - v_a) i = - \mathcal{E} i.$$

Die Umformungen von J und P, durch welche die Raumintegrale in Flächenintegrale übergehen, setzen voraus, dass φ' bezw. v einwerthig ist in τ, also dass τ einfach zusammenhängend ist. Betrachten wir nun den ganzen, ringförmigen Leiter. Dann gilt noch:

$$J = \int A_n \varphi' dS$$
$$P = \int A_n v dS,$$

sofern man den Ring aufschneidet, und die beiden Seiten des Querschnitts ebenfalls zu S rechnet.

Es folgt dann wieder:

$$J = i^2 w$$
$$P = - i \mathcal{E},$$

wo nun w den gesammten Widerstand des Ringes bedeutet, $\mathcal{E}$ die gesammte elektromotorische Kraft, d. h. $-\mathcal{E}$ das im Sinn von i rings um den Ring erstreckte Linienintegral von K. Die Ausdrücke für Ψ, J, P stimmen überein mit den in (13) für lineare Leiter gefundenen.

§ 5. Massmethoden. — Erweiterung der Elektrostatik.

Die Messung der in diesem Kapitel neu aufgetretenen Grössen lässt sich, wie das auch für die Grössen der Elektrostatik gilt, zurückführen auf die Masse der Mechanik und das Mass einer elektrischen Grösse. Als diese wählen wir wiederum die Dielektricitätsconstante des Vacuums ε_0; unsere Gleichungen gehen dann in die für das „absolute elektrische Masssystem" gültigen über, wenn wir $4\pi\varepsilon_0 = 1$ setzen. Nur eine der bisher betrachteten elektrischen Grössen ist (ausser der elektrischen Energie) ohne weiteres in mechanischem Masse messbar. Es ist die Relaxationszeit $T = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, eine Zeitgrösse. Zum Unterschied von den übrigen elektrischen Constanten, welche nur als Verhältnisszahlen definirbar sind, kann man sie als „innere Constante" des Mediums bezeichnen.

In Kapitel I, § 10 wurde gezeigt, wie man Potentialdifferenzen $\varphi_A - \varphi_B$ mit einander vergleichen, und wie man $(\varphi_A - \varphi_B)\sqrt{\varepsilon}$ in mechanischem Mass (von den Dimensionen $M^{1/2}\,L^{1/2}\,T^{-1}$) messen kann, wenn φ_A und φ_B die Potentialwerthe auf den Organen A und B eines geeigneten Elektrometers sind (die wir aus dem gleichen Metall hergestellt denken), und ε die Dielektricitätsconstante des das Elektrometer füllenden Isolators, als welchen wir im folgenden Luft voraussetzen. Verbinden wir mit A und B durch metallische Leiter zwei Punkte e und a eines andern Leiters, so dürfen wir nach unserer jetzigen Annahme nicht mehr setzen $\varphi_e = \varphi_A$, $\varphi_a = \varphi_B$. Wohl aber ist $\varphi_e - \varphi_a = \varphi_A - \varphi_B$, wenn auch in e und a sich gleichartige Leitersubstanz befindet. Unter dieser Bedingung also können wir die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines Leiters elektrometrisch bestimmen.

Sie ist zunächst erfüllt für die entsprechenden Punkte der Endflächen, die durch Aufschneiden eines Ringes entstehen. Im aufgeschnittenen Ring ist (wir setzen wieder einen geschichteten Leiter voraus) $i = 0$ und folglich nach (12c)

$$\varphi_e - \varphi_a = -\mathcal{E}.$$

Unsere Methode gestattet also, das $\mathcal{E}\sqrt{\varepsilon_0}$, — die elektromotorische Kraft, — für jedes vollständige Stromgebiet der betrachteten Art zu messen. Da einer bestimmten Folge von Substanzen ein bestimmtes $\mathcal{E}$ zukommt, so genügt es, das $\mathcal{E}\sqrt{\varepsilon_0}$ für eine wohl definirte Anordnung ein für allemal zu messen, um dann durch blosse vergleichende Messung dieselbe Grösse für eine beliebige Anordnung zu erhalten. Eine geeignete Normal-Anordnung ist die des „Clark'schen Elements": Hg, Hg_2SO_4, $ZnSO_4$, Zn, Hg. Für diese ist gefunden (bei 15° C.)

$$\mathcal{E}_e \cdot \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1{,}433}{300}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}\,. \tag{25}$$

Auf die Messung von Potentialdifferenzen ist auch die Messung der übrigen Stromgrössen zurückzuführen:

Wir betrachten ferner ein durströmtes homogenes Leiterstück. Die Bedingung der Messbarkeit von $\varphi_e - \varphi_a$ ist erfüllt, und nach (12c) ist

$$\varphi_e - \varphi_a = iw.$$

Man denke sich die Messung ausgeführt für zwei homogene Strecken des gleichen Stromkreises, deren Widerstände w_1 und w_2 seien; i hat für beide denselben Werth; also erhält man $\frac{w_1}{w_2}$. Das heisst: Widerstände von homogenen Leitern sind elektrometrisch vergleichbar.

Hier ist vorausgesetzt, dass die Strömung in dem untersuchten Leiter durch die Verbindung zweier Punkte, e und a, mit den Elektrometerorganen A und B nicht verändert wird, und dass trotz der Strömung im Leiter $\varphi_e = \varphi_A$, $\varphi_a = \varphi_B$ ist. Beide Voraussetzungen sind erfüllt, wenn in den Verbindungsstücken eA und aB keine Strömung vorhanden ist. Stromlinien, die bei e in das Stück eA eintreten, könnten nur bei e wieder austreten; um diese Stromverzweigung auszuschliessen, muss bei e und ebenso bei a punktförmige Berührung gefordert werden.

Der Widerstand w etwa eines Metalldrahtes ist eine Constante dieses Körpers; man kann also auch Drähte von gleichem

w oder von bestimmtem Verhältniss der w-Werthe ein für allemal herstellen. Mit Hülfe solcher lassen sich nach der Gleichung

$$\varphi_e - \varphi_a = iw$$

Ströme i elektrometrisch vergleichen. —

Es ist ferner für einen homogenen Leiter $w = \frac{\gamma}{\lambda}$, wo γ eine durch die Form des Leiters bestimmte Grösse (von den Dimensionen einer reciproken Länge), die sogenannte „Widerstandscapacität", bezeichnet, welche oben für einige Leiterformen berechnet wurde. Die Vergleichung zweier w führt also zur Vergleichung zweier λ, wenn beide Leiter gleiche Form haben, oder wenn für beide die Grösse γ bekannt ist.

Um Grössen i, w, λ nicht nur zu vergleichen, sondern in der oben erläuterten Weise absolut zu messen, müssen wir die Energieumsetzungen benutzen:

Die in einem homogenen Leiter in der Zeit t entwickelte Wärme ist:

$$Jt = \frac{(\varphi_e - \varphi_a)^2}{w} t.$$

Diese Wärme kann gemessen und mit Hülfe des „mechanischen Wärmeäquivalents" in Arbeitsmass ausgedrückt werden. Verbindet man mit dieser Messung diejenige von $(\varphi_e - \varphi_a)\sqrt{\varepsilon_0}$ (s. oben), so erhält man $w\varepsilon_0$. Die Dimensionen sind, da

$$\left[\frac{(\varphi_e - \varphi_a)^2}{w} t\right] = [\text{Energie}] = ML^2T^{-2} \text{ und } [(\varphi_e - \varphi_a)^2 \varepsilon_0] = MLT^{-2}$$

ist,

$$[w\varepsilon_0] = L^{-1}T.$$

Die Messung braucht nur einmal ausgeführt zu werden für einen stets reproducirbaren Leiter von wohldefinirtem Widerstand. Dann genügt später die Vergleichung mit diesem Grundmass, um $w\varepsilon_0$ für jeden homogenen Leiter zu erhalten.

Das praktische Grundmass bildet die „Siemens'sche Einheit", d. h. der Widerstand w_S einer Quecksilber-Säule von

1 qmm Querschnitt zwischen zwei um 1 m von einander entfernten normalen Querschnitten bei 0° C. Für diesen ist gefunden

$$w_S \cdot 4\pi\varepsilon_0 = \frac{10^9}{1{,}063} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}}.$$

Daraus ergiebt sich für das specifische Leitungsvermögen λ_1 des Quecksilbers:

$$\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{100 \cdot 100}{w_S 4\pi\varepsilon_0} = 1{,}063 \cdot 10^{-5} \cdot 9 \cdot 10^{20} \frac{1}{\mathrm{sec}}. \qquad (26)$$

Weiter folgt dann $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$ für einen beliebigen Leiter durch Vergleichung mit Quecksilber.

Ist $w\varepsilon_0$ für einen bestimmten homogenen Leiter bekannt, so messe man die Potentialdifferenz $(\varphi_e - \varphi_a)\sqrt{\varepsilon_0}$ zwischen seinen Enden, während er vom Strom i durchflossen wird. Die Gleichung $iw = \varphi_e - \varphi_a$ liefert dann

$$\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{(\varphi_e - \varphi_a)\sqrt{\varepsilon_0}}{w \cdot \varepsilon_0} \quad \text{und}$$

$$\left[\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}.$$

Ein anderes Mittel, $\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ zu bestimmen, bietet die Elektrolyse. Nach Gleichung (9) wird durch den Strom i in der Zeit t die Masse

$$M = \eta a i t$$

eines Ions vom Aequivalentgewicht a ausgeschieden. Hier ist η eine universelle Constante, welche wir die „elektrochemische Constante" nennen wollen.

Es werde also einmal $\frac{M}{t.a}$ und gleichzeitig, in der soeben angegebenen Weise, $\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ gemessen. Dann ist $\eta\sqrt{\varepsilon_0}$ bekannt.

Man hat gefunden:

$$a_H \cdot \eta \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \frac{0{,}0001036}{3 \cdot 10^{10}} \mathrm{gr}^{1/2} \mathrm{cm}^{-3/2} \mathrm{sec}^1, \qquad (27)$$

wenn α_H das Aequivalentgewicht des Wasserstoffs bezeichnet, welches man = 1 zu setzen pflegt.

Mit Hülfe dieses Werthes und der Gleichung (9) kann jedes $\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ aus der in der Zeit t zersetzten Menge eines in den Stromkreis eingeschalteten Elektrolyten bestimmt werden. Voraussetzung der Messung ist, dass während ihrer Dauer i constant bleibt; dies kann nach dem obigen controlirt werden mit Hülfe eines Elektrometers, welches nur empfindlich, aber kein Messinstrument zu sein braucht.*)

Bestimmt man den Widerstand, welchen eine Flüssigkeit von bekanntem Leitungsvermögen zwischen zwei Flächen besitzt, die mit ausreichender Näherung einen „geschlossenen Condensator" begrenzen, so folgt aus Gleichung (24) für diesen Condensator:

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{1}{w\lambda}.$$

Dieses indirekte Verfahren zur Bestimmung von Condensatorcapacitäten kann unter Umständen vortheilhaft sein gegenüber den in Kapitel I angegebenen Methoden. —

Die oben angeführte elektrometrische Methode zur Messung der $\mathcal{E}$ unterlag der Beschränkung, dass die beiden Endflächen des Leiters gleichartig sein müssen. Diese Beschränkung ist ohne Bedeutung, solange wir nur nach den Werthen der Strömung fragen; denn die letztere ist völlig bestimmt durch die Werthe der $\mathcal{E}$ für alle geschlossenen Curven. Die Werthe der $\mathcal{E}$ zwischen beliebigen Grenzen, und somit die Grössen K, bedingen lediglich die umkehrbaren Energieumsetzungen und können daher auch nur aus Energiemessungen gewonnen werden. Es werde durch eine bestimmte Anordnung von Leitern, welcher der Werth $\mathcal{E}$ und der Widerstand w zukommt, in zwei Versuchen der gleiche Strom i

*) Vorstehende Darstellung ist bedingt durch die Anforderungen der Systematik. Thatsächlich sind die angeführten absoluten Werthe zum Theil durch andere indirecte Methoden gewonnen, die erst an späterer Stelle beschrieben werden können. Diesem Sachverhalt entspricht die Zerlegung der Zahlwerthe in Factoren.

in entgegengesetzter Richtung gesandt. Dann ist die während der Zeit Eins in nicht-elektrischer Form auftretende Energie:

$$\Psi_1 = wi^2 - \mathcal{E}i, \text{ bezw. } \Psi_2 = wi^2 + \mathcal{E}i, \text{ also}$$
$$\Psi_2 - \Psi_1 = 2\mathcal{E}i.$$

Ψ ist, falls der fragliche Leiter materielle Veränderungen nicht erleidet, Wärme, die ohne weiteres in Arbeitsmass ausgedrückt werden kann. Handelt es sich um einen Elektrolyten, so gehen neben der Erwärmung chemische Umsetzungen und Concentrationsänderungen her; die Energieänderung, welche diesen materiellen Veränderungen entspricht, ist nach dem Energieprincip eine durch Anfangs- und Endzustand völlig bestimmte Grösse, welche bei einem beliebigen andern Ueberführungsprocess, im allgemeinen in der Form von Arbeit und Wärme, gemessen werden kann. — Neben Ψ_1 und Ψ_2 denke man noch die gleichzeitig in einem homogenen Leiterstück (Endpunkte e und a, Widerstand w_0) entwickelte Wärme J gemessen. Es ist

$$J_1 = J_2 = w_0 i^2 = (\varphi_e - \varphi_a)\, i.$$

Man kann so $\mathcal{E}$ mit $(\varphi_e - \varphi_a)$ und sonach mit der elektromotorischen Kraft irgend eines „Elements", etwa des Clark'schen ($\mathcal{E}_c$) vergleichen. Besonderes Interesse haben die Werthe $\mathcal{E}$ erregt, welche dem Uebergang von einem Metall zu einem andern bei gegebener gleichförmiger Temperatur entsprechen. Diese „elektrischen Differenzen" zwischen den verschiedensten Metallen haben sich, in vorstehender Weise aus der Peltier'schen Wärme bestimmt, alle von der Grössenordnung $\frac{1}{1000}\,\mathcal{E}_c$ ergeben. —

Ganz andere Werthe, von der Grössenordnung $\mathcal{E}_c$, hat man durch elektrostatische Messungen zu erhalten geglaubt.

Um dieselben beurtheilen zu können, müssen wir zunächst in die Grundlagen der Elektrostatik die allgemeineren Annahmen einführen, zu welchen uns die Erscheinungen der Strömung genöthigt haben. Es bleiben bestehen die folgenden drei unserer früher in Kapitel I gemachten Grundannahmen:

1) Die elektrische Energie des Raumes τ ist:

$$W_e = \tfrac{1}{2}\int_\tau \varepsilon E^2 d\tau. \tag{B}$$

2) Der Elektricitätsinhalt des Raumes τ ist:

$$\Sigma e_i = \int_S \varepsilon E_N dS, \tag{A}$$

(S Oberfläche von τ, N äussere Normale);

e_i ist unveränderlich für jedes Element eines Isolators, und für jeden Leiter im ganzen.

3) Für jede geschlossene Curve ist:

$$\int_O E_l dl = 0. \tag{C}$$

An Stelle der früheren Annahme (D): „$E = 0$ in jedem Leiter", tritt jedoch jetzt die folgende (vgl. S. 124):

4) In jedem Leiter ist:

$$E_l = K_l, \tag{D'}$$

wo K ein durch die Anordnung der Materie nach Grösse und Richtung gegebener Vector.

Damit die Bedingungen verträglich seien, muss in jedem Leiter $\int_O K_l dl = 0$ sein, oder $K_l = -\frac{\partial v}{\partial l}$, wo v für jeden einzelnen Leiter eine bis auf eine additive Constante gegebene, eindeutige Function bezeichnet.

Aus diesen Grundannahmen ziehen wir zunächst die allgemeinsten Folgerungen:

Zum Werthe der Energie trägt jetzt auch das Innere der Leiter bei. Derselbe kann geschrieben werden

$$W_e = \tfrac{1}{2}\int_{\tau_i} \varepsilon K^2 d\tau + \tfrac{1}{2}\int_{\tau_a} \varepsilon E^2 d\tau,$$

wo τ_i das Innere der Leiter, τ_a den Aussenraum bezeichnen soll. Das erste Integral weist darauf hin, dass Deformationen

eines inhomogenen Leiters, insbesondere Deformationen der Grenzschicht heterogener Leiter, mit Aenderungen der elektrischen Energie verknüpft sind; diese tritt dadurch in Beziehung zur Energie der Capillarkräfte. Wir wollen aber im folgenden voraussetzen, dass die Leiter oder wenigstens deren inhomogene Theile sich nur als starre Körper bewegen; dann ist nur das zweite Integral eine veränderliche Grösse.

Das Feld in τ_i ist unmittelbar gegeben, damit sind wegen der aus (C) folgenden Stetigkeit von E_S auch die tangentialen Componenten an der Begrenzung von τ_a gegeben. Hieraus folgt nach den Methoden von Kapitel I, § 7:

Das Feld in τ_a ist auch jetzt noch bestimmt, wenn ausser der Elektricitätsvertheilung (ϱ, σ) im Dielektricum entweder die gesammte Elektricitätsmenge (e_i) jedes einzelnen Leiters, oder das Potential φ für je einen Punkt eines jeden Leiters gegeben ist.

Das Superpositionsprincip gilt insofern nicht mehr, als jetzt ein elektrisches Feld auch besteht, wenn alle ϱ, σ, e_i gleich Null sind. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass dieses Feld sich einfach demjenigen superponirt, welches bei gegebenen ϱ, σ, e_i und homogenen Leitern besteht.

Die Potentialdifferenzen zwischen verschiedenen Leitern, welche man mit Hülfe von Elektrisirmaschinen hervorbringt, sind im allgemeinen sehr gross gegenüber den Potentialdifferenzen innerhalb desselben Leiters, welche aus dessen Inhomogenität entspringen. Wir dürfen daher bei der Betrachtung der ersteren in der Regel alle Leiter als homogen betrachten, — wie wir dies in Kapitel I thaten.

Im folgenden setzen wir umgekehrt voraus, dass unser Feld nur durch die Inhomogenität der Leiter zu Stande kommt. Dies ist der Fall, wenn sich im Dielektricum nirgends Elektricität befindet, und das Feld vollständig durch einen zusammenhängenden Leiter begrenzt wird. (In den unten zu besprechenden Versuchen ist die Begrenzung mit ausreichender Näherung durchgeführt.) Es ist dann für jeden Punkt p auf der Oberfläche S des Leiters $\varphi = \varphi_0 + v$, wenn φ_0 den Werth von φ in einem beliebigen Punkt p_0 des Leiters be-

deutet, und $v = -\int_{p_0}^{p} K_l dl$ gesetzt wird. Der Werth von φ_0 ist ohne Bedeutung, wir setzen $\varphi_0 = 0$.

Zur Vereinfachung der Darstellung und wiederum in ausreichender Uebereinstimmung mit den Versuchsbedingungen nehmen wir an, dass S nur von einer endlichen Zahl in sich homogener Leiter gebildet wird. Wir bezeichnen die Theile von S durch S_1, S_2.., nennen V_i den Werth von v auf S_i und setzen $\int_{S_i} \varepsilon E_N dS = e_i'$.

Durch die vorgeschriebenen Werthe $\varphi = V_i$ auf den S_i ist das Potential im Dielektricum vollständig bestimmt, und zwar wie in Kapitel I als lineare homogene Function der V_i. Das gleiche gilt daher auch für die Componenten von E, und insbesondere für die Componenten E_N an S.

Es wird daher

$$e_i' = \alpha_{1i} V_1 + \alpha_{2i} V_2 + \ldots$$

wo, wie in Kapitel I, § 8, die α durch Form und physikalische Beschaffenheit des Isolators bestimmte Constanten sind und $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ist. e_i' bedeutet zwar nicht allgemein die Elektricitätsmenge auf S_i, wohl aber die Zahl der von S_i in den Isolator austretenden Kraftlinien, also -- da die Componenten E_n auf der Innenseite fest vorgeschriebene Werthe haben — den veränderlichen Theil jener Elektricitätsmenge.

Der veränderliche Theil von W_e lässt sich unter unseren Voraussetzungen schreiben:

$$U = \tfrac{1}{2}\int_{\tau_a} \varepsilon E^2 d\tau = \tfrac{1}{2}\int \varphi \cdot \varepsilon E_N dS = \tfrac{1}{2} \Sigma V_i e_i'$$

$$= \tfrac{1}{2} \alpha_{11} V_1^2 + \alpha_{12} V_1 V_2 + \ldots$$

Die mechanischen Kräfte auf die Leiter sind dadurch bestimmt, dass sie für jede Verschiebung eine dem Energieprincip entsprechende Arbeit ergeben müssen. Wir wollen zeigen,

dass dies die aus Kapitel I, Gleichung (37″) zu entnehmenden Kräfte leisten. Es mögen die Theile des Leiters unendlich wenig verschoben werden. Dabei bleiben die V_i ungeändert; es ändern sich aber die α_{ik} und damit die e_i'. Dies geschieht durch Strömung innerhalb des Leiters. Hierbei tritt thermische und chemische Energie auf, und zwar (s. S. 122) im Gesammtbetrage

$$-\Sigma de \cdot \varphi = -\Sigma de_i' \cdot V_i = -\left[d\alpha_{11} \cdot V_1^2 + 2\,d\alpha_{12} \cdot V_1 V_2 + \ldots\right]$$

Die elektrische Energie vermehrt sich um

$$\tfrac{1}{2}\, d\alpha_{11} \cdot V_1^2 + d\alpha_{12} \cdot V_1 V_2 + \ldots$$

Die geleistete Arbeit ist nach Kapitel I, (37″):

$$\tfrac{1}{2}\, d\alpha_{11} \cdot V_1^2 + d\alpha_{12} \cdot V_1 V_2 + \ldots$$

Die Summe der drei Posten ist Null, wie es sein muss.

Aus dem soeben entwickelten ergeben sich zwei Methoden zur Vergleichung von elektromotorischen Kräften $\mathcal{E}$. Wir wollen annehmen, es handle sich jedesmal darum, die „elektrische Differenz" $\mathcal{E}_m$ zwischen Zink und Kupfer mit der elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}_c$ eines Clark-Elements zu vergleichen.

1) Methode des sogenannten „Volta'schen Fundamentalversuchs". Eine Zinkplatte a bilde mit einer Kupferplatte b einen Condensator von der Capacität c (s. Fig. 22). Zwischen a und b sei eine leitende Verbindung hergestellt, die zwischen a und d aus beliebigen Substanzen, auf der Strecke db aber aus Kupferdraht besteht. Es sei $\varphi_a - \varphi_d = \mathcal{E}$. Die Punkte d und b seien mit den Organen eines Elektrometers von der Capacität γ verbunden. Durch die Angaben dieses Instruments wird $\varphi_d - \varphi_b = V$ in relativem Mass gemessen. Die Grösse

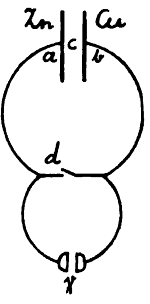


Fig. 22.

$\int \varepsilon E_N dS$, für die Oberfläche der Zinkplatte genommen,

heisse e_c', dieselbe Grösse für das mit der Zinkplatte verbundene Elektrometerorgan heisse e_γ'. Dann ist

$$e_c' = c(\varphi_a - \varphi_b) = c(\mathcal{E} + V)$$
$$e_\gamma' = \gamma V.$$

Es sei zunächst d mit b verbunden; dann ist $V = 0$. Die Verbindung werde gelöst, und dann durch Verschiebung der Zinkplatte die Capacität c in c' geändert. Dann erhält V einen Werth V_1, der dadurch bestimmt ist, dass $e_c' + e_\gamma'$ unverändert geblieben ist. Es folgt

$$c\mathcal{E} = c'(\mathcal{E} + V_1) + \gamma V_1,$$

oder
$$(c - c')\,\mathcal{E} = (c' + \gamma)\,V_1.$$

Nun möge in einem ersten Versuche ad durch einen Kupferdraht gebildet sein, während in einem zweiten Versuch bei sonst gleicher Ausführung in diese Verbindung ein Clark'sches Element eingeschaltet sei. Dann ist das eine Mal $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$, das andere Mal $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_c$. Man erhält also $\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_c$.

2) Methode von W. Thomson. In einem Quadrantelektrometer mögen (vgl. für die Bezeichnungen Kap. I, § 10) A und C aus Kupfer, B dagegen aus Zink bestehen. Zwischen A und C sei eine Combination von Leitern, — „galvanische Kette," — eingeschaltet, welche der Differenz $A—C$ einen constanten und gegen $A—B$ grossen, übrigens unbekannten Werth ertheilt. Auf die Nadel wirkt dann ein Drehungsmoment (siehe Gleichung (48b) S. 80)

$$\Theta = k\,(A - B)\,(C - A).$$

Nun werde wiederum die Verbindung zwischen A und B einmal direkt durch einen Kupferdraht, das andere Mal unter Einschaltung eines Clark'schen Elements hergestellt. Dann verhalten sich die Ausschläge wie $\mathcal{E}_m$ zu $\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_c$.

Die Werthe, welche die Volta'sche und die Thomson'sche Methode für das $\mathcal{E}_m$ der Combination Zink-Kupfer, und ebenso für andere Metallcombinationen ergeben, sind in Uebereinstimmung. Sie widersprechen aber, wie schon erwähnt,

völlig den Resultaten, welche man aus der Messung der Peltier'schen Wärme erhält. Sie fallen ferner sehr verschieden aus je nach der Oberflächenbeschaffenheit der Metalle und sie ändern sich, wie es scheint, auch, wenn man im Condensator, bezw. im Elektrometer die atmosphärische Luft durch ein anderes Gas ersetzt. Nun sind für den Volta'schen, wie für den Thomson'schen Versuch massgebend die Veränderungen, welche das Feld im Dielektricum durch die Verschiebung der Leiter erfährt. Der Versuch ergiebt also direct nicht die Potentialdifferenz zwischen Zink und Kupfer, sondern zwischen der dem Zink anliegenden und der dem Kupfer anliegenden Gasschicht. Die soeben erwähnten Thatsachen legen daher den Schluss nahe, dass zu den gemessenen $\mathcal{E}_m$ auch die Uebergangsschichten vom Metall zum Gas Beiträge, — und zwar die ganz überwiegenden Beiträge, — liefern. Hängen diese thatsächlich auch von der Wahl des Gases ab, so sind die Volta'schen $\mathcal{E}_m$ überhaupt keine Constanten der Metalle. In jedem Fall sind sie ohne Bedeutung für die Gesammtheit der Erscheinungen, welche wir unter dem Namen elektrische Strömung zusammenfassen: der Totalwerth der elektromotorischen Kraft in einem metallischen Kreise lässt sich eindeutig in Summanden zerlegen nur nach Massgabe der entwickelten Peltier'schen Wärmemengen; jede andere Zerlegung ist dem Strömungsvorgang gegenüber vollkommen willkürlich und bedeutungslos. —

Im Falle eines zum Theil aus Elektrolyten bestehenden Kreises bleibt auch die Zerlegung nach Massgabe der Energieabgabe in gewissen Grenzen willkürlich: Von einer bestimmten Aenderung der chemischen Energie kann nur bei unveränderlich gegebenen Massen gesprochen werden; bei der Strömung aber sind die Aenderungen der chemischen Energie an Bewegung von Materie in der Stromrichtung gebunden und können daher innerhalb eines zusammenhängenden Elektrolyten nicht localisirt werden.

Kapitel III.

Das statische magnetische Feld.

§ 1. Magnetische Mengen. Coulomb's Gesetz.

Wir gehen jetzt über zur Betrachtung der magnetischen Erscheinungen, und zwar behandeln wir in diesem Kapitel ausschliesslich diejenigen, welche an das Vorhandensein sogenannter permanenter Magnete geknüpft sind. Es ist dies keineswegs das Gebiet, für welches sich die einfachsten Gesetzmässigkeiten ergeben haben; ja, man muss zugeben, dass die Theorie gerade hier den Thatsachen nur in unvollkommener Weise gerecht wird. (Siehe Kap. VIII, A.) Aber auf diesem Gebiet sind die ersten Beobachtungen und messenden Versuche gemacht worden, an denen die physikalischen Begriffe zunächst entwickelt wurden. Dazu kommt, dass die Beziehungen zwischen den hier auftretenden Grössen sehr weitgehende Analogie zeigen zu den Grundgleichungen der Elektrostatik.

Als Eigenschaften, welche einen „Magneten" charakterisiren, sind vor allem die folgenden bekannt: 1) wenn er, um seinen Schwerpunkt frei drehbar, aufgehängt wird, so stellt sich eine in ihm feste Richtung parallel einer im Raum festen Richtung; — 2) ein Magnet übt bewegende Kräfte auf einen andern aus; — 3) er thut das Gleiche gegenüber einem Stück weichen Eisens. — Als Körper dieser Art finden sich in der Natur Stücke eines eisenhaltigen Minerals, des Magneteisensteins; wir können aber auch durch geeignete Behandlung, auf welche hier nicht eingegangen werden soll, beliebige Stücke

von Eisen, Kobalt, Nickel und einigen ihrer Verbindungen und Legirungen in einen Zustand überführen, in welchem sie sich als Magnete verhalten, d. h. die erwähnten Eigenschaften zeigen. Dieselben können von Fall zu Fall quantitativ noch ausserordentlich verschieden sein; diese Unterschiede drücken wir aus, indem wir den Körpern verschiedene Magnetisirung zuschreiben. Um zunächst die einfachsten Verhältnisse zu haben, denken wir uns einige lange und dünne, „der Länge nach gleichförmig magnetisirte“ Stahlnadeln gegeben. Man nennt sie so, wenn sie folgende Eigenschaften zeigen:

Zu 1): eine jede von ihnen, fern von den übrigen frei drehbar aufgehängt, stellt sich in eine bestimmte, ungefähr nord-südliche Richtung ein. Das Ende der Nadel, welches nach Norden weist, nennen wir ihren „Nordpol“, das andere ihren „Südpol“.

Zu 2): wenn wir der ersten Nadel eine zweite nähern, so wird sie aus dieser Lage abgelenkt, und falls sie genügende Bewegungsfreiheit besitzt, auch als Ganzes verschoben. Die stattfindenden mechanischen Wirkungen lassen sich darstellen durch Centralkräfte zwischen den Polen der beiden Nadeln; — sie sind Abstossungen für gleichartige, Anziehungen für ungleichartige Pole, dem absoluten Werthe nach aber hängen sie nicht von der Wahl der Pole, sondern lediglich von deren Entfernung ab; dem Quadrat der Entfernung sind sie umgekehrt proportional. In Zeichen: die Abstossung zwischen je zwei Polen ist

$$f = + \frac{c}{r^2}, \text{ wo } c \text{ eine Constante.}$$

Vertauscht man nun den ersten der beiden Magnete mit einem dritten, vierten, . . und dann ebenso den zweiten, so zeigt sich, dass c das Product zweier Factoren ist, von denen einer den ersten, der andere den zweiten Magneten charakterisirt. Wir können daher für die Abstossung schreiben

$$f = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu r^2}, \qquad (1)$$

wenn wir unter μ eine beliebige positive Constante verstehen,

unter $+m_1$ ($+m_2$) Grössen, welche die Pole des ersten (zweiten) Magneten charakterisiren; und zwar müssen entweder alle positiven m den Nordpolen, alle negativen m den Südpolen zugeordnet werden, oder umgekehrt. Es ist herkömmlich, den auf den Nordpol bezüglichen Grössen m positives Vorzeichen zu geben.

Man nennt die Grössen m „magnetische Mengen" (oder „Polstärken"). Solange wir den Werth von μ unbestimmt lassen, ist durch die Gleichung (1) nur das Verhältniss zweier magnetischen Mengen definirt. Lediglich das Vorzeichen ist durch unsere Convention für jede einzelne Menge festgelegt. Im sogenannten „absoluten magnetischen Masssystem" setzt man $4\pi\mu = 1$. Von diesem Masssystem gilt das gleiche, was in Kap. I, § 1 über das absolute elektrische Masssystem bemerkt wurde. Wir werden es in unsere Gleichungen nicht einführen.

Die hier angedeuteten Versuche sind von Coulomb ausgeführt; das Gesetz (1) trägt seinen Namen.

Die oben unter 3) aufgeführten Kraftäusserungen der Magnete waren von unseren bisherigen Betrachtungen ausgeschlossen; es wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass in der Umgebung der Magnete sich ausschliesslich atmosphärische Luft befindet. Diese Voraussetzung behalten wir bis auf weiteres (in §§ 1 und 2) bei. — Eine weitere Voraussetzung bezog sich auf die Form unserer Magnete und auf die Behandlung, durch welche sie zu Magneten geworden waren. Diese Voraussetzung wollen wir jetzt fallen lassen. Für beliebige Magnete lassen sich „Pole" — mit der Eigenschaft, dass die mechanischen Wirkungen je zweier Magnete auf einander allgemein durch vier Kräfte von der Form (1) dargestellt würden, — nicht angeben. Die obige Darstellung entspricht aber auch jetzt den Thatsachen, erstens wenn die Entfernung der beiden Magnete sehr gross ist gegenüber ihren Dimensionen, — und zweitens bei gegebener Entfernung für genügend kleine Bruchstücke der beiden Magnete. Dies veranlasst uns, das Gesetz allgemein als gültig zu betrachten für die kleinsten Elemente zweier Magnete. Daraus folgt dann:

Es lässt sich stets eine Vertheilung magnetischer Mengen m angeben, deren je zwei nach dem Gesetz (1) auf einander wirken, und deren algebraische Summe für jeden ganzen Magneten Null ist. Die mechanischen Wirkungen eines Magneten auf einen andern erhalten wir, wenn wir diese Elementarkräfte nach den Regeln der Statik zusammensetzen.

Diese Annahme ist von Gauss experimentell geprüft und bestätigt worden.

Unsere Voraussetzungen also lassen sich so formuliren:

$$\left.\begin{array}{l} df = \dfrac{dm_1 \cdot dm_2}{4\pi\mu \cdot r^2}\,, \quad df \parallel r \\ \int dm = 0 \text{ für jeden Magneten.} \end{array}\right\} \qquad (1a)$$

Aus dem Kraftgesetz (1) lassen sich eine Reihe von Folgerungen ziehen, welche völlig übereinstimmen mit den Folgerungen aus der Gleichung (1) des Kapitel I. Wir stellen sie daher ohne erneuten Beweis zusammen. Mit M bezeichnen wir die Kraft, welche im Punkt p auf den Träger einer dort gedachten magnetischen Menge Eins wirken würde, und nennen M die „magnetische Feldintensität" im Punkte p. Die Componenten von M lassen sich dann ausdrücken mit Hülfe einer Function ψ, des „magnetischen Potentials":

$$\psi = \Sigma \frac{m_i}{4\pi\mu \cdot r_i}, \qquad (2)$$

wo m_i die magnetische Menge im Punkte p_i, und r_i die Entfernung $\overline{pp_i}$ bedeutet. Es ist nämlich

$$M_l = -\frac{\partial \psi}{\partial l}. \qquad (3)$$

Bilden wir weiter die Function

$$W_m = \tfrac{1}{2}\,\Sigma m_k\,\psi_k, \qquad (4)$$

wo ψ_k der Werth von ψ am Orte von m_k, so findet sich die mechanische Arbeit, welche die Kräfte (1) bei irgend welchen virtuellen Verschiebungen der Magnete gegen einander leisten, gleich der dieser Lagenänderung entsprechenden Abnahme

der Grösse W_m. Die Kräfte (1) nun, welche für ruhende Magnete gelten, bleiben auch gültig für sehr langsame Verschiebungen derselben; und weiter zeigt die Erfahrung*), dass für sehr langsame Verschiebungen mechanische Arbeit die einzige Form ist, in welcher unser System Energie nach aussen abgiebt. Wir sind daher berechtigt, den Werth, welchen W_m für irgend eine Configuration der Magnete besitzt, als die „magnetische Energie" unseres Systems in eben dieser Configuration zu bezeichnen.

Das Feld M ist eine überall endliche, das Potential ψ eine durchweg endliche und stetige Grösse, sobald wir voraussetzen, dass die magnetischen Mengen überall mit endlicher Raumdichte ϱ, oder doch mit endlicher Flächendichte σ verbreitet sind. Wir machen diese Annahme; dann wird

$$\psi = \int \frac{dm}{4\pi\mu \cdot r} \qquad (2')$$

und

$$W_m = \tfrac{1}{2} \int \psi \cdot dm, \qquad (4')$$

wo jedes dm sich als $\varrho\, d\tau$ oder als $\sigma\, dS$ ausdrückt.

Das Feld M und die Energie W_m sind gemäss den obigen Gleichungen bestimmt durch die Vertheilung der magnetischen Mengen im Raum. Diese magnetischen Mengen ihrerseits aber haften an bestimmten Volum- oder Flächenelementen der Magnete. Ist also die Zuordnung der m zu den materiellen Elementen gegeben, so ist unser System in magnetischer Beziehung vollständig charakterisirt für jede gegebene Lage der Körper.

Es mögen für einen bestimmten Magneten die magnetischen Mengen durch m_1, das Potential durch ψ_1, die Energie durch W_{m1} bezeichnet sein; für einen zweiten Magneten durch m_2, ψ_2, W_{m2}. Sind dann beide Magnete gleichzeitig vorhanden, so ist das Potential

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

und die Energie

*) Für harten Stahl und in erster Näherung; s. Kap. VIII, A am Schluss.

$$\left.\begin{aligned} W_m &= W_{m1} + W_{m2} + R, \quad \text{wo} \\ W_{m1} &= \tfrac{1}{2}\Sigma m_1 \varphi_1 \\ W_{m2} &= \tfrac{1}{2}\Sigma m_2 \varphi_2 \\ R &= \tfrac{1}{2}(\Sigma m_1 \varphi_2 + \Sigma m_2 \varphi_1) = \Sigma m_1 \varphi_2 = \Sigma m_2 \varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

R möge die „wechselseitige Energie" der beiden Magnete heissen.

Werden beide als starre Körper gegen einander verschoben, so bleiben dabei W_{m1} und W_{m2} unverändert, es ist also die geleistete Arbeit

$$A = -\delta W_m = -\delta R. \quad (5\text{a})$$

Jeder der beiden Magnete befindet sich daher im stabilen Gleichgewicht in der Lage, für welche R ein Minimum ist.

Es sei das Feld M_2 gleichförmig innerhalb des vom ersten Magneten eingenommenen Raumes τ_1. Bezeichnet dann $p_0\,(x_0, y_0, z_0)$ einen festen, $p_1\,(x_1, y_1, z_1)$ einen variablen Punkt in τ_1, so ist

$$\varphi_2(p_1) = \varphi_2(p_0) - [M_{2x}(x_1 - x_0) + M_{2y}(y_1 - y_0) + M_{2z}(z_1 - z_0)]$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung $\Sigma m_1 = 0$:

$$R = -[M_{2x}\Sigma m_1(x_1 - x_0) + M_{2y}\Sigma m_1(y_1 - y_0) + M_{2z}\Sigma m_1(z_1 - z_0)]$$

Wir definiren nun einen Vector $\mathfrak{K}_1$ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_{1x} &= \Sigma m_1(x_1 - x_0) \\ \mathfrak{K}_{1y} &= \Sigma m_1(y_1 - y_0) \\ \mathfrak{K}_{1z} &= \Sigma m_1(z_1 - z_0) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{a})$$

Dann wird

$$R = -(M_{2x}\mathfrak{K}_{1x} + M_{2y}\mathfrak{K}_{1y} + M_{2z}\mathfrak{K}_{1z}) = -M_2\mathfrak{K}_1\cos(M_2\mathfrak{K}_1) \quad (7)$$

Der Vector $\mathfrak{K}_1$ heisst das „magnetische Moment", seine Richtung die „magnetische Axe" des ersten Magneten.

Wegen $\Sigma m_1 = 0$ können wir einfacher schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_{1x} &= \Sigma m_1 x_1 \\ \mathfrak{K}_{1y} &= \Sigma m_1 y_1 \\ \mathfrak{K}_{1z} &= \Sigma m_1 z_1 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Der Werth von $\mathfrak{K}_1$ hängt also nicht von der Wahl des Punktes p_0 ab.

Es seien ferner ξ_1, η_1, ζ_1 die Coordinaten des Punktes p_1 in Bezug auf ein im Magneten festes System mit dem Anfangspunkt p_0. Dann ist

$$x_1 - x_0 = \xi_1 \cos(\xi x) + \eta_1 \cos(\eta x) + \zeta_1 \cos(\zeta x)$$

und folglich

$$\mathfrak{K}_{1x} = \cos(\xi x) \Sigma m_1 \xi_1 + \cos(\eta x) \Sigma m_1 \eta_1 + \cos(\zeta x) \Sigma m_1 \zeta_1 \text{ u. s. w.},$$

d. h. die Componenten von $\mathfrak{K}_1$ nach den Axen der ξ, η, ζ sind

$$\mathfrak{K}_{1\xi} = \Sigma m_1 \xi_1, \quad \mathfrak{K}_{1\eta} = \Sigma m_1 \eta_1, \quad \mathfrak{K}_{1\zeta} = \Sigma m_1 \zeta_1.$$

Diese ändern sich nicht bei einer Bewegung des Magneten. Die „magnetische Axe“ ist daher eine im Magneten feste Richtung; — sie ist aber nicht eine bestimmte Gerade.

Aus (7) folgt: R ist ein Minimum und der Magnet befindet sich folglich in dem gleichförmigen Felde M_2 in stabilem Gleichgewicht, wenn seine Axe dem Felde parallel und mit ihm gleichgerichtet ist. Es wirkt auf ihn ein Drehungsmoment in jeder anderen Lage. Bei einer Parallelverschiebung ändert sich R nicht; also wirkt auf den Magneten keine translatorische Kraft. Dies erscheint in unserer Darstellung als eine Folge der Gleichung $\Sigma m_1 = 0$. Umgekehrt liegt in der Thatsache, dass ein beliebiger Magnet in einem gleichförmigen Felde niemals translatorische Kräfte erfährt, der strengste Beweis dafür, dass in jedem Magneten die Gesammtmenge aller m gleich Null ist.

Das soeben charakterisirte Verhalten zeigt u. A. (s. oben) jeder Magnet, in dessen Nähe sich weder andere Magnete noch Eisenmassen befinden. Wir schreiben das Feld M_2, welches dann auf ihn wirkt, der Nähe der Erde zu und nennen es das „erdmagnetische Feld“. Dieses Feld erweist sich als zeitlich und räumlich veränderlich, aber als gleichförmig innerhalb der Räume, welche unsere Magnete einnehmen.

Es möge das gleichförmige Feld M_2 herrühren von einem Einheitspol in dem sehr fernen Punkt p_2. Wird dann $\overrightarrow{p_0 p_2} = r$ gesetzt, so hat einerseits M_2 die Grösse

$M_2 = \frac{1}{4\pi\mu \cdot r^2}$ und die zu r entgegengesetzte Richtung;

andererseits ist nach (5)

$$R = \psi_1(p_2).$$

Also ist nach (7) für alle sehr fernen Punkte p_2:

$$\psi_1(p_2) = \frac{\mathfrak{K}_1 \cos(r\mathfrak{K}_1)}{4\pi\mu \cdot r^2}. \tag{8}$$

Im folgenden lassen wir die Indices fort. —

Das Potential ψ eines Magneten für äussere Punkte p in endlicher Entfernung wollen wir unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen entwickeln. Der Magnet möge, wie es praktisch der Fall zu sein pflegt, eine gestreckte Form haben (Fig. 23); seine Länge sei $2l$, seine Querschnittsdimensionen seien verschwindend klein gegenüber der Entfernung R seines Mittelpunktes von p; endlich sei $\frac{l}{R} < 1$. Dann wird:

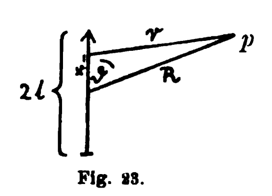


Fig. 23.

$$4\pi\mu \cdot \psi = \mathsf{S}\frac{m}{r} = \int_{-l}^{l} \frac{k dx'}{r}, \text{ wo } k \text{ eine Function von } x'.$$

Hier ist

$$r^2 = R^2 + x'^2 - 2x'Ru, \text{ wo } u = \cos\vartheta = \cos(x'R),$$

folglich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left[1 - 2\frac{x'}{R}u + \left(\frac{x'}{R}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Den Factor von $\frac{1}{R}$ können wir nach steigenden Potenzen von $\frac{x'}{R}$ in eine convergente Reihe entwickeln. Das Resultat ist*)

*) s. z. B. Dirichlet-Grube, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, S. 70f.

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x'^n}{R^{n+1}} \cdot P_n(u), \text{ wo}$$

$$P_n(u) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \left[u^n - \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot (2n-1)} u^{n-2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1) \cdot (2n-3)} u^{n-4} - + \cdots \right].$$

Also wird

$$4\pi\mu \cdot \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(u)}{R^{n+1}} \mathsf{S}(mx'^n),$$

oder wenn wir

$$\mathsf{S}(mx'^n) = \int_{-l}^{l} k x'^n dx' = \mathfrak{M}_n \qquad \text{schreiben,}$$

$$4\pi\mu \cdot \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(u) \cdot \mathfrak{M}_n}{R^{n+1}}.$$

Alle $P_n(u)$ sind echte Brüche (l. c.); das Glied $\frac{P_n(u)\mathfrak{M}_n}{R^{n+1}}$ ist daher höchstens eine kleine Zahl von der Ordnung $\left(\frac{l}{R}\right)^{n+1}$.

Von den Grössen $\mathfrak{M}_n$ ist zunächst $\mathfrak{M}_0$ gleich der gesammten magnetischen Menge des Magneten, also Null. Es möge ferner, — wie dies mit grosser Annäherung praktisch stets erreicht wird, — die magnetische Vertheilung, abgesehen vom Vorzeichen, die gleiche sein in je zwei Querschnitten, die von den Stabenden gleich weit entfernt sind, d. h. $k(-x') = -k(x')$; dann ist $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_4 = \ldots = 0$, und wir erhalten:

$$4\pi\mu \cdot \psi = \frac{P_1(u)\mathfrak{M}_1}{R^2} + \frac{P_3(u)\mathfrak{M}_3}{R^4} + \frac{P_5(u)\mathfrak{M}_5}{R^6} + \cdots$$

Hier ist

$$P_1(u) = u$$
$$P_3(u) = \tfrac{1}{2}(5u^3 - 3u)$$
$$P_5(u) = \tfrac{1}{8}(63u^5 - 70u^3 + 15u) \text{ u. s. w.}$$

Also giebt die erste Annäherung

$$4\pi\mu \cdot \psi = \frac{\mathfrak{M}_1 \cos\vartheta}{R^2}, \text{ wo } \mathfrak{M}_1 = \mathsf{S}(mx').$$

Dies ist nach (8) das Potential eines Magneten, welcher mit dem vorliegenden Magneten das magnetische Moment $\mathfrak{M}_1$ gemein hat, und dessen Dimensionen gegen R verschwindend klein sind.

Wir denken uns ferner einen ideellen Magneten gebildet aus zwei einzelnen magnetischen Mengen $\pm m$ in den Punkten $x' = \pm s$. Für diesen wird

$$\mathfrak{M}_1 = 2ms; \quad \mathfrak{M}_3 = 2ms^3.$$

Der ideelle Magnet ist also dem vorliegenden in zweiter Annäherung äquivalent, wenn sein Moment gleich dem thatsächlichen Moment $\mathfrak{M}_1$ und ausserdem

$$s = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_1}}$$

gewählt wird. Mit andern Worten: unser Magnet kann in zweiter Näherung durch ein Paar „Pole“ von bestimmter Stärke und Lage ersetzt werden. Das gleiche gilt noch, wie sich auf demselben Wege zeigen lässt, wenn man auch die Querdimensionen (a) des Magneten bis zur Ordnung $\left(\frac{a}{R}\right)^4$ berücksichtigt, sofern nur die magnetische Vertheilung symmetrisch um die Längsaxe, und, wie schon angenommen wurde, in beiden Magnethälften entgegengesetzt gleich ist.

So definirt, hat der Ausdruck „Pole eines Magneten“ eine bestimmte physikalische Bedeutung. Gegenüber der häufigen missbräuchlichen Benutzung des Wortes ist zu bemerken: für einen beliebigen Magneten können sie überhaupt nicht definirt werden. Für unsern Magneten bleiben sie in erster Näherung unbestimmt; diese enthält nur das Product: Polstärke mal Abstand. In beliebiger Näherung wären sie überbestimmt; allgemein äquivalente Pole giebt es nicht. —

Thatsächlich hat sich gezeigt, — was ohne theoretische Bedeutung, aber von praktischem Werth ist, — dass für die am meisten benutzten Magnetformen und Magnetisirungsarten das Polpaar, welches $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_3$ den verlangten Werth giebt, dies sehr nahe auch für $\mathfrak{M}_5$ leistet. (F. Kohlrausch.)

Um den Magneten für einen bestimmten Entfernungsbereich zu charakterisiren, müssen je nach der verlangten Genauig-

keit die Grössen $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{M}_3$ $\mathfrak{M}_5$ .. bis zu einer bestimmten Ordnungszahl ein für allemal ausgewerthet werden. Dies geschieht durch Ausmessung des Feldes in verschiedenen Entfernungen R oder Azimuthen ϑ.

Da die Werthe von ψ symmetrisch um die Axe des Magneten vertheilt sind, so liegt im Punkte p die Feldrichtung in der durch p gehenden Meridianebene.

Die radiale Componente zu wachsenden R ist:

$$M_R = -\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

die tangentiale zu wachsenden ϑ ist:

$$M_t = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial u}\sin\vartheta.$$

Speciell: 1) es liege p in der verlängerten Axe des Magneten („erste Hauptlage"). Dann ist: $\vartheta = 0$, $u = 1$.

Folglich $M_t = 0$, $M_R = M_x = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)_{u=1}$.

Für $u = 1$ ist aber: $P_1(u) = P_3(u) = P_5(u) = \ldots = 1$.

Also

$$4\pi\mu \cdot M_x = \frac{2\mathfrak{M}_1}{R^3}\left\{1 + 2\frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_1 R^2} + 3\frac{\mathfrak{M}_5}{\mathfrak{M}_1 R^4} + \ldots\right\} \qquad (9a)$$

2) Es liege p in der durch den Mittelpunkt normal zum Magneten gelegten Ebene („zweite Hauptlage"). Dann ist:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad u = 0, \quad P_1(u) = P_3(u) = \ldots = 0.$$

Folglich $M_R = 0$ und $M_t = -M_x = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{u=0}$.

Also:

$$4\pi\mu \cdot M_x = -\frac{\mathfrak{M}_1}{R^3}\left\{1 - \tfrac{3}{2}\frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_1 R^2} + \tfrac{15}{8}\frac{\mathfrak{M}_5}{\mathfrak{M}_1 R^4} - \ldots\right\} \qquad (9b)$$

§ 2. Magnetisirung.

Die Annahme einer bestimmten Vertheilung magnetischer Mengen m in jedem Magneten liefert eine mögliche Darstellung des magnetischen Feldes. Aber diese Darstellung ist nicht die einfachste mögliche und deshalb nicht die angemessenste. Der Grund liegt darin, dass diese Vertheilung einer Bedingung unterworfen ist: $\Sigma m = 0$. Das mathematische Elementargebilde, die einzelne magnetische Menge, kann physikalisch auch durch die weitestgehende Zerstückelung eines Magneten nicht isolirt werden. Denken wir uns der Einfachheit wegen einen dünnen Stab, wie wir ihn zuerst betrachteten, charakterisirt durch zwei punktförmige Pole $\pm m$ an den Enden. Brechen wir diesen Stab durch, so ist nun jeder Theil ein vollständiger Magnet mit Polen $\pm m$. Wenn wir also den m feste Lage im Körper zuschreiben wollen, so müssen wir an der Bruchstelle schon vor der Zerlegung zwei entgegengesetzt gleiche Mengen annehmen. Von solchen Hülfsannahmen bleiben wir frei, wenn wir als Elementargebilde die Combination zweier entgegengesetzt gleicher Mengen wählen, die wir für den Augenblick eine „magnetische Molekel" nennen wollen. Die Beziehung zwischen der Vertheilung dieser Molekeln und der Vertheilung der magnetischen Mengen ist eine rein geometrische. Wir wollen sie daher auch geometrisch ableiten.

Wir denken uns im Körper des Magneten ein beliebig gelegenes Flächenelement dS. Dasselbe wird von einer gewissen Anzahl magnetischer Molekeln geschnitten. Wir fragen nach der algebraischen Summe derjenigen magnetischen Mengen dieser Molekeln, welche auf der Seite der positiven Normale N von dS liegen. Die magnetischen Mengen einer Molekel bezeichnen wir durch $\pm m$, ihren Abstand mit ds; die Richtung von ds, positiv gerechnet von $-m$ nach $+m$, heisse die „magnetische Axe" der Molekel. Alle Molekeln, deren Axenmittelpunkte in einem Volumelement $d\tau$ liegen, denken wir uns in Gruppen zerlegt nach den Grössen der m und den Grössen und Richtungen der ds. $n_i d\tau$ sei die Zahl

derjenigen Molekeln, deren Axen mit N den Winkel α_i einschliessen, deren magnetische Mengen $\pm m_i$ sind, und deren Polabstand ds_i ist. Damit eine solche Molekel die Fläche dS schneide, muss ihr Mittelpunkt sich innerhalb eines Parallelepipeds befinden, dessen Grundfläche dS und dessen Höhe $ds_i \cos \alpha_i$ ist. Die Zahl dieser Molekeln ist also

$$n_i \cdot ds_i \cos \alpha_i \cdot dS,$$

und die Summe der magnetischen Mengen auf der Seite von $+N$, die von Molekeln dieser Gruppe herrühren, ist nach Grösse und Vorzeichen gegeben durch:

$$n_i \cdot m_i ds_i \cos \alpha_i \cdot dS.$$

Also ist die Gesammtsumme für alle Molekelgruppen

$$dS . \Sigma m\, ds \cos \alpha,$$

wo die Summe über alle Molekeln zu erstrecken ist, die ihren Mittelpunkt in einer (unendlich klein gedachten) Volumeinheit haben. Nun ist

$$\cos \alpha = \cos (Nx) \cos (sx) + \cos (Ny) \cos (sy) + \cos (Nz) \cos (sz),$$

also

$$\Sigma m\, ds \cos \alpha = \cos (Nx)\, \Sigma m\, ds \cos (sx) + \cos (Ny)\, \Sigma m\, ds \cos (sy) + \cos (Nz)\, \Sigma m\, ds \cos (sz).$$

Dies ist die nach N genommene Componente I_N eines Vectors I, dessen Componenten nach den Coordinatenaxen sind

$$I_x = \Sigma m\, ds \cos (sx),$$
$$I_y = \Sigma m\, ds \cos (sy),$$
$$I_z = \Sigma m\, ds \cos (sz).$$

Diesen Vector bezeichnet man als die „Magnetisirung" an der betrachteten Stelle. Jedes Summenglied in I_x kann geschrieben werden: $\overset{+}{m}(\overset{+}{x} - \overset{-}{x}) = \overset{+}{m}\overset{+}{x} + \overset{-}{m}\overset{-}{x}$. Also

$$I_x = \sum_{\tau=1} m x.$$

Genauer:

$$\left.\begin{aligned} I_x\, d\tau &= \sum_{d\tau} m x, \\ I_y\, d\tau &= \sum_{d\tau} m y, \\ I_z\, d\tau &= \sum_{d\tau} m z. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

d. h. die soeben definirte Magnetisirung ist nichts anderes, als das magnetische Moment der Volumeinheit.

Durch den Vector I sollen nun die Grössen des magnetischen Feldes ausgedrückt werden. Zunächst die magnetischen Mengen:

Die algebraische Summe der magnetischen Mengen in $d\tau = dx\,dy\,dz$ bezeichnen wir, wie früher, mit $\varrho\, d\tau$. Zu ihr tragen diejenigen magnetischen Molekeln, die ganz in $d\tau$ liegen, nichts bei; wir erhalten sie vollständig aus den Beiträgen derjenigen Molekeln, die von den sechs Grenzflächen geschnitten werden. Diese Beiträge sind, wenn I sich an der betrachteten Stelle stetig ändert:

$$I_x\,dy\,dz, \qquad -\left(I_x + \frac{\partial I_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz,$$

$$I_y\,dz\,dx, \qquad -\left(I_y + \frac{\partial I_y}{\partial y}\,dy\right) dz\,dx,$$

$$I_z\,dx\,dy, \qquad -\left(I_z + \frac{\partial I_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy.$$

Indem wir diese Beiträge addiren und die Summe gleich $\varrho\, d\tau$ setzen, kommt:

$$\varrho = -\left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z}\right) = -\Gamma_\tau(I). \qquad \text{(11a)}$$

Für eine Unstetigkeitsfläche von I erhalten wir ebenso, wenn $\sigma\, dS$ die magnetische Menge auf dS bezeichnet:

$$\sigma = -(I_{N_1} + I_{N_2}) = -\Gamma_S(I). \qquad \text{(11b)}$$

Einen besonderen Fall einer solchen Unstetigkeitsfläche bildet die Oberfläche S des Magneten; hier ist, wenn N die äussere, n die innere Normale bezeichnet,

$$I_N = 0 \text{ und folglich}$$

$$\sigma = -I_n. \qquad \text{(11c)}$$

Durch die Gleichungen (11) sind jetzt die „magnetischen Mengen" definirt, und zwar bei beliebigen Werthen der I_x, I_y, I_z stets so definirt, dass ihre algebraische Summe für den ganzen

Magneten Null ist, wie es die Erfahrung fordert. Denn es ist identisch

$$\int \varrho d\tau + \int \sigma dS = -\int \Gamma(I)\, d\tau - \int I_n dS = 0 .$$

Da mit den I auch die m gegeben sind, so genügt die Angabe der I ebenso, wie die Angabe der m, um den Magneten vollständig zu charakterisiren.

Andererseits können aber, im Gegensatz zu den m, die I ganz willkürlich angenommen werden; sie charakterisiren stets einen möglichen Magneten.

Das Potential wird, wenn wir in (2′) die Werthe von ϱ und σ aus (11) einführen:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi\mu}\left[\int \frac{\Gamma(I)}{r}\, d\tau + \int \frac{I_n}{r}\, dS\right]. \tag{12a}$$

Oder durch partielle Integration über τ:

$$\psi = \frac{1}{4\pi\mu}\int\left(I_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + I_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + I_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\tau , \tag{12}$$

wo x', y', z' laufende Coordinaten in τ bezeichnen.

Diese Umformung gilt allgemein auch für innere Punkte trotz der Unstetigkeit von $\frac{1}{r}$, vgl. Kap. I, S. 98.

Die Energie wird aus (4′):

$$W_m = -\, {}^1\!/_2 \int \psi\, \Gamma(I)\, d\tau - {}^1\!/_2 \int \psi\, I_n\, dS ,$$

oder durch partielle Integration und Benutzung von (3):

$$W_m = -\, {}^1\!/_2 \int (I_x M_x + I_y M_y + I_z M_z)\, d\tau . \tag{13}$$

Ebenso folgt aus (5) die wechselseitige Energie zweier Magnete von der Magnetisirung I_1 im Raum τ_1, bezw. I_2 in τ_2:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\int (I_{1x} M_{2x} + I_{1y} M_{2y} + I_{1z} M_{2z})\, d\tau_1 \\ &= -\int (I_{2x} M_{1x} + I_{2y} M_{1y} + I_{2z} M_{1z})\, d\tau_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Aus (10) und (6) folgt:

$$\mathfrak{K}_{1x} = \int I_{1x}\, d\tau_1, \quad \mathfrak{K}_{1y} = \int I_{1y}\, d\tau_1, \quad \mathfrak{K}_{1z} = \int I_{1z}\, d\tau_1. \quad (15)$$

Wir wollen diese Gleichungen auf eine Reihe specieller Fälle anwenden.

Es sei erstens das Feld M_2 gleichförmig in dem Raum τ_1, welchen der erste Magnet einnimmt; dann entsteht aus (14) und (15) wiederum die Gleichung (7):

$$R = -(M_{2x}\mathfrak{K}_{1x} + M_{2y}\mathfrak{K}_{1y} + M_{2z}\mathfrak{K}_{1z}) = -M_2\mathfrak{K}_1 \cos(M_2\mathfrak{K}_1).$$

Es sei zweitens die Entfernung r eines Punktes p_1 von allen Punkten des zweiten Magneten (Raum τ_2) sehr gross gegen die Dimensionen des letzteren; dann folgt aus (12) und (15), wenn $p_2\,(x_2, y_2, z_2)$ einen Punkt in τ_2 bezeichnet:

$$\psi_2(p_1) = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\mathfrak{K}_{2x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_2} + \mathfrak{K}_{2y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_2} + \mathfrak{K}_{2z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_2}\right) \quad (16)$$

oder, wenn s_2 die Richtung der magnetischen Axe in τ_2 bezeichnet:

$$\psi_2(p_1) = \frac{1}{4\pi\mu}\mathfrak{K}_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s_2} = \frac{\mathfrak{K}_2\cos(\mathfrak{K}_2 r)}{4\pi\mu\cdot r^2} \quad (16a)$$

Diese Gleichung ist inhaltsgleich mit (8).

Es sei endlich p_1 ein Punkt im ersten, p_2 ein Punkt im zweiten Magneten und der Abstand $r = p_1p_2$ sehr gross gegen die Dimensionen des ersten wie des zweiten Magneten. Dann treffen die Voraussetzungen von (7) und (16) gleichzeitig zu, und es wird nach (7):

$$R = -M_{2s_1}\cdot\mathfrak{K}_1 = \frac{\partial\psi_2}{\partial s_1}\mathfrak{K}_1;$$

nach (16):

$$R = \frac{\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2}{4\pi\mu}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s_1\partial s_2} \quad (17)$$

oder in anderer Form

$$R = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \mathfrak{K}_{1x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \mathfrak{K}_{1y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} \mathfrak{K}_{1z}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\mathfrak{K}_{1x} \mathfrak{K}_{2x} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial x_2} + \mathfrak{K}_{1x} \mathfrak{K}_{2y} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial y_2} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{1}{r^3} (\mathfrak{K}_{1x} \mathfrak{K}_{2x} + \cdot\cdot) - \frac{3}{r^5} \left[(x_1 - x_2) \mathfrak{K}_{1x} + \cdot\cdot \right] \cdot \left[(x_1 - x_2) \mathfrak{K}_{2x} + \cdot\cdot \right] \right]$$

Also

$$R = \frac{\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2}{4\pi\mu r^3} \left[\cos (\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2) - 3 \cos (\mathfrak{K}_1 r) \cos (\mathfrak{K}_2 r) \right] \tag{17a}$$

wo als Richtung von r unter beiden cos-Zeichen die gleiche Richtung verstanden ist.

Aus den Veränderungen, welche R bei virtuellen Verschiebungen erfährt, folgen die mechanischen Kräfte zwischen zwei starren Magneten. Die Gleichung (17) enthält das Elementargesetz der mechanischen Wirkung. Sie zeigt, da R neben dem Abstand r auch Winkelgrössen enthält, dass es sich nicht um eine rein translatorische Kraft, sondern zugleich um Drehungsmomente handelt. Die Wirkung zwischen den realisirbaren Elementen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, welche Richtungsgrössen sind, unterscheidet sich dadurch von der einfacheren Wirkung, welche das Coulomb'sche Gesetz für die nur gedachten Elemente m_1, m_2 formulirt, die blosse Zahlengrössen sind.

Es bezeichne (ξ, η, ζ) ein in dem starren Magneten $(I, \mathfrak{K}, \tau)$ festliegendes Coordinatensystem. Die wechselseitige Energie des Magneten gegenüber einem äusseren Felde M_0 ist:

$$R = -\int (I_\xi M_{0\xi} + I_\eta M_{0\eta} + I_\zeta M_{0\zeta}) \, d\tau .$$

Wird der Magnet bewegt, so bleiben I_ξ, I_η, I_ζ ungeändert, und die bei einer beliebigen, — unendlich kleinen oder auch endlichen, — Verschiebung geleistete Arbeit ist daher nach (5a):

$$A = \int (I_\xi \cdot \delta M_{0\xi} + I_\eta \cdot \delta M_{0\eta} + I_\zeta \cdot \delta M_{0\zeta})\, d\tau. \tag{18}$$

Ist der Magnet so klein, dass das Feld M_0 dauernd als gleichförmig in τ betrachtet werden kann, so wird

$$A = \mathfrak{K}_\xi \cdot \delta M_{0\xi} + \mathfrak{K}_\eta \cdot \delta M_{0\eta} + \mathfrak{K}_\zeta \cdot \delta M_{0\zeta}. \tag{18a}$$

Wir wenden unsere Gleichungen auf die wichtigsten Massmethoden an:

Es sei ein stabförmiger Magnet im Erdfelde frei drehbar um die Verticale, während seine magnetische Axe horizontal liegt. Seine Lage ist dann bestimmt durch den Winkel φ, welchen seine Axe mit der horizontalen Componente H des Erdfeldes bildet. Die Arbeit bei einer Drehung um $d\varphi$ ist:

$$-H\mathfrak{K} \sin\varphi \cdot d\varphi.$$

Das heisst das Drehungsmoment zu wachsenden φ ist:

$$\Xi = -H\mathfrak{K} \sin\varphi. \tag{19}$$

Ξ kann experimentell bestimmt werden, sei es statisch aus der Directionskraft der Aufhängung, sei es dynamisch aus Trägheitsmoment und Schwingungsdauer. So erhält man in mechanischem Mass: $H \cdot \mathfrak{K}$.

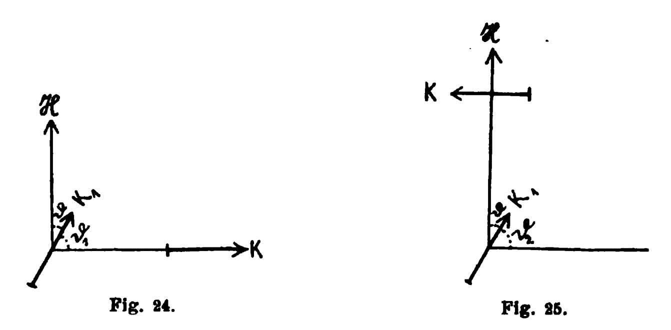


Fig. 24. Fig. 25.

Es sei ferner ein sehr kleiner Hülfsmagnet vom Moment $\mathfrak{K}_1$ drehbar um die Verticale, mit horizontaler Axe. Ihm werde der Magnet $\mathfrak{K}$ in grosser horizontaler Entfernung r gegenübergestellt in einer der beiden folgenden Lagen:

1) „erste Hauptlage“ (Fig. 24); die Axe von $\mathfrak{K}$ falle in die Richtung r. Dann ist nach (7) und (9a):

$$R = -\frac{\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K} S_1}{4\pi\mu r^3} \, 2 \cos (\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K})$$

2) „zweite Hauptlage" (Fig. 25); die Axe von $\mathfrak{K}$ sei horizontal und senkrecht zu r gerichtet. Dann ist nach (7) und (9b):

$$R = +\frac{\mathfrak{K}_1 . \mathfrak{K} S_2}{4\pi\mu r^3} \cos (\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}).$$

Hier bedeuten S_1 und S_2 die Klammergrössen der Gleichungen (9a) resp. (9b); also in erster Näherung:

$$S_1 = S_2 = 1;$$

in zweiter Näherung, wenn $2s$ den „Polabstand" des Magneten $\mathfrak{K}$ bezeichnet,

$$S_1 = 1 + 2\frac{s^2}{r^2} \tag{20a}$$

$$S_2 = 1 - \frac{3}{2}\frac{s^2}{r^2}. \tag{20b}$$

$\mathfrak{K}_1$ ist unter der Wirkung von $\mathfrak{K}$ in stabilem Gleichgewicht, wenn seine Axe derjenigen von $\mathfrak{K}$ bei 1) gleichgerichtet, bei 2) entgegengesetzt gerichtet ist. Ein Herausdrehen aus der Gleichgewichtslage um den Winkel ϑ_1 (bezw. ϑ_2) bewirkt ein rücktreibendes Drehungsmoment

$$\Theta_1 = \frac{2\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K} S_1}{4\pi\mu r^3} \sin \vartheta_1 \tag{21a),}$$

bezw.

$$\Theta_2 = \frac{\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K} S_2}{4\pi\mu r^3} \sin \vartheta_2. \tag{21b).}$$

Auf $\mathfrak{K}_1$ wirkt gleichzeitig das Erdfeld mit einem Drehungsmoment zu wachsenden ϑ:

$$\Theta = -H . \mathfrak{K}_1 \sin \vartheta,$$

wenn ϑ den Winkel zwischen H und $\mathfrak{K}_1$ bezeichnet.

Es sei nun die Axe von $\mathfrak{K}$ jedesmal senkrecht zu H gestellt, also im Fall 1) $r \perp H$, im Fall 2) $r \parallel H$, s. Fig. Dann ist

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta; \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta.$$

Gleichgewicht besteht für $\mathfrak{K}_1$, wenn

$$\Theta + \Theta_1 = 0, \text{ bezw. } \Theta + \Theta_2 = 0, \text{ also wenn}$$

$$\frac{2\mathfrak{K}S_1}{4\pi\mu H} = r^3.\mathrm{tg}\,\vartheta \tag{22a}$$

bezw.

$$\frac{\mathfrak{K}S_2}{4\pi\mu H} = r^3.\mathrm{tg}\,\vartheta. \tag{22b}$$

Die Beobachtung von ϑ für zwei verschiedene Entfernungen r gestattet, s zu eliminiren, und ergiebt also $\frac{\mathfrak{K}}{4\pi\mu H}$. Combinirt man diesen Werth mit dem Werthe von $H.\mathfrak{K}$ aus (19), so folgt $\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{4\pi\mu}}$ und $H\sqrt{4\pi\mu}$. Die Dimensionen sind:

$$[H.\mathfrak{K}] = ML^2T^{-2}$$

$$\left[\frac{\mathfrak{K}}{4\pi\mu H}\right] = L^3; \text{ also:}$$

$$\left[\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{4\pi\mu}}\right] = M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$$

$$[H\cdot\sqrt{4\pi\mu}] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}.$$

Im absoluten magnetischen Masssystem setzt man $4\pi\mu = 1$ und erhält also $\mathfrak{K}$ und H (Gauss).

Wir betrachten einige specielle Arten der Magnetisirung: Es sei zunächst ein Körper „gleichförmig magnetisirt", d. h. die Magnetisirung I constant nach Grösse und Richtung. Dann folgt aus (12) für den Punkt p (x, y, z):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\mu}\left[I_x\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}d\tau + I_y\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}d\tau + I_z\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}d\tau\right]$$

und weiter wie in Kap. I, S. 109:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{\mu}\left[I_x\frac{\partial g}{\partial x} + I_y\frac{\partial g}{\partial y} + I_z\frac{\partial g}{\partial z}\right]\\ \text{wo } g &= \int\frac{d\tau}{4\pi r}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Als gleichwerthigen Ausdruck erhält man aus (12a):

$$\psi = -\frac{1}{4\pi\mu}\int\frac{I_n}{r}dS. \tag{24}$$

Es sei weiter ein fadenförmiger Magnet gegeben, mit den Endpunkten e und a, dessen Magnetisirung I überall die Richtung des Fadens von e nach a hat und dem Querschnitt q desselben umgekehrt proportional ist. Es ist dann $\Gamma(I) = 0$ in der ganzen Ausdehnung des Fadens, nur an den beiden Enden ist $\Gamma_S(I) = \pm I$. Die vorausgesetzte Magnetisirung ist also gleichwerthig zwei magnetischen Mengen $\pm Iq$ an den Fadenenden. Der Faden heisst ein „magnetisches Solenoid"; dieser und nur dieser Magnet besitzt zwei „Pole", welche ihn allgemeingültig vertreten können. Das Potential ist

$$\psi = \frac{Iq}{4\pi\mu}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_e}\right).$$

Bildet das Solenoid eine geschlossene Curve, so sind seine magnetischen Mengen, und somit das von ihm erzeugte Feld Null.

Ist ein Magnet von beliebiger Form so magnetisirt, dass er sich zerlegen lässt in Solenoide, welche entweder geschlossen sind, oder ihre Endpunkte auf der Oberfläche des Magneten haben, so nennt man die Magnetisirung „solenoidal". Die vorausgesetzte Zerlegung ist möglich, wenn im Innern des Magneten überall $\Gamma(I) = 0$ ist. Sein Potential ist dann dasjenige einer reinen Oberflächenvertheilung magnetischer Mengen.

Eine andere wichtige Art der Magnetisirung werden wir in § 5 eingehend behandeln.

§ 3. Magnetisch inhomogenes Medium.

Die mathematische Grundlage unserer bisherigen Untersuchungen bildete das Gleichungssystem, welches wir als den Ausdruck des Coulomb'schen Gesetzes ansehen können:

(2) $\psi = \Sigma\frac{m_i}{4\pi\mu \cdot r_i}$ [mit dem Zusatz: $\Sigma m = 0$ für jeden Magneten]

(3) $M_l = -\frac{\partial \psi}{\partial l}$

(4) $W_m = \frac{1}{2} \Sigma m_k \psi_k$.

Aus diesem System lässt sich, — vgl. Kap. I, § 4 — das folgende ableiten:

$$\int \mu M_N dS = \Sigma m_i \text{ für jede geschlossene Fläche } S. \tag{E}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mu M^2 d\tau. \tag{F}$$

$$\oint M_l dl = 0 \text{ für jede geschlossene Curve } l. \tag{G}$$

Die physikalische Voraussetzung war, dass die Stahlmagnete, welche das Feld erzeugen, ausschliesslich von Luft umgeben seien. Bringen wir nun ein Stück weiches Eisen in das Feld, so zeigt sich zunächst qualitativ folgendes. Erstens: das Feld ist verändert; d. h. auf einen kleinen Probemagneten wirkt jetzt ein Drehungsmoment von anderer Grösse und Richtung als zuvor. Zweitens: auf das Eisenstück selbst wirken bewegende Kräfte. D. h. alles verhält sich, wie wenn das Eisen, das wir als ursprünglich unmagnetisch voraussetzen, und das sich dann, aus der Nachbarschaft der Magnete entfernt, auch wieder als unmagnetisch erweist, im Felde selbst zu einem Magneten geworden wäre. Quantitativ ist die einfachste Annahme, die man machen kann, diese: die Magnetisirung eines jeden Volumtheilchens des Eisenkörpers hat die Richtung des Feldes und ist proportional der Feldstärke (Poisson). Diese Annahme stellt in ihrem zweiten Theil der Wirklichkeit gegenüber nur eine erste Näherung dar; wir wollen aber an ihr festhalten.*) Die Magnetisirung, von welcher hier die Rede ist, wird, im Gegensatz zu der Magnetisirung eines permanenten Magneten, als „inducirt" bezeichnet. Sie heisse I'. Dann ist der mathematische Ausdruck des obigen:

1) Zu dem vorhandenen Feld tritt durch die Anwesen-

*) Die Grundzüge einer Theorie, welche die Proportionalität nicht voraussetzt, s. in Kapitel VIII A.

heit des Eisens ein „Zusatzfeld“, dessen Potential ist [vgl. (12) und (12a)]:

$$\chi = \frac{1}{4\pi\mu}\int\left[I_x'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + I_y'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + I_z'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right]d\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi\mu}\left[\int\frac{\Gamma(I')}{r}d\tau + \int\frac{I_n'}{r}dS\right],$$

wo τ das Volumen, S die Oberfläche des Eisenkörpers bedeutet.

2) Das Eisen bewegt sich so, als ob auf seine einzelnen Elemente Kräfte $M \cdot dm'$ wirkten, wo dm' bedeutet: $\varrho' d\tau = -\Gamma_\tau(I')\,d\tau$ oder $\sigma' dS = -\Gamma_S(I')\,dS$ [vgl. (11)].

3) Es ist:

$I_l' = \alpha M_l$, wo α eine Constante bedeutet.

Zu 2) ist zu bemerken, dass die Kräfte erschlossen sind aus den Bewegungsantrieben, welche starre Eisenmassen in Luft erfahren.

Es hat sich ferner ergeben (Faraday), dass die gleichen Sätze auch gelten, wenn an Stelle des Eisens ein beliebiger anderer Körper gesetzt wird. Die verschiedenen Substanzen unterscheiden sich nur durch die Werthe des Coefficienten α. Derselbe kann positiv oder negativ sein; im letzteren Fall ist $\frac{\alpha}{\mu}$, welches nach den obigen Gleichungen eine reine Zahl sein muss, stets ein kleiner echter Bruch; $1 + \frac{\alpha}{\mu}$ also ist für alle Körper eine positive Zahl.

Man ersetze nun M durch E, μ durch ε_0, α durch $\varepsilon - \varepsilon_0$ $\left(\text{also } 1 + \frac{\alpha}{\mu} \text{ durch } \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$; dann gehen die obigen Sätze über in die Gleichungen (67), (66), (62), (69), welche in § 12 des Kapitel I aus den Grundgleichungen (A) (B) (C) abgeleitet wurden. Daraus schliessen wir: Um von den soeben besprochenen Erfahrungsthatsachen Rechenschaft zu geben, genügt die folgende Erweiterung der Theorie: es gelten allgemein die Gleichungen (E), (F) und (G); nur bedeutet in

ihnen μ nicht eine universelle Constante, sondern eine Körperconstante.

Unser magnetisches Feld ist ein statisches: es kann, so lange die Körper ruhen, ohne Energieumsetzung dauernd bestehen. Die allgemeinsten Eigenschaften eines solchen Feldes sind nach dem soeben gesagten in den folgenden Sätzen vollständig ausgesprochen:

Ein statisches magnetisches Feld besitzt magnetische Energie im Betrage

$$W_m = {}^1/_2 \int \mu M^2 \, d\tau \, . \qquad \text{(F)}$$

Die Abnahme, welche diese Grösse durch beliebige Verschiebungen und Deformationen der Körper erfährt, ist, sofern die Bewegungen hinreichend langsam erfolgen, gleich der von dem System geleisteten Arbeit.

μ bezeichnet eine positive Constante, welche die in $d\tau$ vorhandene Materie charakterisirt und deren magnetische „Permeabilität" heisst. Es sei μ_0 die Permeabilität des Vacuums, (oder sehr nahe der Luft). Dann giebt es Substanzen für welche $\mu > \mu_0$ ist, diese heissen „paramagnetisch"; und solche, für welche $\mu < \mu_0$ ist, diese heissen „diamagnetisch". —

M ist ein Vector, die „magnetische Feldintensität"; er ist überall endlich, und im unendlichen gleich Null, mindestens wie $\frac{1}{r^2}$. Für jede geschlossene Curve ist

$$\int\limits_{\bigcirc} M_l \, dl = 0 \, . \qquad \text{(G)}$$

$\mu M = \mathfrak{M}$ heisst die „magnetische Polarisation"; bezüglich dieser gilt für jede geschlossene Fläche S:

$$\int \mu M_N dS = \Sigma m_i \, . \qquad \text{(E)}$$

Hier sind die m_i die „magnetischen Mengen", welche sich in dem von S umspannten Raum befinden. Mit diesem Namen bezeichnen wir Grössen, welche nur in permanenten

Magneten existiren*), welche in diesen an den Elementen der Materie fest haften, und deren algebraische Summe für jeden Magneten gleich Null ist. Die Gruppe der Substanzen, aus welchen sich permanente Magnete bilden lassen, soll nach ihrem Hauptrepräsentanten „ferromagnetisch" heissen.

Wir wiederholen, dass im vorstehenden unsere Voraussetzungen vollständig enthalten sein, — dass insbesondere also mit den Worten „magnetische Menge" nur die Vorstellungen verknüpft werden sollen, welche durch die Gleichungen (E) (F) (G) und die ihnen folgenden Sätze gegeben sind. Alles nun folgende ist mathematische Ableitung aus den vorstehenden Annahmen.

Zunächst folgt durch die geometrische Betrachtung des § 2 (S. 185ff.):

Es existirt ein Vector I, die „Magnetisirung", welcher mit den magnetischen Dichten

$$\varrho = \frac{dm}{d\tau} \text{ und } \sigma = \frac{dm}{dS}$$

verknüpft ist durch die Beziehungen (11):

$$-\Gamma_\tau(I) = \varrho, \quad -\Gamma_S(I) = \sigma,$$

und folglich mit den magnetischen Mengen durch die Gleichung:

$$-\int I_N dS = \Sigma m_i,$$

wo S eine beliebige geschlossene Fläche bezeichnet.

Dieses I ist nur in Magneten vorhanden**), kann aber andererseits in jedem Punkt eines Magneten beliebige Grösse und Richtung besitzen. Durch Einführung dieses Vectors geht (E) über in:

$$\int \mu M_N dS = -\int I_N dS \qquad \text{(E')}$$

für jede geschlossene Fläche.

*) Nicht in dem temporär magnetischen weichen Eisen, vgl. unten S. 207.

**) Nicht in den Körpern, welche lediglich eine „inducirte Magnetisirung" besitzen.

Die Gleichungen (E) (F) (G) sind von gleicher Form wie die Grundgleichungen (A) (B) (C) des statischen elektrischen Feldes. Es lassen sich also die in Kapitel I gezogenen Folgerungen übertragen, sofern man die folgenden Unterschiede beachtet:

a) Es fehlt ein Analogon zur Gleichung (D); es giebt also im Gebiet des Magnetismus keine Körper, welche den Leitern in der Elektrostatik entsprechen.

b) Es giebt Grössen m nur in der kleinen Klasse der ferromagnetischen Körper.

c) In jedem solchen Körper ist $\Sigma m = 0$.

d) Ordnet man alle Medien nach den Werthen ihrer Constanten μ, so befindet sich das Vacuum nicht am Ende der Reihe.

Aus a) folgt, dass es keine „geschlossenen" magnetischen Felder giebt; ein „vollständiges" Feld ist streng genommen nur der unendliche Raum. (Die Aufgabe, ein Feld zu begrenzen, welche der elektrische Leiter in vollkommener Weise löst, wird aber (s. unten) im Gebiet des Magnetismus mit grosser Annäherung gelöst durch Körper von den Eigenschaften des weichen Eisens.)

Der Einschränkung unter c) tragen wir Rechnung, indem wir statt der m die I einführen.

Wir stellen nun die wichtigsten Folgerungen aus (E) (F) (G) zusammen, indem wir für den Beweis auf die Parallelsätze aus Kapitel I, §§ 5, 6, 7, 11, 12 verweisen.

Aus (G) folgt (vgl. Kap. I, § 5): Das Feld M leitet sich aus einer einwerthigen Function ψ, dem „magnetischen Potential", ab gemäss der Gleichung

$$M_l = -\frac{\partial \psi}{\partial l}.$$

Wir können und wollen ψ als durchweg stetig annehmen und für alle unendlich fernen Punkte gleich Null setzen; dann ist ψ durch M vollkommen bestimmt.

M kann sich unstetig nur an gewissen Flächen ändern und auch dort nur seine Normal-Componente: die Tangential-Componenten sind stetig.

Weiter aus (E): es ist

$$\varrho = \Gamma_\tau(\mu M), \quad \sigma = \Gamma_S(\mu M) \tag{25}$$

bezw. aus (E'):

$$-\Gamma_\tau(I) = \Gamma_\tau(\mu M), \quad -\Gamma_S(I) = \Gamma_S(\mu M). \tag{26}$$

Weiter (vgl. Kap. I, § 6): Wir construiren „magnetische Kraftlinien", welche durch ihre Richtung und Dichte in bekannter Weise die Richtung und Grösse der Polarisation $\mu M = \mathfrak{M}$ darstellen. Keine dieser Kraftlinien schneidet dann sich selbst oder eine andere Kraftlinie. Keine läuft in sich zurück; eine jede besitzt zwei Endpunkte. (Wir bemerken vorweg, dass dies eine Eigenschaft statischer magnetischer Felder ist; nicht statische Felder besitzen, wie wir in Kapitel IV sehen werden, geschlossene Kraftlinien.) Am Ursprung jeder Kraftlinie befindet sich eine magnetische Menge + 1, an der Mündung eine Menge — 1; die Endpunkte befinden sich also ausschliesslich in den permanenten Magneten. Der Aussenraum wird von den Kraftlinien lediglich durchsetzt, und zwar verlaufen sie dort im allgemeinen mit stetiger Krümmung. Wo aber eine Kraftlinie die Grenzfläche zweier verschiedener Medien durchdringt, ist sie geknickt, und zwar ist, wenn α_1 und α_2 die Winkel bedeuten, welche sie mit der Normalen einschliesst,

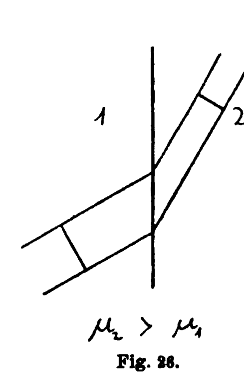


Fig. 26.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{27}$$

Sie wird also in dem Medium von grösserer Permeabilität von der Normalen fortgebrochen. Ein die Grenzfläche durchsetzendes Kraftlinienbündel hat daher (s. Fig. 26) einen kleineren Querschnitt in dem Medium von grösserem μ. Mit anderen Worten: beim Uebergang in dieses Medium nimmt die Dichte der Kraftlinien zu.

Wir construiren zugleich „Magnetisirungslinien",

welche I darstellen. Diese verlaufen ausschliesslich in den permanenten Magneten; keine Magnetisirungslinie kann sich selbst oder eine andere schneiden; im übrigen aber kann ihr Verlauf ein ganz beliebiger sein. Insbesondere können in sich zurücklaufende Magnetisirungslinien existiren; sie können sogar alle in sich zurücklaufen. (Der Magnet besteht dann aus einem System geschlossener Solenoide.) Die Endpunkte aller nicht geschlossenen Magnetisirungslinien fallen nach (26) mit den Endpunkten der Kraftlinien zusammen; nur sind jedesmal Ursprung und Mündung vertauscht.

Weiter (vgl. Kap. I, § 7): Ein statisches magnetisches Feld ist vollkommen bestimmt durch die magnetische Vertheilung ϱ, σ. Mit anderen Worten: der ganze Verlauf der Kraftlinien, innerhalb wie ausserhalb der Magnete, ist eindeutig bestimmt, sobald ihre Endpunkte gegeben sind. (Für den Beweis ist wesentlich, dass geschlossene Kraftlinien nicht existiren; der Satz gilt daher nur für statische Felder.)

Durch die I sind auch die ϱ, σ nach (11) gegeben; das Feld ist also auch bestimmt durch die Magnetisirung. Enthält ein Magnet nur in sich zurücklaufende Magnetisirungslinien, so sind nirgends magnetische Mengen vorhanden, und es existirt folglich kein Feld M. Allgemein: einem gegebenen System von Magnetisirungslinien kann man noch ein beliebiges System geschlossener Magnetisirungslinien superponiren, ohne an dem Felde M etwas zu ändern. Der Verlauf der Magnetisirungslinien ist durch ihre Endpunkte nicht bestimmt.

Für einen begrenzten Raum τ gilt: das Feld in τ ist vollständig bestimmt, wenn in τ die Endpunkte der Kraftlinien, und an der Oberfläche von τ die eintretenden Kraftlinien (die Grössen $\mathfrak{M}_n = \mu M_n$) gegeben sind.

Da unserer directen Beobachtung nur das Feld ausserhalb eines Magneten zugänglich ist, so können wir also auch nur über die aus seiner Oberfläche austretenden Kraftlinien etwas erfahren. Diese, als auf ein Gebiet von zwei Dimensionen beschränkt, lassen für die dreidimensionale Mannig-

faltigkeit der inneren Magnetisirung unendlich viele gleichwerthige Annahmen zu. Wir können begrifflich gleichwohl der Magnetisirung überall bestimmte Werthe zuschreiben, indem wir uns den Magneten aus beliebig kleinen Elementen aufgebaut denken, deren Feld wir einzeln untersucht haben. —

Gehört bei gegebener Vertheilung der Materie, also gegebenen Werthen μ, zu einer magnetischen Vertheilung m_1 (bezw. m_2) das Feld M_1, ψ_1 (bezw. M_2, ψ_2), so gehört zu der Vertheilung $m = m_1 + m_2$ das Feld M, ψ, wo

$$M_l = M_{1l} + M_{2l}, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2.$$

Gemäss den Gleichungen (11) kann man diesen Satz auch so aussprechen: superponirt man mehrere Magnetisirungen I, so superponiren sich auch die zugehörigen Felder M. —

Mittels (G) und (E), bezw. (E′), lässt sich (F) umformen in

$$W_m = {}^1/_2\, \Sigma m\psi,$$

beziehungsweise

$$W_m = -\,{}^1/_2 \int (I_x M_x + I_y M_y + I_z M_z)\, d\tau.$$

Damit sind die Ausdrücke (4) und (13) auch für unsere jetzigen allgemeineren Voraussetzungen wiedergewonnen.

Es lässt sich ferner, wenn die Vertheilung m in m_1 und m_2, bezw. die Magnetisirung I in I_1 und I_2, und demgemäss M in M_1 und M_2, ψ in ψ_1 und ψ_2 zerlegt wird, die Energie W_m zerlegen in

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + R.$$

Hier sind

$$W_{m1} = {}^1/_2\, \Sigma m_1\psi_1 = -\,{}^1/_2 \int (I_{1x} M_{1x} + ..)\, d\tau = {}^1/_2 \int \mu M_1^2\, d\tau$$

und

$$W_{m2} = {}^1/_2\, \Sigma m_2\psi_2 = -\,{}^1/_2 \int (I_{2x} M_{2x} + ..)\, d\tau = {}^1/_2 \int \mu M_2^2\, d\tau$$

die Energiewerthe der Theilfelder. Für die wechselseitige Energie R aber ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} R = \Sigma m_1 \psi_2 = \Sigma m_2 \psi_1 = -\int (I_{1x} M_{2x} + \ldots)\, d\tau \\ = -\int (I_{2x} M_{1x} + \ldots)\, d\tau = \int \mu (M_{1x}\, M_{2x} + \ldots)\, d\tau . \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Folgerungen hieraus sind:

Das Potential im Punkte p_1, welches von einem Einheitspol in p_2 herrührt, ist gleich dem Potential in p_2, welches von einem Einheitspol in p_1 herrührt. In Zeichen:

$$\psi_2(p_1) = \psi_1(p_2). \quad (29)$$

Das Potential $\psi_1(p_2)$ einer magnetischen Vertheilung der m_1, gebildet für den Punkt p_2, ist numerisch gleich der wechselseitigen Energie der m_1 und eines Einheitspols in p_2.

Das Potential im Punkte p_i ist numerisch gleich der Vermehrung, welche die magnetische Energie erführe, wenn dem Punkte p_i die (unendlich kleine) magnetische Menge 1 zugeführt würde. In Zeichen:

$$\psi(p_i) = \frac{\partial W_m}{\partial m_i}. \quad (30)$$

$M\,dl$ ist numerisch gleich der Energie, welche das System abgiebt, wenn die magnetische Menge Eins — ohne ihren materiellen Träger — um dl verschoben wird. M heisst daher häufig die „auf die magnetische Menge Eins wirkende Kraft". Diese ist aber (vgl. Kap. I, § 11) im allgemeinen **nicht** identisch mit der auf den **Träger** dieser Menge wirkenden mechanischen Kraft. Das heisst, wenn $f \cdot d\tau$ die mechanische Kraft bezeichnet, welche auf das Volumelement $d\tau$ wirkt, so ist im allgemeinen **nicht**

$$f_x = \varrho \cdot M_x \text{ etc.}$$

Vielmehr ist:

$$f_x = \varrho M_x - \tfrac{1}{2} M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \text{ etc.,} \quad (31)$$

sofern an der betrachteten Stelle ϱ und $\frac{\partial \mu}{\partial x}$.. endliche, d. h. I und μ stetig veränderliche Grössen sind.

Also zu der Kraft $M \cdot dm$ kommt im allgemeinen eine zweite hinzu, welche das Element in der Richtung des schnellsten Abfalls der Permeabilität μ treibt.

Addirt man zu (31) die identische Gleichung

$$0 = \mu M_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \right) + \mu M_z \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right),$$

so kommt

$$f_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{d p_{zx}}{\partial z} \text{ etc.,}$$

wo

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \tfrac{1}{2} \mu (M_x^2 - M_y^2 - M_z^2) \text{ etc.} \\ p_{yz} &= p_{zy} = \mu M_y M_z \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \qquad (32)$$

D. h. der **allgemeinste** Ausdruck für die Kräfte ist: zwischen je zwei aneinander grenzenden Körpertheilchen wirken die durch (32) gegebenen Spannungen p_{ik}; oder: auf die Flächeneinheit berechnet, wirkt in der Richtung der Kraftlinien ein normaler Zug vom Betrage $\tfrac{1}{2} \mu M^2$, senkrecht zu den Kraftlinien ein normaler Druck von gleichem Betrage. —

Insbesondere: befinde sich ein Körper von der Permeabilität μ_1, der **kein Magnet** ist, in einer Umgebung von der Permeabilität μ_0. Dann wirken auf ihn Kräfte nur an seiner Oberfläche S; und zwar wirkt auf das Element dS normal nach aussen:

$$d\nu = \tfrac{1}{2} (\mu_1 - \mu_0) M^2 \left[1 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1} \cos^2 (MN) \right] dS. \qquad (33)$$

Ist $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1}$ sehr klein, so wird hieraus:

$$d\nu = \tfrac{1}{2} (\mu_1 - \mu_0) M^2 dS. \text{ —} \qquad (33\,\text{a})$$

Weiter (aus Kap. I, § 7 unter c): ist im ganzen Raum $\mu = \text{const.} = \mu_0$, so lässt sich das Feld durch die m, bezw. I, explicite darstellen. Es ist nämlich in diesem Fall

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \Sigma \frac{m}{4\pi\mu_0 \cdot r} \\ &= -\frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\int \frac{\Gamma(I)}{r}\, d\tau + \int \frac{I_n}{r}\, dS\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\int\left[I_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + I_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + I_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right] d\tau\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

wo über das Volumen, bezw. Volumen und Oberfläche der Magnete zu summiren ist.

Ist μ nicht constant, so kann ψ gleichwohl auf diese Form gebracht werden (vgl. Kap. I, § 12). Man bezeichne nämlich durch μ_0 die Permeabilität eines bestimmten „Normalmediums", — durch M_0, ψ_0 das Feld, welches einer gegebenen magnetischen Vertheilung (m, ϱ, I) entspricht unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$ (d. h. also durch ψ_0 die Function, welche in (34) ψ genannt ist), — durch M, ψ das Feld, welches derselben Vertheilung (m, ϱ, I) entspricht, wenn im Raume τ μ_0 durch das beliebige μ ersetzt wird; man setze dann

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \chi \\ Z_l &= -\frac{\partial \chi}{\partial l}.\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Dann lässt sich das „Zusatzpotential" χ darstellen in der Form:

$$\left.\begin{aligned}\chi &= -\frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\int \frac{\Gamma(I')}{r}\, d\tau + \int \frac{I_n'}{r}\, dS\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\int\left[I_x' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + I_y' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + I_z' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right] d\tau,\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

wo I', die „inducirte Magnetisirung", definirt ist durch die Gleichung

$$I_l' = (\mu - \mu_0)\, M_l, \quad (37)$$

[vgl. Kap. I, (61), (62), (66), (67)]. Man kann also die Form der Gleichung (34) aufrecht erhalten, sofern man neben der gegebenen, „wahren" Magnetisirung I noch die inducirte Mag-

netisirung I' einführt. Die letztere ist nur in denjenigen Körpern vorhanden, deren Permeabilität von der des Normalmediums abweicht; sie muss im übrigen in jedem Fall erst gefunden werden.

Sie sei in einem bestimmten Fall gefunden; dann lassen sich in gewissem Umfange auch die mechanischen Kräfte durch sie darstellen. Man bezeichne noch

$$- \Gamma_\tau(I')\, d\tau \text{ und } - \Gamma_S(I')\, dS \text{ durch } dm'$$

entsprechend den Bezeichnungen in (11). Dann erhält man die Arbeit bei der Bewegung starrer Körper, welche in das Normalmedium eingebettet sind, in richtigem Gesammtbetrage aus der folgenden Annahme: auf jedes Volumelement des Körpers wirkt eine Kraft, welche die Richtung des Feldes M und die Grösse

$$df = M d(m + m') \qquad (38)$$

hat [vgl. Kap. I, (69)]. Die Bedeutung der hervorgehobenen Bedingung ist: deformirt werden darf bei der Bewegung nur das Normalmedium, — von den Spannungen im Innern des magnetisch inducirten oder „polarisirten“ Körpers geben die Kräfte (38) keine Rechenschaft. —

Die Gleichungen (34) bildeten die Grundlage für die elementare Theorie der §§ 1 und 2 dieses Kapitels. Der Inhalt der Gleichungen (35) bis (38) aber bildete den Ausgangspunkt für die Erweiterung der Theorie (s. S. 195f.).

Das Normalmedium, welches theilweise durch Eisen etc. ersetzt wurde, war die atmosphärische Luft. In den §§ 1 und 2 bedeutet also μ die Permeabilität der Luft. Wir präcisiren demnach unsere frühere Angabe (S. 176) jetzt dahin, dass das absolute magnetische Masssystem

$$4\pi\mu_0 = 1$$

setzt, wo μ_0 die Permeabilität der atmosphärischen Luft, — genauer, aber praktisch gleichbedeutend, des Vacuums, — bezeichnet.

Die Grösse, welche im allgemeinen durch die Versuche bestimmt wird, ist $\frac{\mu}{\mu_0}$ (häufig ebenso wie μ „Permeabilität“

genannt). Man hat eine Grösse $\varkappa$ eingeführt und als „Suseptibilität" bezeichnet, welche definirt ist durch

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \frac{\mu - \mu_0}{4\pi\mu_0} \\ \text{oder} \qquad \frac{\mu}{\mu_0} &= 1 + 4\pi\varkappa. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Dieses $\varkappa$ ergiebt sich negativ und sehr klein für die überwiegende Mehrzahl aller Substanzen, die „diamagnetischen". Unter den „paramagnetischen" Substanzen, für welche $\varkappa$ positiv ist, befindet sich eine kleine Anzahl, für welche es beträchtliche Werthe besitzt. Diese gehören zu derselben Körpergruppe, aus welcher sich zugleich permanente Magnete herstellen lassen und welche als „ferromagnetisch" bezeichnet wurde.*) Für gewisse Eisensorten kann $\frac{\mu}{\mu_0}$ mehrere Tausende betragen. Für alle nicht-ferromagnetischen Körper aber unterscheidet sich $\frac{\mu}{\mu_0}$ von der Einheit höchstens um einige Tausendstel ($\frac{\mu}{\mu_0}$ ist also für alle Körper positiv, wie bereits S. 196 angeführt wurde).

Die Grössen m werden von Hertz als „wahre", die Grössen $(m + m')$ als „freie" magnetische Mengen bezeichnet. Entsprechend wäre I als die „wahre Magnetisirung", und die Resultante aus I und der „inducirten Magnetisirung" I' als die „freie" zu bezeichnen. Diese Resultante heisst häufig „Magnetisirung" schlechthin; wir werden aber unter diesem Namen nach wie vor den Vector I verstehen. Dieses I ist dann in jedem Volumelement eines Magneten fest, „permanent", und überall ausserhalb permanenter Magnete Null.

Bezüglich der beiden Theorien, von welchen die eine von der freien, die andere von der wahren Magnetisirung ausgeht, — die eine das Feld auffasst als durch das Zusammenwirken der

*) Es besteht aber innerhalb dieser Gruppe durchaus keine quantitative Beziehung zwischen der Fähigkeit, permanente Magnetisirung anzunehmen, und dem Werthe von μ.

I und der I' erzeugt, die andere die topographischen Eigenschaften des einheitlichen Gesammtfeldes an die Spitze stellt, — gilt das gleiche, was von den entsprechenden Theorien der Elektrostatik gesagt ist: Sie sind mathematisch äquivalent, aber für die Darstellung der allgemeinen Gesetze der Elektrodynamik ist die zweite Auffassung vortheilhafter (s. Kap. VIII A am Schluss).

Für die Behandlung specieller Aufgaben kann die Einführung der I' von Nutzen sein.

Allgemein kann man bemerken: Handle es sich um einen homogenen Körper, d. h. sei $\mu =$ const., dann ist

$$\varrho' = - \Gamma_\tau(I') = 0 .$$

Das heisst: die inducirten magnetischen Mengen befinden sich ausschliesslich auf der Oberfläche des Körpers, oder: die inducirte Magnetisirung ist solenoidal. —

Ferner: sind bei gegebener Vertheilung der Materie, also gegebenen Werthen der μ, für zwei verschiedene Felder M_0 die zugehörigen Felder M und somit die I' gefunden, und superponirt man dann die beiden M_0, so superponiren sich auch die M und somit die I'.

Dagegen: es werde bei gegebener (wahrer) magnetischer Vertheilung ϱ, σ (oder Magnetisirung I) in zwei verschiedenen Raumtheilen τ_1 und τ_2 die Luft durch einen „polarisirbaren" Körper ersetzt, und man habe in jedem der beiden Fälle das entsprechende Zusatzfeld Z und somit die I' gefunden. Wenn man dann die Veränderungen in τ_1 und τ_2 gleichzeitig vornimmt, so superponiren sich die Z und folglich auch die I' nicht.

Ferner: das Feld M der Gleichung (38) ist allgemein das thatsächliche Feld, welches bestimmt ist durch die wahren magnetischen Mengen m und durch die Lage der polarisirbaren Körper. Sobald die inducirten m' der letzteren bekannt sind, kann M nach dem Coulomb'schen Gesetze durch die m und m' ausgedrückt werden. Ist nun aber der starre Körper, um dessen Bewegung es sich handelt, der einzige polarisirbare Körper im Raum, sind also die m' nur in ihm vorhanden, so wird die Arbeit bei einer Verschiebung nicht

geändert, wenn weiter im Ausdruck der Kräfte M durch M_0 ersetzt wird [vgl. Kap. I, (71)]. Unter dieser Voraussetzung also darf als Elementarkraft auch angenommen werden

$$df = M_0\, d(m + m'). \tag{40}$$

Werden durch eine unendlich kleine Verschiebung die einzelnen Körperelemente von Raumstellen mit dem Potential ψ_0 zu Stellen mit dem Potential $\psi_0 + \delta\psi_0$ übergeführt, so leisten diese Kräfte die Gesammtarbeit

$$\partial A = -\int \delta\psi_0 \cdot d(m + m') = \int \delta\psi_0\, [\Gamma(I) + \Gamma(I')]\, d\tau.$$

Bezeichnen nun ξ, η, ζ ein im Körper festes Coordinatensystem, so folgt durch partielle Integration:

$$\partial A = -\int \left[(I_\xi + I_\xi') \frac{\partial \cdot \delta\psi_0}{\partial \xi} + \cdot \cdot \right] d\tau.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial \cdot \delta\psi_0}{\partial \xi} = \delta \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = -\, \delta M_{0\xi}; \quad \text{also}$$

$$\partial A = \int \left\{ (I_\xi + I_\xi')\, \delta M_{0\xi} + (I_\eta + I_\eta')\, \delta M_{0\eta} + (I_\zeta + I_\zeta')\, \delta M_{0\zeta} \right\} d\tau. \tag{41}$$

Ist das gegebene Feld M_0 gleichförmig in dem vom polarisirten Körper erfüllten Raum und $\mathfrak{K}'$ dessen inducirtes Gesammtmoment, so wird

$$\partial A = (\mathfrak{K}_\xi + \mathfrak{K}_\xi')\, \delta M_{0\xi} + (\mathfrak{K}_\eta + \mathfrak{K}_\eta')\, \delta M_{0\eta} + (\mathfrak{K}_\zeta + \mathfrak{K}_\zeta')\, \delta M_{0\zeta}. \tag{41a}$$

Die Gleichungen (41) haben die Form der Gleichungen (18). Sie gelten aber nur für unendlich kleine Verschiebungen. Bei der Berechnung der Arbeit für eine endliche Verschiebung ist zu beachten, dass I' von M_0 abhängig ist. —

Besitzt ein in das Normalmedium eingebetteter Körper keine wahre Magnetisirung, so ist die Arbeit bei einer beliebigen unendlich kleinen oder endlichen Verschiebung oder Deformation dieses Körpers (vgl. Kap. I, S. 105) gleich der Abnahme der Function

$$W_m - W_{m0} = -\, {}^1\!/_2 \int (\mu - \mu_0)\, (M_x\, M_{0x} + \cdot \cdot)\, d\tau,$$

also nach (37):

$$A = \delta\left\{{}^1/_2\int(I_x'\,M_{0x} + I_y'\,M_{0y} + I_z'\,M_{0z})\,d\tau\right\}. \qquad (42)$$

Ist M_0 gleichförmig in τ, so kommt:

$$A = \delta\left\{{}^1/_2\,(\mathfrak{K}_x'\,M_{0x} + \mathfrak{K}_y'\,M_{0y} + \mathfrak{K}_z'\,M_{0z})\right\}. \qquad (42\text{a})$$

Die Ausdrücke (42) und (42a) sind von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig.

Die Aufgabe, für ein gegebenes Feld M_0 und eine gegebene Form des polarisirbaren Körpers die I' zu finden, ist nur für wenige Fälle streng gelöst.

Allgemein lösbar ist sie in erster Näherung dann, wenn $\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$ eine sehr kleine Zahl ist. Dann nämlich ist genähert [vgl. Kap. I, S. 104]

$$I_l' = (\mu - \mu_0)\,M_{0l}. \qquad (43)$$

Der Bedingung genügen alle nicht-ferromagnetischen Körper; sie sind zugleich frei von wahrer Magnetisirung. Bringt man daher einen solchen Körper von beliebiger Form in ein gleichförmiges Feld, so sind die mechanischen Kräfte klein von der Ordnung $\left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right)^2$. Für die Verhältnisse, welche wir realisiren können, sind sie stets unmerklich klein. Wenn wir daher an einem nicht-ferromagnetischen Körper Bewegungsantriebe beobachten, so rühren diese stets von Inhomogenität des Feldes her. Sie lassen sich, in erster Näherung, ableiten aus Elementarkräften $f \cdot d\tau$, wo

$$f_x = \frac{\mu - \mu_0}{2}\,\frac{\partial (M_0{}^2)}{\partial x}. \qquad (44)$$

Sie sind nur zu beobachten in sehr intensiven Feldern. Die stärksten magnetischen Felder, welche wir herstellen können, haben die Symmetrie-Eigenschaften des in Kap. I, S. 118 angenommenen elektrischen Feldes. In diesen Feldern stellt sich ein paramagnetisches Stäbchen parallel, ein diamagneti-

sches normal zu den Kraftlinien ein. Dieser Einstellung, die also ganz specielle Versuchsbedingungen voraussetzt, entstammt der Name „diamagnetisch." —

Für die inducirte Magnetisirung ferromagnetischer Körper ist die Körperform wesentlich. Ist der Körper (τ) ein homogenes Ellipsoid, der ganze äussere Raum von dem Normalmedium erfüllt, und M_0 gleichförmig in τ, so erhält der Körper eine gleichförmige inducirte Magnetisirung I', und zwar wird, wenn x, y, z parallel den Hauptaxen des Ellipsoids genommen werden,

$$I_x' = \frac{\mu_0 M_{0x}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+A}, \quad I_y' = \frac{\mu_0 M_{0y}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+B}, \quad I_z' = \frac{\mu_0 M_{0z}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+C}, \tag{45}$$

wo A, B, C die bekannten Constanten bezeichnen [s. (37) und Kap. I, (76)]. Durch die Anwesenheit des Körpers wird das Potential ψ_0 des ursprünglichen Feldes verwandelt in

$$\psi = \psi_0 + \chi,$$

$$\left.\begin{aligned} \chi &= -\left[\frac{M_{0x}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+A}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{M_{0y}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+B}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{M_{0z}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+C}\frac{\partial g}{\partial z}\right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0}\left[I_x'\frac{\partial g}{\partial x} + I_y'\frac{\partial g}{\partial y} + I_z'\frac{\partial g}{\partial z}\right], \\ &\quad \text{wo } g = \int\frac{d\tau}{4\pi r}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Der Körper sei drehbar um die vertical gedachte z- oder c-Axe. Die horizontale Componente H des gegebenen Feldes M_0 bilde mit der a-Axe den variablen Winkel ϑ. Dann ist

$$M_{0x} = H\cos\vartheta \qquad \mathfrak{K}_x' = \frac{\mu_0 H\cos\vartheta\cdot\tau}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+A}$$

$$M_{0y} = H\sin\vartheta$$

$$M_{0z} = \text{const.} \qquad \mathfrak{K}_y' = \frac{\mu_0 H\sin\vartheta\cdot\tau}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+B}$$

also nach (41a) oder (42a) das Drehungsmoment zu wachsenden ϑ:

$$\left.\begin{aligned} \Theta = \frac{\partial A}{\partial \vartheta} = \mu_0 H^2 \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \tau \left[\frac{1}{\frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} + B} - \frac{1}{\frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} + A} \right] \\ = M_{0x} \cdot \mathfrak{H}_y' - M_{0y} \cdot \mathfrak{H}_x'. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Aus der Beobachtung von χ wie von Θ kann auf den Wert von $\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$ geschlossen werden.

Die „magnetometrische Methode“, welche die Veränderung des äusseren Feldes, d. h. χ benützt, kann praktisch nur für grosse Werthe dieses Quotienten angewandt werden. Es gelten dann die Bemerkungen in Kapitel I, S. 112 über die Form und Orientirung des Ellipsoids.

Hier soll noch eine Anwendung der Gleichung (29) gemacht werden. Es sei im Raum ausser dem Normalmedium noch ein Eisenkörper vorhanden. Dann ist mit den Bezeichnungen von (29)

$$\psi_1(p_2) = \frac{1}{4\pi\mu_0 \cdot r_{12}} + \chi_1(p_2)$$

$$\psi_2(p_1) = \frac{1}{4\pi\mu_0 \cdot r_{12}} + \chi_2(p_1).$$

Also

$$\chi_1(p_2) = \chi_2(p_1).$$

In Worten: Das Zusatzpotential des durch einen Einheitspol in p_1 inducirten Eisenkörpers für den Punkt p_2 ist gleich dem Zusatzpotential des durch einen Einheitspol in p_2 inducirten Körpers für den Punkt p_1.

Nun sei der Eisenkörper ein Ellipsoid, und der Punkt p_2 befinde sich in dem sehr grossen Abstande r von dem willkürlichen Punkt x', y', z' des Ellipsoids. Dann erhalten wir $\chi_2(p_1)$ aus (46), indem wir

$$M_{0x} = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \quad \text{etc.}$$

und

$$x = x_1 \quad \text{etc.}$$

setzen. Also

$$\chi_2(p_1) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \cdots\right]$$

Es möge andererseits $\mathfrak{K}_1'$ das inducirte Gesammtmoment bezeichnen, welches das Ellipsoid unter der Wirkung des Einheitspoles in p_1 erhält. Dann ist nach (16):

$$\chi_1(p_2) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\mathfrak{K}_{1x}'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \cdots\right]$$

Also folgt:

$$\mathfrak{K}_{1x}' = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}+A} \quad \text{etc.} \tag{48}$$

Es möge $\mathfrak{K}_i'$ das inducirte Moment bezeichnen, welches von einem Einheitspol in p_i herrührt; dann erzeugt eine beliebige Vertheilung von magnetischen Mengen m_i in Punkten p_i ein inducirtes Moment $\mathfrak{K}'$ des Ellipsoids, wo

$$\mathfrak{K}_x' = \Sigma m_i \mathfrak{K}_{ix}' \quad \text{etc.} \tag{49}$$

Dieses Gesammtmoment (nicht aber die inducirte Magnetisirung der einzelnen Volumelemente) kann also für jede beliebige magnetische Vertheilung angegeben werden.

Bringt man eine Hohlkugel mit den Radien a_1 und $a_2 > a_1$ und der Permeabilität μ in ein gleichförmiges Feld, für welches im übrigen der Werth μ_0 gilt, so bleibt (s. Kap. I, S. 117) im Hohlraum das Feld gleichförmig. Es ist aber geschwächt im Verhältniss

$$\frac{1}{1+\frac{2}{9}\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\mu\cdot\mu_0}(1-\beta)},$$

wo $\beta = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$.

Ist z. B. $\frac{\mu}{\mu_0} = 1000$, so ist der Grenzwerth dieses Verhältnisses $\frac{1}{251}$ für $\beta = 0$. Eine Hülle aus weichem Eisen kann daher bei geeigneter Form ihr Inneres nahezu vollkommen gegen die Einwirkung eines äusseren Feldes schützen. Genau das gleiche würde aber auch gelten, wenn überall im Felde Eisen und Luft mit einander vertauscht würden; die Lufthülle würde dann ihren eisernen Kern schützen.

§ 4. Die Permeabilität der Magnete.

Die allgemeinen Grundgleichungen (E) (F) (G) haben wir eingeführt als eine Erweiterung der Gleichungen (2), (3), (4). Diese letzteren, die als Elementargesetz der mechanischen Kräfte das Coulomb'sche Gesetz in sich enthalten, waren als gültig angenommen für den Fall, wo wir lediglich Stahlmagnete, von Luft umgeben, vor uns hatten.

Wir sehen jetzt: soll wirklich in diesem Fall die Gleichung (2) und somit auch (12) gelten, und sollen in (2) die m, in (12) die I_x . . unveränderliche, „permanente“, Grössen bedeuten, so muss das μ der Stahlmagnete gleich dem μ_0 der Luft sein. (Dann wären die Stahlmagnete „permanent“, solange sie sich in Luft befänden; es träte aber in ihnen „inducirte“ Magnetisirung auf, sobald sie in ein anderes Medium eingebettet würden.) Dies trifft nun keineswegs zu, und die Gleichung (12) gilt auch selbst als eine erste Näherung nur unter gewissen Bedingungen, welche allerdings bei den wichtigsten Massmethoden erfüllt sind.

Wir behandeln zunächst ein Beispiel, für welches sich das Feld in Strenge darstellen lässt: Es sei der Magnet ein gleichförmig magnetisirtes Ellipsoid (Magnetisirung I). Seine Permeabilität sei zunächst gleich der Permeabilität μ_0 der umgebenden Luft. Dann hat nach (23) das Potential ψ den Werth:

$$\psi_0 = -\frac{1}{\mu_0}\left[I_x \frac{\partial g}{\partial x} + I_y \frac{\partial g}{\partial y} + I_z \frac{\partial g}{\partial z}\right], \tag{50}$$

wo g die in Kapitel I Gleichung (21) u. ff. dargestellte Function bezeichnet.

Die Function ψ_0 ist das Potential, weil sie einwerthig und stetig ist, im unendlichen verschwindet, überall ausser an der Oberfläche S des Ellipsoids der Gleichung $\Delta\psi_0 = 0$ genügt, an S aber ergiebt:

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial N_i} = \frac{A I_x}{\mu_0} \cos(N_i x) + \ldots$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial N_a} = -\frac{(1-A) I_x}{\mu_0} \cos(N_i x) + \ldots$$

und somit

$$\mu_0 \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial N_i} + \frac{\partial\psi_0}{\partial N_a} \right) = I_x \cos(N_i x) + \ldots = I_{N_i}$$

(vgl. Kap. I, S. 110 f. die Eigenschaften der Function χ).

Jetzt soll die Permeabilität des Magneten μ_1, die des Aussenraums μ_2 sein. Dadurch ändert sich in den Bedingungen für ψ nur die Gleichung für S; diese lautet jetzt:

$$\mu_1 \frac{\partial\psi}{\partial N_i} + \mu_2 \frac{\partial\psi}{\partial N_a} = I_x \cos(N_i x) + I_y \cos(N_i y) + I_z \cos(N_i z) .$$

Offenbar genügt allen übrigen Bedingungen der Ausdruck:

$$\psi = -\left[\alpha_x \frac{\partial g}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial g}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial g}{\partial z} \right], \tag{51 a}$$

wenn α_x, α_y, α_z beliebige Constanten bedeuten.

Der Bedingung für S wird ebenfalls genügt, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{I_x}{\mu_1 A + \mu_2 (1-A)}, \quad \alpha_y = \frac{I_y}{\mu_1 B + \mu_2 (1-B)}, \\ \alpha_z &= \frac{I_z}{\mu_1 C + \mu_2 (1-C)}. \end{aligned}\right\} \tag{51 b}$$

Diese Lösung des allgemeineren Falls kann in doppelter Weise mit der des Specialfalles in (50) verglichen werden.

Erstens sei $\mu_1 = \mu_0$. Dann heisst unser Resultat: wenn die Permeabilität μ_0 des Aussenraums sich in μ_2 verwandelt, so ändert sich das Feld, selbst unter unseren speciellen Vor-

aussetzungen, im allgemeinen so, dass es sich selbst nicht ähnlich bleibt. Nur wenn die Magnetisirung einer Hauptaxe, etwa a, parallel ist, dann verwandelt sich das ursprüngliche Potential

$$-\frac{I_x}{\mu_0}\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{in} \quad -\frac{I_x}{\mu_0 A + \mu_2(1-A)}\frac{\partial g}{\partial x};$$

dann also wird das Feld in constantem Verhältniss verändert. Ist insbesondere die a-Axe des Ellipsoids sehr gross gegenüber mindestens einer der beiden anderen, so ist $A = 0$, und das Feld wird folglich im Verhältniss $\frac{\mu_0}{\mu_2}$ verändert. Ist aber die a-Axe sehr klein gegenüber den beiden anderen, so ist $A = 1$, und das Feld wird gar nicht verändert.

Hier tritt ein Unterschied gegenüber der Elektrostatik auffällig hervor. Die wichtigsten, — für alle messenden Versuche die einzigen, — Träger der Elektricitätsmengen sind die Leiter. Ersetzt man bei unveränderter Ladung den umgebenden homogenen Isolator durch einen andern, so wird das Feld stets im umgekehrten Verhältniss der Dielektricitätsconstanten geändert. — Die einzigen Träger der magnetischen Mengen sind die Magnete. Verändert man hier die homogene Umgebung, so lässt sich über die Veränderung des Feldes etwas allgemeingültiges nicht aussagen; alles hängt von der Form und Magnetisirung der Magnete ab. Der Unterschied ist darin begründet, dass das Feld im Leiter selbst Null ist, im Magneten aber nicht.

Es sei zweitens $\mu_2 = \mu_0$. Dann lässt sich unser Resultat aussprechen: das Feld eines gleichförmig magnetisirten, elliptisch geformten, von Luft (μ_0) umgebenen Magneten von der Permeabilität μ_1 und der Magnetisirung I ist dasselbe wie dasjenige, welches einer Permeabilität μ_0 und einer Magnetisirung I_1 entsprechen würde, wo

$$I_{1x} = \frac{\mu_0}{\mu_1 A + \mu_0(1-A)} I_x \quad \text{etc.}$$

Diese „scheinbare Magnetisirung“ I_1 ist im allgemeinen der wirklichen nicht gleichgerichtet. Sie ist es nur dann, wenn die letztere in eine der Hauptaxen, etwa a, fällt. Ist dann a sehr gross mindestens gegen eine der Axen b oder c,

so ist die „scheinbare" mit der wahren Magnetisirung I identisch. Ist aber a sehr klein gegenüber b und c, so wird

$$I_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1} I.$$

Diese Grenzwerthe von I_1 gelten offenbar für beliebige sehr gestreckte, bezw. sehr flache Formen des Magneten. Denken wir uns also einen Magneten in cylindrische Elemente zerlegt, deren Axe mit der Richtung der Magnetisirung zusammenfällt, und deren Querschnittsdimensionen sehr klein sind gegen die Länge. Das Feld eines solchen Elementarmagneten belehrt uns dann über sein wahres Moment, ohne dass wir sein μ zu kennen brauchen. Wird aus diesen Elementen der Magnet wieder aufgebaut, so kennen wir jetzt seine wahre Magnetisirung; -- die scheinbare hängt von der Gestalt und dem μ des Magneten ab. (Dies ist die präcisere Fassung des Satzes auf S. 202.)

Was hier „scheinbare Magnetisirung" genannt wurde, ist dieselbe Grösse, welche in § 2 „Magnetisirung" hiess. Sie giebt das Feld des Magneten nach (12), wenn weder andere Magnete noch solche Körper in der Nähe sind, deren μ von dem μ_0 der Luft wesentlich abweicht (und die wir der Kürze wegen in der Folge „Eisenkörper" nennen wollen). Wir können sie betrachten als die Resultante der wirklichen und derjenigen Magnetisirung, welche der Magnet, von Luft umgeben, selbst in sich inducirt. — Wird aber der Magnet in das Feld eines zweiten Magneten oder in die Nähe von Eisenmassen gebracht, so reicht die Kenntniss dieser „scheinbaren Magnetisirung" nicht mehr aus. Denn die inducirten Magnetisirungen zweier gleichzeitig im Felde vorhandenen Körper sind nicht unabhängig von einander (vgl. S. 208). Insbesondere, — und darin liegt der principielle Fehler der elementaren Theorie der §§ 1 und 2, — die Felder zweier Magnete superponiren sich nicht.

Die Aufgabe, welche sich hier stellt, kann so formulirt werden: Es ist zunächst das μ des Magneten zu bestimmen. Das kann, wie in § 3 ausgeführt ist, entweder durch die Beobachtung der Veränderungen im äusseren Felde, oder durch Beobachtung der auf den Körper selbst wirkenden Kräfte geschehen (eine dritte Methode werden wir in Kapitel V

kennen lernen), falls für die Körperform des Magneten und irgend ein Feld M_0 das Problem der inducirten Magnetisirung gelöst (das Zusatzfeld Z berechnet) ist. Kennt man so das μ eines jeden Magneten, so ist zum zweiten Mal für die in Betracht gezogene Configuration der Magnete (und eventuell Eisenmassen) dasselbe Problem zu lösen.

Die fragliche Aufgabe ist in allgemeiner Form nicht lösbar. Bei den Aufgaben, welche die magnetische Messtechnik stellt, liegen aber folgende besondere Verhältnisse vor: es wird gesucht das Feld nur in grosser Entfernung vom Magneten, und die Kräfte auf den Magneten nur in einem (nahezu) gleichförmigen Felde. Für beide Aufgaben kommt in erster Näherung nur in Frage das wahre und das inducirte Gesammtmoment des Körpers. Es besitzen ferner die Gestalt des Magneten und seine Magnetisirung einfache Symmetrieverhältnisse.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Symmetrieaxe für die Gestalt des Magneten; dann ist zwar nicht die inducirte Magnetisirung jedes Volumtheilchens, wohl aber das inducirte Gesammtmoment parallel dem äusseren Felde, wenn dieses die Richtung von $\mathfrak{A}$ hat. Existiren daher drei zu einander senkrechte Symmetrieaxen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist, wenn wir diese als Coordinatenaxen wählen, nach dem Superpositionsprincip (S. 208)

$$\mathfrak{K}_x' = a M_{0x}, \quad \mathfrak{K}_y' = b M_{0y}, \quad \mathfrak{K}_z' = c M_{0z},$$

wo a, b, c Constanten bezeichnen, welche von der Gestalt und dem μ des Magneten abhängen.

Unser Magnet besitze diesen Grad von Symmetrie, und es falle ferner seine magnetische Axe mit der Symmetrieaxe $\mathfrak{A}$ zusammen; d. h. das magnetische Moment, welches er ohne Einwirkung eines fremden Feldes zeigt, und welches wir wie früher durch $\mathfrak{K}$ bezeichnen, sei parallel zu $\mathfrak{A}$. Unter diesen Voraussetzungen behandeln wir nochmals die Gauss'sche Messungsmethode (S. 191 ff.). In einem ersten Versuch mögen die Richtungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ horizontal liegen, und $\mathfrak{A}$ mit der Horizontalcomponente H des Erdfeldes den Winkel φ einschliessen. Dann hat das inducirte Moment eine Componente

$$\alpha = aH\cos\varphi \quad \text{parallel zu } \mathfrak{A}, \quad \text{und}$$
$$\beta = bH\sin\varphi \quad \text{parallel zu } \mathfrak{B}.$$

Auf den Magneten wirkt daher nach (41a) ein Drehungsmoment zu wachsenden φ:

$$\Xi = -(\mathfrak{K} + \alpha) H \sin\varphi + \beta H \cos\varphi$$

$$= -\mathfrak{K} H \sin\varphi - \frac{a-b}{2} H^2 \sin 2\varphi .$$

Bleibt φ sehr klein, so kann hierfür gesetzt werden:

$$\Xi = -H\left[\mathfrak{K} + (a-b) H\right] \sin\varphi . \qquad (52)$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (19).

In einem zweiten Versuch dient derselbe Magnet dazu, einen Hülfsmagneten abzulenken. Seine Axe befindet sich dabei normal zu H; er wirkt daher, wie wenn er ein Moment $\mathfrak{K}$ parallel zu $\mathfrak{A}$ und ein Moment bH parallel zu $\mathfrak{B}$ besässe. Befindet er sich also dem Hülfsmagneten gegenüber in der sogenannten ersten Hauptlage, so erzeugt er am Ort desselben nach (9a) und (9b) in erster Näherung ein Feld

$$\frac{2\mathfrak{K}}{4\pi\mu_0 r^3} \text{ in der Richtung von } \mathfrak{K}$$

und

$$\frac{-bH}{4\pi\mu_0 r^3} \text{ in der Richtung von } H.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den Hülfsmagneten wäre daher, wenn nur sein permanentes Moment in Frage käme (vgl. S. 193):

$$\frac{2\mathfrak{K}}{4\pi\mu_0 r^3} \cos\vartheta = \left(H - \frac{bH}{4\pi\mu_0 r^3}\right) \sin\vartheta, \text{ oder}$$

$$\frac{2\mathfrak{K}}{H} = \operatorname{tg}\vartheta\,(4\pi\mu_0 r^3 - b). \qquad (53)$$

Diese Gleichung träte an Stelle von (22a), wo $S_1 = 1$ gesetzt ist.

In Kapitel V werden wir eine Methode kennen lernen, nach welcher die inducirten Momente α und β mit dem permanenten Moment $\mathfrak{K}$ verglichen werden können; es sind also $\frac{\alpha}{\mathfrak{K}}$ und $\frac{\beta}{\mathfrak{K}}$ und somit

$$\frac{aH}{\mathfrak{K}} = A \text{ und } \frac{bH}{\mathfrak{K}} = B$$

messbare Grössen. Führt man diese in (52) und (53) ein, so entsteht:

$$\Xi = - H\mathfrak{K}\,(1 + A - B) \sin\varphi \tag{52a}$$

$$\frac{\mathfrak{K}}{H}(2 + B \operatorname{tg}\vartheta) = 4\pi\mu_0 r^3 \cdot \operatorname{tg}\vartheta, \tag{53a}$$

welche Gleichungen als zweite Näherung die Gauss'schen Formeln zur Bestimmung von $H\mathfrak{K}$ und $\frac{\mathfrak{K}}{H}$ ersetzen. (In Wahrheit wird die Gleichung (53a) noch complicirter, weil auch der Hülfsmagnet ein inducirtes Moment besitzt, und weil er seinerseits inducirend auf den Ablenkungsmagneten wirkt; vgl. Dorn, Wied. Ann. 35, S. 270).

Die Correctionen werden klein, wenn das permanente Moment gross, aber die Permeabilität, und somit das inducirte Moment klein ist. Beide Bedingungen sind vereinbar für harten Stahl.

§ 5. Magnetische Doppelschicht.

Wir haben noch einen Magneten von besonderer Form eingehender zu behandeln. Er bilde eine sehr dünne Schale von der Fläche S, der Dicke h, der Permeabilität μ. Die Magnetisirung I soll überall normal zur Schale, und

$$\frac{Ih}{\mu} = \Phi \tag{54}$$

für die ganze Fläche eine Constante sein. Normalen N mögen in der Richtung von I gezogen werden; die Seite der Schale, aus welcher diese austreten, mag die positive heissen. — Dieser Magnetisirung gleichwerthig ist eine Belegung der positiven (bezw. negativen) Seite der Schale mit Magnetismus von der Dichte $\sigma = I$ (bezw. $= -I$). Die Schale wird deshalb auch eine „magnetische Doppelschicht" genannt; Φ heisse ihre „Stärke". Die Dimensionen sind:

$$[\Phi] = \left[\frac{\mathfrak{K}}{L^2\mu}\right].$$

Also nach S. 193:

$$\left[\Phi\sqrt{\mu}\right] = \left[\frac{\mathfrak{K}}{L^2\sqrt{\mu}}\right] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}.$$

Die Doppelschicht Φ_1 (S_1, M_1) werde in das Feld M_2 einer beliebigen anderen magnetischen Vertheilung (m_2, I_2) gebracht. Die wechselseitige Energie der beiden Systeme ist nach (28):

$$R = -\int I_1 M_{2N} h_1 \, dS_1 \quad \text{oder nach (54):}$$

$$R = -\Phi_1 Q_{21}, \tag{55}$$

wo

$$Q_{21} = \int_{S_1} \mu M_{2N} \, dS_1 \tag{56}$$

die Anzahl Kraftlinien des Feldes M_2 bezeichnet, welche von der negativen zur positiven Seite durch die Fläche S_1 der Doppelschicht hindurchtreten.

Durch die Randcurve s_1 von S_1 möge eine zweite Fläche S_1' gelegt werden, welche, — ebenso wie dies von S_1 gilt, — das magnetische System der m_2 nicht schneidet. Dann ist $\Sigma m_2 = 0$ für den von S_1 und S_1' umspannten Raum τ, und folglich das über die gesammte Oberfläche von τ erstreckte Integral $\int \mu M_{2N} dS = 0$, wenn N die äussere Normale von τ bezeichnet. Mit anderen Worten, das Integral

$$Q_{21} = \int \mu M_{2N} \, dS_1$$

hat bei gleichsinniger Normalenrichtung N denselben Werth für S_1 und S_1'. Die Flächen S_1 und S_1' sind noch einer Bedingung unterworfen. Man kann aber dem Satz eine andere Form geben, in welcher diese Bedingung verschwunden ist: Man bilde einen neuen Vector B, die „magnetische Induction" nach Maxwell, welcher definirt ist durch

$$B_l = \mu M_l + I_l. \tag{57}$$

Für diesen Vector folgt aus (26) S. 200:

$$\Gamma(B) = 0, \tag{58}$$

oder

$$\int B_N dS = 0 \text{ für jede geschlossene Fläche } S. \tag{58a}$$

Daraus folgt weiter: das Integral $\int B_N dS$ für eine **beliebige** Fläche S ist vollständig bestimmt durch die **Randcurve** s von S, — aber unabhängig von der Wahl der Fläche S, welche s ausfüllt.

Nun ist B_2 nach (57) identisch mit μM_2 überall ausserhalb der das Feld M_2 erzeugenden Magnete. Es ist also auch

$$Q_{21} = \int B_{2N} dS_1$$

für alle Flächen S_1, S_1', welche das System der m_2 nicht schneiden. Nach dem obigen aber folgt: es ist ganz allgemein

$$Q_{21} = \int B_N dS_1 \tag{56a}$$

für **jede** Fläche S_1, welche s_1 zur Randcurve hat. Q_{21} heisst daher auch die „**Induction des Feldes** M_2 **durch die Curve** s_1“.

Führen wir „**Inductionslinien**“ ein, welche B in bekannter Weise darstellen, so haben diese **nirgends** Endpunkte; sie bilden durchweg geschlossene Curven. Diese fallen ausserhalb der Magnete mit den Kraftlinien zusammen; innerhalb der Magnete aber schliessen sie sich zum Ring, während die Kraftlinien im Magneten Endpunkte besitzen, von und nach welchen sie divergiren, bezw. convergiren.

Da das Integral $\int B_{2N} dS_1$ nur von der Randcurve s_1 abhängt, so entsteht die Aufgabe, es auch in entsprechender Form **darzustellen**. Dies ist eine rein geometrische Aufgabe, die uns mit veränderter Bedeutung des Vectors, dessen Flächenintegral zu bilden ist, wiederholt begegnen wird.

Es sei also B ein beliebiger Vector, von dem wir nur voraussetzen, dass in einem gewissen Raum τ seine Divergenz gleich Null ist: $\Gamma(B) = 0$ in τ. Für eine ganz in τ liegende Fläche S sei das Flächenintegral

$$\int B_N dS$$

gebildet. Dieses soll umgeformt werden in ein Integral über die Randcurve s von S.

Hierzu dient ein von Stokes gefundener Satz, den wir jetzt ableiten wollen. Um zu unzweideutigen Bezeichnungen zu gelangen, treffen wir zunächst folgende Bestimmungen:

Als positive Rotation um eine Axe a soll diejenige gelten, welche ein Radius einer gewöhnlichen rechtsgewundenen Schraube ausführt, während die Schraubenaxe in der Richtung von $+a$ vorrückt („Rechtsschraubensystem"). Die Bewegung der Hand, durch welche ein Korkzieher eingedreht wird, ruft diese Zuordnung von positiver Translation und positiver Rotation leicht in die Erinnerung zurück.

Wenn eine Seite eines Flächenelements dS als positiv bezeichnet ist, und N die von der negativen zur positiven Seite gezogene — „positive" — Normale bedeutet, so soll positive Umlaufsrichtung um dS diejenige heissen, für welche N die Axe bildet. Für eine beliebige endliche Fläche S soll der positive Umlauf dadurch bestimmt sein, dass er sich aus Antheilen der positiven Umläufe um die Randelemente dS zusammensetzt.

Es sollen ferner rechtwinklige Coordinatenaxen x, y, z stets so gelegt werden, dass auf dem kürzesten Wege

$+x$ in $+y$ übergeht durch positive Drehung um $+z$; also auch
$+y$ „ $+z$ „ „ „ „ „ $+x$, und
$+z$ „ $+x$ „ „ „ „ „ $+y$.

Dies mag bezeichnet werden durch: „z ist Axe der Drehung $\widehat{xy}$" oder „$z \perp \widehat{xy}$" etc.

Es sei nun A ein Vector, der den folgenden Gleichungen genügt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= B_x \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &= B_y \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= B_z \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Dann ist

$$\int_{\circlearrowleft} A_s ds = \int_S B_N dS, \tag{60}$$

wenn N die positive Normale von dS, und $\circlearrowleft$ den positiven Umlauf auf der Randcurve s von S bezeichnet (Stokes'scher Satz).

Beweis: 1) Das Integral $U = \int A_s ds$ sei für die positiv zu durchlaufende Randcurve einer beliebigen Fläche S zu bilden. Wir zerlegen S in Elemente dS durch zwei beliebige Scharen von Curven (vgl. Fig. 19, S. 152), bilden das Linienintegral für die positiven Randcurven aller dS und addiren alle diese Integrale. Jedes Curvenstück im Innern von S wird hierbei zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; alle diese Beiträge heben sich also auf, und die Summe ist folglich gleich U.

2) Nun ist (vgl. Kap. II, S. 149) $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \cdot dy\, dz$ gleich dem Integral U, über die Randcurve von $dS_x = dy\, dz$, positiv um x, erstreckt. Also ist nach 1), wenn S_x eine beliebige ebene Figur bedeutet, deren positive Normale x ist,

$$\int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dS_x = U,$$

erstreckt über die positive Randcurve von S_x. Daraus folgt: für eine unendlich kleine Fläche S_x ist U proportional mit S_x. Oder:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

ist das Linienintegral von A, erstreckt um eine (unendlich klein gedachte) Flächeneinheit von beliebiger Form, deren positive Normale x ist. — Ebenso sind

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \text{ und } B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

die Linienintegrale von A, erstreckt um eine beliebig geformte, zu y (bezw. zu z) normale Flächeneinheit.

3) Wir bilden ein Tetraeder aus dem unendlich kleinen Dreieck S und dessen Projectionen S_x, S_y, S_z auf die Coordinatenebenen (s. Fig. 27). Die äussere Normale von S sei N; die inneren Normalen von S_x, S_y, S_z seien x, y, z. Die Integrale U, positiv um S_x, S_y, S_z erstreckt, sind nach 2):

$$B_x\, S_x\,, \quad B_y\, S_y\,, \quad B_z\, S_z\,,$$

wo $S_x = S \cos(Nx)$ etc. Bildet man die Summe dieser drei Integrale, so heben sich sechs Beiträge gegenseitig auf (s. Fig.), und es bleiben die Beiträge der drei durch Doppelpfeile bezeichneten Strecken. Diese bilden das Integral U, positiv um S erstreckt. Das letztere ist also

$$= [B_x \cos(Nx) + B_y \cos(Ny) + B_z \cos(Nz)]\,.\,S$$
$$= B_N \cdot S\,.$$

Daher nach 2): das Integral U, erstreckt um eine beliebig begrenzte, zu N normale Flächeneinheit, ist B_N; — und weiter nach 1): erstreckt um die Randcurve der Fläche S, ist

$$U = \int B_N dS\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Wenn zwischen den Vectoren A und B die Beziehungen (59) oder (60) bestehen, so soll B die „Rotation" von A heissen, und bezeichnet werden:

$$B = P(A)\,. \qquad (61)$$

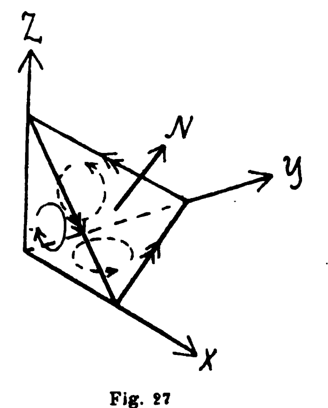


Fig. 27

Die Componente von B nach einer beliebigen Richtung N ist dann gleich dem Linienintegral von A um eine zu N normale Flächeneinheit, — die Richtung von B ist die Axe N, für welche dieses Integral seinen grössten Werth erhält, — die Grösse von B ist dieser Maximalwerth.

Hier ist der Vector B durch den Vector A ausgedrückt. In der ursprünglichen Aufgabe sollte umgekehrt zu dem ge-

gebenen B das A gefunden werden. Aus (59) folgt für jedes A die Gleichung $\Gamma(B) = 0$; d. h. B kann in dieser Form nur dargestellt werden, wenn $\Gamma(B) = 0$ ist. Dies war unsere Voraussetzung. Ist sie erfüllt, so ist A durch (59) noch nicht bestimmt; denn es sind drei Grössen A_x, A_y, A_z zur Verfügung und nur zwei unabhängige Gleichungen vorhanden. Man kann also noch eine Bedingung hinzufügen.

Wir kehren zu den Gleichungen (55) und (56) zurück, um sie auf eine Reihe besonderer Fälle anzuwenden. Zunächst ist nach (28) auch

$$R = -\int (I_{2x} M_{1x} + \cdot \cdot)\, d\tau_2 .$$

Indem man diesen Werth in (55) einsetzt, folgt allgemein

$$Q_{21} = \frac{1}{\Phi_1} \int (I_{2x} M_{1x} + \cdot \cdot)\, d\tau_2 . \tag{62}$$

Es sei insbesondere der zweite Magnet so klein, oder seine Entfernung von der Doppelschicht so gross, dass das Feld M_1 in τ_2 als gleichförmig betrachtet werden kann. Heisst dann sein Moment $\mathfrak{K}_2$, so ist die Anzahl von Kraftlinien, welche er durch die Doppelschicht sendet,

$$Q_{21} = \frac{M_1}{\Phi_1} \mathfrak{K}_2 \cos (M_1 \mathfrak{K}_2) . \tag{62a}$$

Es rühre ferner das Feld M_2 der Gleichung (56) von einem Einheitspol im Punkte p_2 her; dann ist nach (28) (vgl. S. 203) R gleich dem Potential ψ_1 der Doppelschicht im Punkte p_2. Also ist nach (55)

$$\psi_1 = - \Phi_1 \, q , \tag{63}$$

wo q die Anzahl Kraftlinien bedeutet, welche ein Einheitspol in p_2 in positiver Richtung durch S_1 sendet.

Sei nun S_1 eine geschlossene Schale, welche ihre negative Seite nach innen kehrt. Ist dann p_2 ein innerer Punkt, so ist $q = 1$; ist p_2 ein äusserer Punkt, so ist $q = 0$. Also ist ψ_1 constant sowohl im inneren wie im äusseren Raum; d. h. das Feld einer geschlossenen Doppelschicht ist überall ausserhalb der Doppelschicht selbst Null.

Denken wir die geschlossene Schale in beliebiger Weise in zwei Theile S_1' und S_1'' zerlegt. Tritt dann der Punkt p_2 etwa durch S_1' von innen nach aussen, so ändert sich der von S_1'' herrührende Beitrag zu q jedenfalls um eine gegen 1 verschwindende Grösse; es ist also der von S_1' herrührende Beitrag, der um 1 abnimmt. Das heisst nach (63): das Potential ψ einer beliebigen Doppelschicht von der Stärke Φ wächst um Φ, wenn man in positiver Richtung an einer beliebigen Stelle die Doppelschicht durchschreitet. In Zeichen:

$$\overset{+}{\psi} - \overset{-}{\psi} = \Phi. \tag{64}$$

Es ist aber ψ eine einwerthige Function der Coordinaten. Also folgt, wenn M das Feld der Doppelschicht bezeichnet: das Integral $\int M_l dl$ erhält jedesmal den Werth Φ, wenn man, auf beliebigem Wege die Doppelschicht umkreisend, von einem Punkt auf ihrer positiven Seite zu dem entsprechenden Punkte der negativen Seite gelangt.

In der Doppelschicht selbst ist das Feld M normal zur Schale von der positiven zur negativen Seite gerichtet, und sein Werth ist: $\frac{\Phi}{h}$. Wenn also h unbegrenzt abnimmt, Φ aber endlich bleibt, so wird es unendlich, und damit wird auch die Energie unendlich. Die Annahme $h = 0$ ist daher physikalisch unzulässig; sie bildet nur einen mathematischen Grenzfall. Wir wollen sie gleichwohl im folgenden machen, da sie die Darstellung vereinfacht und historisch zu wichtigen und streng gültigen Ergebnissen geführt hat.

ψ ändert sich dann unstetig an der Fläche S der Doppelschicht; die Normalcomponente der magnetischen Polarisation aber erleidet beim Durchschreiten der Schicht zweimal in entgegengesetztem Sinn eine Aenderung I, d. h. sie setzt sich stetig durch S fort.

Bei gegebener Form der Fläche S ist das äussere Feld der Doppelschicht eindeutig bestimmt durch den Werth von Φ. Dies folgt in bekannter Weise daraus, dass für das Differenzfeld zweier angenommener Lösungen das Potential nach (64) durchweg stetig wäre und die Polarisation nirgends eine Diver-

genz besässe. Für das Feld sind also die Grössen I, h, μ nur insoweit von Belang, als sie den Werth von $\Phi = \frac{Ih}{\mu}$ bestimmen. Insbesondere können wir eine von Luft umgebene Doppelschicht aus beliebigem Material stets ersetzen durch eine solche von der Permeabilität μ_0 und der Magnetisirung $I_0 = \frac{I\mu_0}{\mu}$ (vgl. das unendlich flache Ellipsoid, S. 217). — Aus dem Superpositionsprincip folgt, dass das Feld mit Φ proportional ist.

Die Grösse q der Gleichung (63) ändert sich nicht, wenn die Fläche S der Doppelschicht bei festgehaltener Randcurve deformirt wird, solange sie nur den Punkt p_2 nicht überstreicht. Das gleiche gilt also auch für das Potential ψ. Gleitet S über p_2 hinweg, so ändert sich ψ sprungweise um Φ. Die Differentialquotienten von ψ sind identisch für alle Doppelschichten von gleicher Randcurve.

Das heisst zusammengefasst: das Feld einer Doppelschicht (in jedem Punkt ausserhalb der Schicht) ist vollkommen bestimmt durch Stärke und Randcurve der Schicht; mit ersterer ist es proportional.

Ein anderer Specialfall der Gleichungen (55) (56): es rühre das Feld M_2 von einer zweiten Doppelschicht, Φ_2 in der Fläche S_2, her. Dann ist das Feld M_2, also auch Q_{21} proportional mit Φ_2. Wir setzen demnach

$$Q_{21} = \Phi_2 \cdot q_{21},$$

wo dann q_{21} die Anzahl von Kraftlinien bedeutet, welche eine in S_2 gelegene Doppelschicht von der Stärke 1 durch S_1 hindurchsendet. Bezeichnen wir noch durch

$$Q_{12} = \Phi_1 \cdot q_{12}$$

die Zahl der Kraftlinien, welche die Doppelschicht Φ_1 durch S_2 sendet, so wird einerseits

$$R = -\Phi_1 \cdot Q_{21};$$

andererseits

$$R = -\Phi_2 \cdot Q_{12};$$

und es folgt:

$$q_{12} = q_{21} \tag{65}$$

gleich der Anzahl von Kraftlinien, welche eine Einheits-Doppelschicht in der einen Fläche durch die andre Fläche sendet.

Die Kräfte, welche bei Anwesenheit eines beliebigen magnetischen Systems der m_2 auf die Doppelschicht Φ_1 wirken, erhalten wir allgemein aus der Veränderung, welche die Energie $W_m = W_{m1} + W_{m2} + R$ bei einer virtuellen Verschiebung erfährt. Ist die Doppelschicht ihrer unmittelbaren Umgebung magnetisch gleichartig, — insbesondere: ist die Umgebung Luft und hat die Doppelschicht die Permeabilität μ_0, — so ändert sich W_{m2} bei der Verschiebung nicht. Diese Annahme wollen wir machen. Sind auch in der Nachbarschaft keine Eisenmassen vorhanden, und bewegt sich die Doppelschicht lediglich als starrer Körper, so ist ferner W_{m1} unveränderlich, und die virtuelle Arbeit ist folglich gleich der Abnahme von R. Allgemein können wir die Abnahme von W_{m1} betrachten als die Arbeit der Kräfte zwischen den Theilen unserer Doppelschicht, sowie zwischen dieser und den unmagnetischen Eisenmassen, — die Abnahme von R als die Arbeit der Kräfte zwischen der Doppelschicht und dem System der m_2, welche das Feld M_2 erzeugen. Diese letzteren Kräfte wollen wir hier ausschliesslich betrachten. Dann ist die Arbeit

$$A = -\delta R = \Phi_1 \,\delta Q_{21}\,, \tag{66}$$

wo

$$Q_{21} = \int \mu_0 M_{2N} dS_1\,.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, die Arbeit δA bei einer unendlich kleinen Verschiebung, und somit die Kräfte, durch Grössen darzustellen, welche sich auf die Randcurve s_1 beziehen.

Es werde S_1 unendlich wenig verschoben und deformirt. Wir construiren eine Fläche, auf welcher sowohl die ursprüngliche Randcurve s_1 wie die neue Randcurve liegt. Die Zunahme von Q_{21} wird dann gebildet aus den Beiträgen der Flächenelemente, welche die Elemente ds_1 überstreichen, indem sie aus der alten in die neue Lage übergehen. Ein solches Flächenelement ist das Parallelogramm aus ds_1

und dessen Verschiebung v (s. Fig. 28). Der entsprechende Beitrag zu δQ_{21} ist numerisch gleich dem Volumen des Parallelepipeds aus ds_1, v und μM_2; oder gleich dem Parallelogramm aus ds_1 und μM_2 multiplicirt mit der zu ds_1 und μM_2 senkrechten Componente von v. Er ist positiv, wenn S_1 durch die Verschiebung v von ds_1 eine Vergrösserung erhält und zugleich die Kraftlinien μM_2 in positiver Richtung durch das neu gebildete Flächenelement treten; d. h. (s. Figur 28), wenn v einen spitzen Winkel bildet mit der positiven Axe der Drehung $\widehat{ds_1\, M_2}$. Diese Axe soll mit ν bezeichnet werden. Dann ist

$$\delta Q_{21} = \int_{s_1} v_\nu \cdot \mu M_2 \cdot \sin(ds_1 M_2) \cdot ds_1 \,.$$

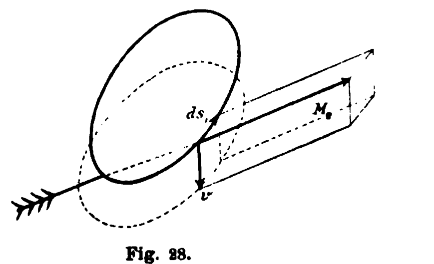


Fig. 28.

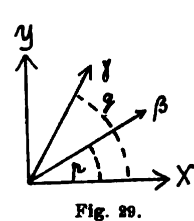


Fig. 29.

Die Arbeit ∂A lässt sich nach dem vorstehenden Ausdruck zerlegen in Elemente, von denen auf ds_1 entfällt:

$$v_\nu \cdot \Phi_1 ds_1 \cdot \mu M_2 \cdot \sin(ds_1 M_2)\,.$$

Dies ist die Arbeit einer Kraft, welche an ds_1 angreift, die Grösse

$$f_1 ds_1 = \Phi_1 ds_1 \cdot \mu M_2 \cdot \sin(ds_1 M_2) \tag{67a}$$

besitzt und die Richtung $\nu \perp \widehat{ds_1\, M_2}$ hat.

Wir wollen ihre rechtwinkligen Componenten ausdrücken. Es sei allgemein ein Vector α normal zu β und γ und zwar habe er die Richtung der Axe einer Drehung von β zu γ, — in Zeichen: $\alpha \perp \widehat{\beta\gamma}$, — und seine Grösse sei

$$\alpha = \beta\gamma \sin(\beta\gamma)\,. \tag{68a}$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \beta_y \gamma_z - \beta_z \gamma_y \\ \alpha_y &= \beta_z \gamma_x - \beta_x \gamma_z \\ \alpha_z &= \beta_x \gamma_y - \beta_y \gamma_x \end{aligned}\right\} \tag{68b}$$

Beweis: aus (68b) folgt

$$\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = 0, \text{ also } \alpha \perp \beta.$$

$$\alpha_x \gamma_x + \alpha_y \gamma_y + \alpha_z \gamma_z = 0, \text{ also } \alpha \perp \gamma.$$

Weiter

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = \beta_x^2 (\gamma_y^2 + \gamma_z^2) + \cdots$$
$$- [2\, \beta_y \beta_z\, \gamma_y \gamma_z + \cdots]$$

$$= \beta^2 \gamma^2 - (\beta_x \gamma_x + \beta_y \gamma_y + \beta_z \gamma_z)^2$$
$$= [\beta \gamma \sin (\beta\gamma)]^2,$$

also
$$\alpha = \pm\, \beta \gamma \sin (\beta\gamma).$$

Legen wir endlich $z \perp \overset{\curvearrowright}{\beta\gamma}$, so ist einerseits in Fig. 29: $q > p$; andererseits aber folgt aus (68b):

$$\alpha_x = \alpha_y = 0$$

$$\alpha_z = \beta\gamma\, (\cos p \cdot \sin q - \sin p \cdot \cos q) = \beta\gamma \sin (q - p),$$

also
$$\alpha_z = +\, \beta \gamma \sin (\beta\gamma).$$

Das heisst: α hat die Richtung der positiven Normalen $\perp \overset{\curvearrowright}{\beta\gamma}$.

α ist numerisch gleich der Fläche des aus den Vectoren β und γ gebildeten Parallelogramms, und ist normal zu dessen Ebene. Die Componente α_n nach einer beliebigen Richtung n ist also numerisch gleich der Projection des Parallelogramms auf die zu n normale Ebene; d. h. wenn β_S und γ_S die in diese Ebene fallenden Componenten von β und γ bezeichnen:

$$\alpha_n = \beta_S \gamma_S \sin (\beta_S \gamma_S). \tag{68c}$$

Da in (68a) $\alpha \perp \overset{\frown}{\beta\gamma}$ sein soll, so ist das Vorzeichen in (68c) richtig, wenn $n \perp \overset{\frown}{\beta_S \gamma_S}$ ist.

Nach (67a) und (68a, b) sind die Componenten von $f_1 ds_1$:

$$\left.\begin{aligned} f_{1x} ds_1 &= \Phi_1 \mu \, (M_{2z}\, dy_1 - M_{2y}\, dz_1) \\ f_{1y} ds_1 &= \Phi_1 \mu \, (M_{2x}\, dz_1 - M_{2z}\, dx_1) \\ f_{1z} ds_1 &= \Phi_1 \mu \, (M_{2y}\, dx_1 - M_{2x}\, dy_1) \end{aligned}\right\} \qquad (67\text{b})$$

wo x_1, y_1, z_1 laufende Coordinaten auf s_1 bezeichnen, also dx_1 bedeutet: $\frac{\partial x_1}{\partial s_1} ds_1$.

Alle bisherigen Sätze über Doppelschichten sind unabhängig von jeder Voraussetzung über die magnetische Beschaffenheit, d. h. die Werthe μ der umgebenden Körper. Im folgenden setzen wir voraus, es habe im ganzen Raum die Permeabilität einen constanten Werth.

Rühre dann zunächst das Feld M_2 her von einem Einheitspol im Punkte $p_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Dann hat, wenn $p_1\,(x_1, y_1, z_1)$ einen Punkt auf s_1 bezeichnet und $r = \overrightarrow{p_2 p_1}$ gesetzt wird, M_2 die Richtung von r und die Grösse:

$$M_2 = \frac{1}{4\pi\mu \cdot r^2}.$$

Also:

$$\mu M_{2x} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} \text{ etc.}$$

Daraus folgt nach (67):

$$f_1\, ds_1 = \frac{\Phi_1}{4\pi r^2} \sin(r\, ds_1)\, ds_1 \quad \perp \overset{\frown}{ds_1\, r}, \qquad (69\text{a})$$

und

$$\left.\begin{aligned} f_{1x} ds_1 &= \frac{\Phi_1}{4\pi r^3} \left[(z_1 - z_2)\, dy_1 - (y_1 - y_2)\, dz_1 \right] \\ &= \frac{\Phi_1}{4\pi} \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} dy_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} dz_1 \right] \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (69\text{b})$$

Aus diesen Elementarkräften, deren Angriffspunkte die ds_1 und deren Richtungen normal zu den Verbindungslinien $\overrightarrow{p_2\, ds_1}$ sind, erhält man — und dies ist ihre ausschliessliche Bedeutung — die Arbeit bei einer beliebigen relativen Verschiebung der Doppelschicht gegen den Punkt p_2. Die Kräfte $f_1\, ds_1$ sind durch eine rein rechnerische Umformung hervorgegangen aus den Coulomb'schen Elementarkräften zwischen dem Einheitspol und den Flächenelementen dS der Doppelschicht. Diese Elementarkräfte haben die Richtung der Verbindungslinie $\overrightarrow{p_2\, dS}$. Die Kräfte $f_1\, ds_1$ können daher in ihrer Gesammtheit keine Arbeit ergeben, wenn die Doppelschicht sich als starrer Körper um p_2 dreht; dass dies thatsächlich zutrifft, zeigen wir, indem wir ihr Drehungsmoment um eine beliebige durch p_2 gehende Axe — etwa die Parallele zu z — berechnen. Es ist:

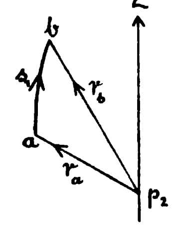


Fig. 30.

$$\Theta_z = \int_{s_1} \left[(x_1 - x_2) f_{1y} - (y_1 - y_2) f_{1x} \right] ds_1$$

$$= \frac{\Phi_1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{1}{r^3} \Big[(x_1 - x_2) \left\{ (x_1 - x_2)\, dz_1 - (z_1 - z_2)\, dx_1 \right\}$$

$$- (y_1 - y_2) \left\{ (z_1 - z_2)\, dy_1 - (y_1 - y_2)\, dz_1 \right\} \Big]$$

$$= \frac{\Phi_1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{1}{r^3} \left[r^2\, dz_1 - (z_1 - z_2)\, r \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1 \right] = \frac{\Phi_1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{r} \right) ds_1 .$$

Bildet s_1 eine beliebige Curve vom Punkte a zum Punkte b, so ist (s. Fig. 30)

$$\Theta_z = \frac{\Phi_1}{4\pi} \left[\cos(r_b\, z) - \cos(r_a\, z) \right]. \tag{70}$$

Unsere Curve s_1 aber ist geschlossen und es wird

$$\Theta_z = 0 .$$

Das heisst: wenn die Doppelschicht sich als starrer Körper gegen p_2 bewegt, so ist die Arbeit der Kräfte $f_1\, ds_1$ diejenige einer durch p_2 gehenden Resultante. Dieser Resultante an Grösse gleich, an Richtung entgegengesetzt ist die Kraft, mit welcher die Doppelschicht auf den Einheitspol wirkt, d. h. die Feldintensität M_1 im Punkte p_2. Es wird:

$$M_{1x} = -\int\limits_{s_1} f_{1x}\, ds_1$$

also

$$\left.\begin{aligned} M_{1x} &= \frac{\Phi_1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y_2}\int\limits_{s_1}\frac{dz_1}{r} - \frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{s_1}\frac{dy_1}{r}\right] \\ M_{1y} &= \frac{\Phi_1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{s_1}\frac{dx_1}{r} - \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{s_1}\frac{dz_1}{r}\right] \\ M_{1z} &= \frac{\Phi_1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{s_1}\frac{dy_1}{r} - \frac{\partial}{\partial y_2}\int\limits_{s_1}\frac{dx_1}{r}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Für das Potential ψ_1 im Punkte p_2 erhält man den einfachsten Ausdruck aus (63):

$$\psi_1 = -\Phi_1\, q\,.$$

Unter unserer Voraussetzung: $\mu = \text{const.}$ strahlen die Kraftlinien des Einheitspols von p_2 mit gleichförmiger Dichte nach allen Richtungen aus. Bezeichnet man also durch α den körperlichen Winkel, unter welchem die positive Seite der Doppelschicht von p_2 aus erscheint, bezw. durch $-\alpha$ den Winkel, unter welchem die negative Seite erscheint; ganz allgemein: durch α die algebraische Summe der Winkel, unter welchen die dS erscheinen, wobei die Beiträge von $\bar{S}$ negativ zu rechnen sind, so ist

$$-q = \frac{\alpha}{4\pi}, \text{ also}$$

$$\psi_1 = \Phi_1 \frac{\alpha}{4\pi}. \qquad (72)$$

Unter der gleichen Voraussetzung: $\mu = \text{const.}$ wollen wir die wechselseitige Energie zweier Doppelschichten Φ_1, S_1 und

Φ_2, S_2 berechnen. Allgemein ist nach (55) (56) (59) (60), wenn x_2, y_2, z_2 laufende Coordinaten auf s_2 bezeichnen,

$$R = -\Phi_2 \int \mu M_{1N} dS_2 = -\Phi_2 \int_{s_2} A_s ds$$

$$= -\Phi_2 \int_{s_2} (A_x dx_2 + A_y dy_2 + A_z dz_2),$$

falls A so bestimmt ist, dass

$$\mu M_{1x} = \frac{\partial A_z}{\partial y_2} - \frac{\partial A_y}{\partial z_2} \text{ etc.}$$

Nun haben in unserem Fall M_{1x} etc. die in (71) angegebenen Werthe; also können wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu \Phi_1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{dx_1}{r} \\ A_y &= \frac{\mu \Phi_1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{dy_1}{r} \\ A_z &= \frac{\mu \Phi_1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{dz_1}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

Demnach wird

$$R = -\Phi_1 \Phi_2 q_{12}, \text{ wo}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{12} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1} \int_{s_2} \frac{dx_1\, dx_2 + dy_1\, dy_2 + dz_1\, dz_2}{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1} \int_{s_2} \frac{\cos(ds_1\, ds_2)}{r}\, ds_1\, ds_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Kapitel IV.

Das magnetische Feld stationärer elektrischer Ströme.

§ 1. Linearer Strom und magnetische Doppelschicht.

Im dritten Kapitel haben wir magnetische Felder behandelt, welche ohne Energieumsatz unverändert bestehen: statische magnetische Felder. Ihre Existenz ist an das Vorhandensein bestimmter Körper geknüpft, die als Magnete bezeichnet werden. Unsere jetzige Betrachtung gilt magnetischen Feldern, welche zwar auch der Zeit nach unveränderlich in ruhenden Körpern bestehen, welche aber mit Energieumsetzung verbunden sind. Es handelt sich um Felder, welche man als eine Folge stationärer elektrischer Ströme zu bezeichnen pflegt. Thatsache ist lediglich, dass diejenigen Erscheinungen, welche wir im zweiten Kapitel als stationäre elektrische Strömung besprachen, und diejenigen, welche wir jetzt zu besprechen haben, stets zusammen auftreten. Die Bezeichnung der ersten Gruppe als der Ursachen, der zweiten als der Wirkungen drückt lediglich aus, dass zuerst die elektrische, später die magnetische Seite der Erscheinungen bekannt geworden ist. —

Der Vorgang, den wir als elektrische Strömung bezeichneten, fand seine einfachste Darstellung mit Hülfe eines Vectors $\varLambda$, der „Strömung". Es hat uns an früherer Stelle der Zusammenhang dieses Vectors mit den Bestimmungsstücken des elektrischen Feldes beschäftigt; unsere jetzige

Aufgabe ist, seinen Zusammenhang mit den magnetischen Grössen darzulegen.

Die elektrische Strömung kann, wie wir sahen, nur dann stationär sein, wenn alle Strömungslinien in sich zurücklaufende Curven bilden. Wir denken uns diese Curven überall in den Leitern gezogen, und die Leiter so in Bündel von ringartigen Gebilden zerlegt. Die Theilung soll soweit geführt werden, dass an jeder Stelle jedes Fadens eine Strömungsrichtung und ein bestimmter zu ihr normaler Querschnitt (q) geometrisch wohl definirt ist. (Vgl. Kap. II, S. 137.) Dann ist

$$Aq = i$$

eine längs jedes Fadens constante Grösse, welche wir den „Strom" in dem Faden nannten. — Zunächst denken wir nur einen solchen „linearen Strom" vorhanden. Wenn es sich um eine Aufgabe handelt, in der alle sonst vorkommenden Längen sehr gross sind gegenüber den Dimensionen von q, so wird man annehmen können, dass es auf die Vertheilung der Strömung innerhalb des Querschnitts nicht ankommt. Die Strömung ist dann ausreichend dargestellt durch die Form der Stromschleife und den Werth von i. Die hierdurch entstehende Vereinfachung hat bewirkt, dass zuerst das magnetische Feld linearer Ströme quantitativ erforscht ist. Wir gehen ebenfalls von diesen aus, bemerken aber folgendes: A ist stets eine endliche Grösse; soll also auch i endlich sein, — und das werden wir annehmen, — so gilt das gleiche für q; die Querschnittsdimensionen können nicht verschwinden gegen jede endliche Länge, sondern nur gegen bestimmte, in unsere Betrachtung etwa eingehende Längen.

Der stationäre lineare Strom i habe die geschlossene Leitcurve s. Dann gelten folgende Erfahrungssätze (Ampère):

1) Zu dem Strom i gehört ein magnetisches Feld M, welches mit dem Felde einer Doppelschicht von der Stärke

$$\Phi = \frac{i}{V} \qquad (1)$$

und der positiven Randcurve s identisch ist in jedem Punkte

ausserhalb der Doppelschicht. Hier bedeutet V eine universelle, nur von den Masseinheiten für Φ und i abhängige, positive Constante. — Der Strom i und die Doppelschicht Φ, welche in dieser Weise mit einander verknüpft sind, sollen „äquivalent“ heissen. — Die Felder linearer Ströme superponiren sich einander oder den Feldern magnetischer Systeme ebenso, wie dies für die äquivalenten Doppelschichten gelten würde.

2) Der Stromträger erleidet in jedem magnetischen Felde dieselben mechanischen Kräfte, wie die äquivalente Doppelschicht.

Wir wollen den Inhalt dieser beiden Sätze näher ausführen.

Zu 1): Die Aequivalenz von Strom und Doppelschicht gilt für jeden Punkt ausserhalb der Doppelschicht. Für diese ist aber nur die Randcurve vorgeschrieben, welche mit der Stromcurve zusammenfallen soll. Handelt es sich also um einen beliebigen Punkt ausserhalb der Stromcurve, so kann die Doppelschicht stets so gelegt werden, dass die Gleichheit der beiden Feldstärken besteht. Handelt es sich um einen Punkt in der Stromcurve, so versagt freilich unser Satz; dann wird aber auch der Begriff des linearen Stromes unbrauchbar. Ueber das Feld im durchströmten Leiter selbst erhalten wir von unserm gegenwärtigen Standpunkt aus keinen Aufschluss; wir schliessen es einstweilen von unseren Betrachtungen aus. — Dass das Feld zweier Doppelschichten von gleicher Stärke und gleicher Randcurve ausserhalb der beiden Schichten das gleiche ist, haben wir in Kapitel III (S. 228) gezeigt. Unser Satz weist also thatsächlich einem gegebenen Strom ein völlig bestimmtes Feld zu. Halten wir etwa zwei Lagen der Doppelschicht zu unserer Verfügung, so müssen wir, um das Stromfeld innerhalb der ersten zu erhalten, die zweite als die äquivalente betrachten, und umgekehrt. Daraus folgt: geben wir der Doppelschicht eine feste Lage, und nehmen wir an, ihr Feld sei bekannt; dann ist unmittelbar auch das Stromfeld gegeben ausserhalb der unendlich dünnen Scheibe der Doppelschicht.

In dieser Scheibe aber ist es bestimmt als die stetige Fortsetzung des äussern Feldes.

In geometrischer Darstellung enthält das vorstehende den Satz: jede magnetische Kraftlinie eines linearen elektrischen Stromes ist eine geschlossene Curve, welche die Stromcurve positiv umkreist. —

Die magnetische Induction B und die Polarisation μM unterscheiden sich nur dort, wo eine Magnetisirung I existirt (vgl. S. 221 f.). Die Inductionslinien der Doppelschicht fallen ausserhalb der Schicht mit den Kraftlinien zusammen, und schliessen die letzteren innerhalb der Schicht zum Ringe. Die Inductionslinien des Stromes sind allgemein identisch mit seinen Kraftlinien. Der einfachste Ausdruck des Aequivalenzsatzes ist daher: Strom und Doppelschicht haben dieselbe Induction überall, (abgesehen von der Stromcurve selbst, wo von einem bestimmten Werth dieses Vectors nicht gesprochen werden kann.) —

Das Feld eines Stromes i hängt ebenso, wie das der äquivalenten Doppelschicht, von der Vertheilung der Constanten μ im umgebenden Raum ab, und lässt sich allgemein nicht in geschlossener Form darstellen; es lässt sich aber eine allgemeine Eigenschaft desselben angeben:

Es werde das Integral $\int M_l\,dl$ gebildet für eine geschlossene Curve l, welche die Stromcurve s nicht umschlingt. Dann lässt sich die äquivalente Doppelschicht so legen, dass sie von l nicht geschnitten wird; die Felder M von Strom und Doppelschicht sind also für jeden Punkt von l identisch und es folgt

$$\oint M_l\,dl = 0.$$

Nun möge s von l einmal in positivem Sinn umkreist werden. Eine beliebige äquivalente Doppelschicht in S wird dann von l in der Richtung von $\overset{-}{S}$ zu $\overset{+}{S}$ durchsetzt. Wir zerlegen den Integrationsweg in die ausserhalb der Doppelschicht von $\overset{+}{S}$ zu $\overset{-}{S}$ verlaufende Curve, und das Element in der

Doppelschicht, welches diese zum vollen Umlauf ergänzt. Die erstere liefert zum Integral den Beitrag

$$\Phi = \frac{i}{V},$$

das fehlende Curvenelement liefert, da unser M endlich ist, einen unendlich kleinen Beitrag. (Handelte es sich um das Feld der Doppelschicht, so wäre dieser Beitrag: $-\Phi$.) Also ist für die vorgelegte Curve

$$\int\limits_{O} M_l \, dl = \frac{i}{V}. \tag{2}$$

Es folgt: für eine Curve l, welche k-mal in positiver Richtung s umkreist, ist das Integral

$$\int\limits_{O} M_l \, dl = k \frac{i}{V}. \tag{2a}$$

Versteht man unter k eine negative Zahl, wenn die Umkreisung in negativer Richtung stattfindet, — und den Werth 0, falls die Curven l und s nicht verschlungen sind, so giebt diese Gleichung das Linienintegral für jede geschlossene Curve.

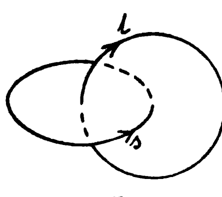


Fig. 31.

Wenn l einen positiven Umlauf um s bildet, so bildet auch s einen positiven Umlauf um l (s. Fig. 31). Da ferner die Felder mehrerer Ströme sich superponiren, so addiren sich auch die Linienintegrale der M. Also ist im allgemeinsten Fall für eine beliebige geschlossene Curve l:

$$\int\limits_{O} M_l \, dl = \frac{1}{V} \Sigma i, \tag{3}$$

wo Σi die algebraische Summe aller Ströme bezeichnet, welche in positiver Richtung durch eine Fläche L treten, die l zur Randcurve hat. Dieser Ausdruck schliesst auch den Fall ein, wo l mit der Curve s eines Stromes mehrfach verschlungen

ist; dann geht (3) in (2a) über. Die Gleichung (3) ist unabhängig von jeder Voraussetzung über die magnetische Beschaffenheit — die Werthe μ — der umgebenden Körper.

Dieselben Eigenschaften des Feldes M lassen sich auch in folgender Form aussprechen: das Feld eines Stromes i in der Curve s leitet sich für jeden Punkt, der nicht in s selbst liegt, aus einem Potential ψ' ab gemäss der Gleichung

$$M_l = -\frac{\partial \psi'}{\partial l}; \tag{4}$$

ψ' ist eine stetige, unendlich vielwerthige Function, welche mit dem Potential ψ der äquivalenten Doppelschicht zusammenhängt durch die Gleichung:

$$\psi' = \psi - k\frac{i}{V}, \quad k \text{ eine ganze Zahl.} \tag{5}$$

Handelt es sich um das Feld von Strömen i_n in den Curven s_n, so gilt (4) überall ausserhalb der s_n, und es ist im Punkte p

$$\psi' = \psi - \Sigma\frac{k_n i_n}{V}, \tag{5a}$$

wo die ganzen Zahlen k_n so zu wählen sind, dass ψ' sich bei allen Bewegungen des Punktes p stetig ändert.

Der Raum, für welchen (4) gilt, ist, wenn n Ströme vorhanden sind, $(n+1)$fach zusammenhängend. Man mache ihn einfach zusammenhängend durch Querschnitte S_n, welche die s_n zu Randcurven haben. Der einfach zusammenhängende Raum, welcher die $\overset{+}{S}_n$ und $\overset{-}{S}_n$ zu Grenzflächen hat, heisse τ. In τ ist dann ψ' einwerthig und ψ stetig, und für jeden Weg in τ ist:

$$\int_p^{p_1} M_l\,dl = \psi'(p) - \psi'(p_1) = \psi(p) - \psi(p_1).$$

Oder

$$\left.\begin{aligned} &\text{in } \tau \text{ ist: } M_l = -\frac{\partial\psi}{\partial l},\ \psi \text{ einwerthig;} \\ &\text{aber an } S_n\text{: } \overset{+}{\psi} - \overline{\psi} = \frac{i_n}{V}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Zu 2): Wenn wir den zweiten Theil des Aequivalenzsatzes anwenden wollen, so müssen wir das Feld zerlegen in den Antheil, welcher von dem betrachteten Strom i selbst herrührt, und das „fremde Feld", welches cet. par. für $i = 0$ vorhanden wäre. Der erstere Antheil ist in den Punkten der Stromcurve s bisher nicht definirt. Es kann also nur von den mechanischen Kräften die Rede sein, welche dem zweiten Antheil entsprechen. Es werde demnach der Träger eines Stromes i_1 verschoben in einem gegebenen Felde M_2, welches selbst durch die Verschiebung keine Veränderung erfährt; dann wird eine Arbeit geleistet [vgl. Kap. III, Gleichung (66)]

$$A = \frac{i_1}{V}\,\delta Q_{21}, \tag{7}$$

wo

$$Q_{21} = \int \mu M_{2N}\,dS_1 \tag{8}$$

die Anzahl von Kraftlinien bezeichnet, welche das Feld M_2 durch die vom Strom begrenzte Fläche S_1 hindurchsendet.

Vorausgesetzt ist bei diesem Ausdruck von Q_{21}, dass die Fläche S_1 nicht durch Magnete hindurchgeht. Eine solche Fläche kann nicht construirt werden, wenn der Magnet ringförmig und mit der Stromcurve nach Art zweier Kettenglieder verschlungen ist. Wir bedürfen also im allgemeinen eines Ausdrucks, der von der genannten Voraussetzung frei ist. Soll S_1 eine beliebige Fläche mit der Randcurve s_1 sein, so muss Q_{21} gleich der Induction durch s_1 gesetzt werden:

$$Q_{21} = \int B_{2N}\,dS_1 = \int (\mu M_{2N} + I_{2N})\,dS_1\,. \tag{8a}$$

Sofern nur die Randcurvenelemente ds_1 in Betracht kommen (wie in der nächstfolgenden Anwendung), darf aber stets B_2 durch μM_2 ersetzt werden, da der Stromträger etwaige fremde Magnete nicht durchsetzen kann.

Vorausgesetzt ist ferner (vgl. Kap. III, S. 229), dass die Permeabilität des Stromleiters gleich derjenigen der Umgebung ist, in welcher er sich bewegt; d. h. praktisch, dass er nicht aus einer ferromagnetischen Substanz besteht.

Im Fall einer unendlich kleinen Verschiebung lässt sich die Arbeit A darstellen als diejenige gewisser Kräfte, welche an den einzelnen Elementen der Stromcurve s_1 angreifen; die an ds_1 angreifende Kraft hat die Grösse [vgl. Kap. III, (67a, b)]

$$f_1 ds_1 = \frac{i_1}{V} \mu \mathfrak{M}_2 \sin(ds_1 \mathfrak{M}_2) ds_1 , \tag{9a}$$

sie steht senkrecht sowohl auf ds_1 wie auf $\mathfrak{M}_2$ und hat die Richtung der positiven Axe der Drehung von ds_1 nach $\mathfrak{M}_2$. Die rechtwinkligen Componenten dieser Kraft sind:

$$f_{1x} ds_1 = \frac{i_1}{V} \mu (\mathfrak{M}_{2z} dy_1 - \mathfrak{M}_{2y} dz_1) \text{ etc.} \tag{9b}$$

Da es mechanisch möglich ist, die einzelnen Elemente des Stromträgers für sich beweglich zu machen, so kommt diesen Elementarkräften in dem jetzt vorliegenden Fall auch physikalische Bedeutung zu. Man pflegt sie als „elektrodynamische Kräfte" zu bezeichnen.

Qualitativ besagen unsere Gleichungen: ein Stromträgerelement erfährt Bewegungsantriebe weder in seiner eigenen Richtung, noch in der Richtung des Feldes; es wird vielmehr quer durch die Kraftlinien des Feldes getrieben, und zwar in dem Sinn, dass die Induction durch die Stromcurve zunimmt. Wenn in einer bestimmten Lage die Induction ein Maximum ist gegenüber allen virtuellen Verschiebungen, so befindet sich der Leiter in stabilem Gleichgewicht.

Es möge speciell das Feld $\mathfrak{M}_2$ herrühren von einem Strome i_2 in der Curve s_2, dann ist $Q_{21} = \frac{i_2}{V} q_{12}$. Zugleich ist [vgl. Kap. III, Gleichung (65)] $Q_{12} = \frac{i_1}{V} q_{12}$ die Anzahl von Kraftlinien, welche der Strom i_1 in positiver Richtung durch s_2 sendet. Also wird die Arbeit der Kräfte, welche der Träger des einen Stromes im Felde des andern erfährt:

$$A = \frac{i_1}{V} \delta Q_{21} = \frac{i_2}{V} \delta Q_{12} = {}^1/_2\left(\frac{i_1}{V} \delta Q_{21} + \frac{i_2}{V} \delta Q_{12}\right) = \frac{i_1 i_2}{V^2} \delta q_{12}. \quad (10)$$

Man nennt

$$p_{12} = \frac{q_{12}}{V^2} \quad (11a)$$

den „wechselseitigen Inductionscoefficienten" der beiden Curven s_1 und s_2. Mit Benutzung dieses Zeichens wird

$$A = i_1 i_2 \cdot \delta p_{12}. \quad (11b)$$

Vp_{12} bedeutet die Anzahl von Kraftlinien, welche ein Strom $i = 1$ in einer der beiden Curven in positiver Richtung durch die andere Curve sendet.

Es möge jetzt vorausgesetzt werden, dass μ constant ist im ganzen Felde. Dann wird zunächst das Potential eines Stromes i_1 in der Curve s_1, berechnet für den Punkt p [vgl. (5) und Kap. III, (72)]:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1'(p) &= \frac{i_1}{V}\frac{\alpha'}{4\pi}, \\ \text{wo} \qquad \alpha' &= \alpha - k\,4\pi. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

α' ist der körperliche Winkel, unter welchem die Curve s_1 vom Punkte p aus erscheint. α' ändert sich stetig, wenn p sich in beliebiger Weise bewegt (ohne s_1 selbst zu treffen), erhält aber für jeden Punkt p eine unendliche Zahl von Werthen, welche sich um ganze Vielfache von 4π unterscheiden.

Es ist dann ferner das Feld M_1 des Stromes i_1 im Punkte $p_2(x_2, y_2, z_2)$ gegeben durch [vgl. Kap. III (71)]:

$$\left.\begin{aligned} M_{1x} &= \frac{i_1}{4\pi V}\left[\frac{\partial}{\partial y_2}\int\limits_{s_1}\frac{dz_1}{r} - \frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{s_1}\frac{dy_1}{r}\right] \\ &= \frac{i_1}{4\pi V}\int\limits_{s_1}\frac{1}{r^3}\left[(y_1 - y_2)\,dz_1 - (z_1 - z_2)\,dy_1\right] \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo $dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s_1} ds_1$ etc. und $r = \overrightarrow{p_2\, ds_1}$.

Dieses Feld ist (vgl. die Ableitung in Kap. III, S. 232 ff.) gleich der Resultante aller Vectoren von der Grösse

$$\left.\begin{aligned} dM_1 &= \frac{i_1}{4\pi V}\frac{\sin(r\,ds_1)}{r^2}\,ds_1 \\ \text{und der Richtung} \quad &\perp \widehat{r\,ds_1}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

welche den einzelnen Elementen ds_1 von s_1 entsprechen; d. h. man erhält das Feld M_1 richtig, wenn man annimmt, dass von jedem Stromcurvenelement ds_1 ein Beitrag dM_1 herrührt, welcher normal sowohl zu r wie zu ds_1 gerichtet ist, und zwar in der Axe der Rotation von r zu ds_1 liegt. Die Gleichung (14) spricht das sogenannte Biot-Savart'sche Gesetz aus. Es ist aber zu beachten, dass den Elementarbeiträgen dM_1 keine physikalische Bedeutung zukommt: stationäre Ströme können nur in geschlossenen Curven existiren; es hat also keinen Sinn, von dem Feld eines Stromes zu sprechen, welcher nur in dem Curvenelement ds_1 vorhanden ist.

Endlich erhält [vgl. Kap. III, (74)] für den Fall $\mu =$ const. der wechselseitige Inductionscoefficient zweier Stromcurven den Werth (F. Neumann):

$$p_{12} = \frac{\mu}{4\pi V^2}\int\limits_{s_1}\int\limits_{s_2}\frac{\cos(ds_1\,ds_2)}{r}\,ds_1\,ds_2\,. \qquad (15)$$

§ 2. Strömung im Raum.

Zu der mathematischen Abstraction linearer Ströme haben wir gegriffen, um — in Uebereinstimmung mit der historischen Entwicklung — unsere Betrachtungen über das magnetische Feld von Strömen an die schon bekannten Sätze über die Felder gewisser permanenter Magnete anschliessen zu können.

Wir gehen nun über zur Strömung in beliebig geformten Leitern; erst dadurch erhalten wir die einfachen Grundgesetze der Erscheinungen.

Zu dem Begriff des linearen Stromes gelangten wir, indem wir den durchströmten Leiter in Stromfäden auflösten, dann

nur einen solchen Faden vorhanden dachten, und seine nothwendig endlichen Querschnittsdimensionen verschwindend klein voraussetzten gegenüber den sonst von uns betrachteten Längen. Wir vollziehen jetzt den Uebergang von der linearen zur räumlichen Strömung, indem wir den einzelnen Stromfaden unendlich dünn voraussetzen. Aus einer unendlichen Zahl solcher unendlich dünnen geschlossenen Stromschleifen muss sich der ganze Leiter in jedem Fall zusammensetzen. Es war [Gleichung (3)] das Linienintegral von M über eine beliebige geschlossene Curve l, welche die Fläche L begrenzt, gleich der durch V dividirten Summe aller positiv durch L hindurchtretenden Ströme. Diese Summe drückt sich nunmehr aus durch das Flächenintegral der Strömung über die Fläche L. In Zeichen:

$$\int_{\circ} M_l dl = \frac{1}{V}\int A_N dL, \tag{H}$$

wo N die bezüglich l positive Normale von dL bezeichnet. Die Richtungsregel wird durch die Figur 32 veranschaulicht.

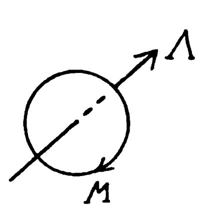


Fig. 32.

Die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung (3) hatte einen bestimmten angebbaren Werth nur, sofern der Integrationsweg mit keinem der linearen Leiter einen Punkt gemein hatte. Dem entsprach, dass wir die Grössen M nur ausserhalb der Leiter angeben konnten. Die rechte Seite der neuen Gleichung (H) hat unter allen Umständen einen bestimmten endlichen Werth. Wir können und wollen also voraussetzen, dass M überall endlich ist, und dass die Gleichung (H) überall, auch innerhalb des durchströmten Leiters gilt. —

Die Fläche L können wir unendlich klein wählen; die Gleichung (H) ist also ihrer Bedeutung nach eine Differentialgleichung. Dieselbe lautet in allgemeinster Form [s. Kap. III, (60) und (61)]

$$P(M) = \frac{A}{V}. \tag{H'}$$

Sie gilt nach dem soeben gesagten im ganzen Raum.

Die weitere Ausführung kann sich in soviel verschiedenen Arten gestalten, wie verschiedene Coordinatensysteme möglich sind; die Wahl wird sich nach der Eigenart der jeweils vorliegenden Aufgabe richten. In rechtwinkligen Punkt-Coordinaten x, y, z ergiebt sich [s. Kap. III, (59)]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} &= \frac{A_x}{V} \\ \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} &= \frac{A_y}{V} \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} &= \frac{A_z}{V} \end{aligned}\right\} . \qquad (\mathrm{H}'')$$

Durch diese Gleichungen ist zugleich ausgesprochen, dass die Differentialquotienten auf der linken Seite überall endliche Werthe darstellen. Nun sei etwa an einer Stelle des Raumes z Normale einer Fläche S, an welcher sich das Feld sprungweise ändert; dann müssen gleichwohl auch dort $\frac{\partial M_y}{\partial z}$ und $\frac{\partial M_x}{\partial z}$ endliche Grössen sein. Das heisst: M_y und M_x müssen sich stetig ändern beim Durchgang durch die Fläche. Also: an irgend einer Fläche S kann sich höchstens die normale, aber niemals die tangentiale Componente von M sprungweise ändern.

Mittels der Gleichungen (H″) oder irgend eines ihnen äquivalenten Gleichungssystems erscheint die Strömung dargestellt durch das magnetische Feld.

Ist umgekehrt die Strömung das gegebene, so genügt diese nothwendig der Gleichung $\Gamma(A) = 0$, und es existirt also stets ein Feld M, welches (H″) befriedigt; aber die Gleichungen (H″) sind nicht ausreichend zur Bestimmung des Feldes (vgl. Kap. III, S. 226).

Wir kennen nun noch eine weitere Eigenschaft des Feldes: alle Kraftlinien eines linearen Stromes waren in sich zurücklaufende Curven; in Zeichen: es war für jede geschlossene Fläche S

$$\int \mu M_N dS = 0. \qquad (16)$$

Die Gleichung galt in dem ganzen Gebiet, in welchem M an-

gebbare Werthe hatte, d. h. sie galt, sofern die Fläche S die Stromcurve nicht schnitt. Indem wir die Theilfelder, welche den einzelnen Stromfäden entsprechen, superponiren, erkennen wir, dass dieselbe Gleichung auch für das Feld einer beliebigen Strömung bestehen muss, und zwar zunächst ausserhalb der durchströmten Leiter. Wir haben aber jetzt vorausgesetzt, dass das Feld M überall, auch im Leiter selbst, bestimmte endliche Werthe hat. Wir dürfen und wollen daher annehmen, dass auch die Gleichung (16) ohne jede Beschränkung gültig ist. Auch diese Gleichung ist ihrem Wesen nach eine Differentialgleichung; sie erscheint in der Form einer solchen, sobald wir unter S die Oberfläche eines Volumelements $d\tau$ verstehen. Die linke Seite von (16) wird dann proportional mit $d\tau$ (vgl. S. 35); bezeichnen wir den Factor von $d\tau$, d. h. die Anzahl von Kraftlinien, welche von der Volumeinheit ausstrahlen oder die „Divergenz" der Kraftlinien, durch $\Gamma(\mu M)$, so entsteht

$$\Gamma(\mu M) = 0 \tag{16'}$$

als allgemeinste Form der fraglichen Differentialgleichung. Specielle Formen entstehen, sobald wir ein bestimmtes Volumelement, d. h. ein bestimmtes Coordinatensystem zu Grunde legen. In rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x, y, z lautet sie:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu M_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu M_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu M_z) = 0. \tag{16''}$$

Durch (16) ist zugleich ausgesprochen, dass insbesondere auch für jedes Flächenelement die Function $\Gamma_S(\mu M) = 0$ sein soll, d. h. dass die Polarisation μM an keiner Fläche eine normale Unstetigkeit besitzt.

Zu (H) und (16) kommt noch die Voraussetzung, dass in unendlicher Entfernung r das Product Mr^2 nicht unendlich ist. Diese Daten nun genügen, um das Feld M eindeutig zu bestimmen, wenn die Werthe A überall gegeben sind. Dieser Satz ist ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes, den wir sogleich beweisen werden.

Den vorstehenden Gleichungen stellen wir diejenigen

gegenüber, welche für das Feld permanenter Magnete gelten. Sie lauteten:

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\int\limits_{0} M_l dl = 0\,, \\ \text{oder}\quad P(M) = 0 \text{ überall,}\end{array}\right\} \qquad \text{(G)}$$

und
$$\Gamma(\mu M) = -\,\Gamma(I) = \begin{cases}\varrho \\ \sigma\end{cases}. \qquad \text{(E)}$$

Dazu kam dieselbe Bedingung bezüglich der unendlich fernen Punkte, wie oben.

Das allgemeinste stationäre magnetische Feld, — im Rahmen unserer bisherigen Betrachtungen das allgemeinste magnetische Feld überhaupt, — entsteht durch Superposition der Felder beliebiger stationärer Ströme und beliebiger Magnete. Die Grundgleichungen des stationären magnetischen Feldes sind demnach in allgemeinster Form:

$$P(M) = \frac{\Lambda}{V} \qquad \text{(H)}$$

$$\Gamma(\mu M) = -\,\Gamma(I) \qquad \text{(E)}$$

$$M r^2 \text{ nicht unendlich für } r = \infty.$$

Durch die Werthe der Λ und der $\Gamma(I)$ im ganzen Raum ist dieses Feld eindeutig bestimmt. Zum Beweise setzen wir zwei Felder als Lösungen voraus, und bilden das Differenzfeld. Für dieses gilt dann:

$$\left.\begin{array}{r} P(M) = 0 \\ \Gamma(\mu M) = 0 \end{array}\right\} \text{überall,}$$

$$M r^2 \text{ endlich für } r = \infty;$$

und daraus folgt in bekannter Weise: $M \equiv 0$. —

Es lässt sich ferner ein vorgelegtes vollständiges magnetisches Feld stets und nur in einer Weise zerlegen in das Feld einer bestimmten magnetischen Vertheilung (ϱ, σ) und das Feld eines bestimmten Stromsystems (Λ). Zerlegen wir nämlich das gegebene M in M' und M'' so, dass

$$\begin{array}{l|l} P(M') = 0 & P(M'') = P(M) \\ \Gamma(\mu M') = \Gamma(\mu M) & \Gamma(\mu M'') = 0 \end{array}$$

wird, so sind einerseits, wie soeben bewiesen, die Theilfelder M' und M'' durch diese Festsetzungen eindeutig bestimmt; andrerseits sind im Theilfeld M' keine Ströme, wohl aber magnetische Dichten $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} = \Gamma(\mu M)$, — im Theilfeld M'' hingegen keine magnetischen Dichten, wohl aber Strömungen $\varLambda = V \cdot P(M)$ vorhanden.

In anderer Ausdrucksweise heisst dies: jedes System vollständiger magnetischer Kraftlinien kann in zwei Bestandtheile aufgelöst werden, nämlich 1) ein System von Kraftlinien mit Endpunkten; diese Endpunkte sind die Orte magnetischer Dichten; — 2) ein System geschlossener Kraftlinien; diese umzingeln elektrische Stromfäden. —

Das erste dieser Theilfelder ist in Kapitel III vollständig erledigt; wir dürfen also jetzt, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, voraussetzen: es existiren im Felde keine Magnete. Dadurch werden unsere Grundgleichungen wieder:

$$P(M) = \frac{\varLambda}{V} \tag{H'}$$

$$\Gamma(\mu M) = 0. \tag{16'}$$

Es handelt sich um die Bestimmung von M aus diesen Gleichungen. Wir können die Aufgabe in zwei andere zerlegen:

1) welches ist das Feld, wenn im ganzen Raum $\mu = \text{const.}$ ist, und die $\varLambda$ entsprechend der Bedingung: $\Gamma(\varLambda) = 0$, sonst aber willkürlich gegeben sind?

2) wie ändert sich dieses Feld, wenn an Stelle des constanten μ willkürlich im Raum variirende μ eingeführt werden?

Um zu einer Lösung der Aufgabe 1) zu gelangen, gehen wir aus von den Gleichungen (13), welche — ebenfalls unter der Bedingung $\mu = \text{const.}$ — das Feld eines linearen Stromes angeben.

Bezeichnet für einen unendlich dünnen Stromfaden i den Strom, und für eine bestimmte Stelle desselben

$\varLambda$ die Strömung
q den Querschnitt

ds das Längenelement
$d\tau$ das Volumelement,

so ist:

$$i = Aq\,, \quad q\,ds = d\tau\,, \quad dx = \frac{dx}{ds}\,ds = \cos\,(Ax)\,ds\,,$$

also:
$$\left.\begin{aligned} i\,ds &= A\,d\tau \\ i\,dx &= A_x\,d\tau \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$
und

Indem man diese Werthe in (13) einsetzt und über alle Stromfäden summirt, erhält man für den Punkt $p\,(x, y, z)$:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \\ M_y &= \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \\ M_z &= \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Pi_x &= \frac{1}{V}\int \frac{A_x}{4\pi r}\,d\tau \\ \Pi_y &= \frac{1}{V}\int \frac{A_y}{4\pi r}\,d\tau \\ \Pi_z &= \frac{1}{V}\int \frac{A_z}{4\pi r}\,d\tau \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dass durch die Gleichungen (18) und (19) das Feld allgemein richtig angegeben sei, ist zunächst nur eine naheliegende Vermuthung; denn die Ausgangsgleichungen (13) gelten nur a u s s e r h a l b des linearen Leiters. Wir verificiren unsere Lösung, indem wir zeigen, dass unser M die Gleichungen (16″) und (H″) befriedigt und im unendlichen verschwindet, wie $\frac{1}{r^2}$.

Die zuletzt genannte Eigenschaft folgt unmittelbar aus dem Ausdruck von M. — Die Gleichung (16″) lautet für μ = const: $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0$. Diese Gleichung ist nach (18) erfüllt. — Es wird ferner:

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right] - \Delta\Pi_x .$$

Von x, y, z hängt in Π_x .. nur r ab, und es ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \text{ etc.,}$$

wenn p' (x', y', z') einen Punkt in $d\tau$ bedeutet. Also

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi V}\int\left(A_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + A_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + A_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi V}\left[\int \frac{1}{r}\, \Gamma(A)\, d\tau + \int_S \frac{1}{r}\, A_n\, dS\right],$$

wo S die Oberfläche des Stromgebietes bedeutet. Dies gilt für innere sowohl, wie für äussere Punkte p (vgl. Kap. I, S. 98). Nun ist aber für eine stationäre Strömung durchweg

$$\Gamma(A) = 0 \text{ und } A_n = 0,$$

also:

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = 0.$$

Weiter ist [s. Kap. I, (3') und (8a) S. 34]:

$$-\Delta\Pi_x = \frac{A_x}{V},$$

also

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \frac{A_x}{V}.$$

Ebenso folgen die anderen Gleichungen in (H''). — Die Gleichungen (18) und (19) geben also eine Lösung und folglich die Lösung der Aufgabe.

Wir bemerken noch: ist p ein Punkt innerhalb des durchströmten Leiters, so tragen die zu p unendlich benachbarten Elemente zu den Differentialquotienten von Π_x .. und somit zu M_x .. nur unendlich wenig bei (vgl. S. 16). Das gleiche gilt für jeden unendlich kleinen Raumtheil in endlicher

Entfernung von p. Wenn wir also das Stromgebiet in seine unendlich dünnen Stromfäden zerlegen, so liefert zum Werthe des Feldes M in p der durch p selbst gehende Stromfaden nur einen verschwindenden Beitrag.

Definirt man einen Vector Π durch die Gleichungen

$$\Pi_x = \Pi \cos(\Pi x) \text{ etc.},$$

so sind die Componenten von Π aus der Vertheilung der entsprechenden Componenten von A nach demselben Gesetz gebildet, wie das Potential einer gravitirenden oder elektrischen oder magnetischen Vertheilung aus dieser. Man bezeichnet daher Π wohl als das „Vectorpotential" von A. Die Gleichungen (18), nach welchen sich aus diesem Vector Π die Feldintensität ableitet, können kürzer geschrieben werden

$$M = P(\Pi). \qquad (18a)$$

Bezeichnen wir das soeben gefundene Feld nunmehr durch M_0, dasjenige der ursprünglichen Aufgabe (S. 250) aber durch M, so bleibt jetzt noch die Aufgabe 2) zu lösen: das Feld Z zu finden, welches definirt ist durch

$$Z_l = M_l - M_{0l}.$$

Es ist

$$P(M) = P(M_0) = \frac{A}{V},$$

also

$$P(Z) = 0 \quad \text{überall.}$$

Das Zusatzfeld Z also leitet sich aus einem einwerthigen Potential χ ab, gemäss der Gleichung

$$Z_l = -\frac{\partial \chi}{\partial l}.$$

Es ist ferner, wenn μ_0 den ursprünglichen constanten, μ den neuen variablen Werth der Permeabilität bezeichnet,

$$\Gamma(\mu M) = \Gamma(\mu_0 M_0) = 0,$$

und folglich

$$\mu_0 \Gamma(Z) = \Gamma(\mu_0 M) - \Gamma(\mu M) = -\Gamma(\mu - \mu_0)\, M.$$

Es folgt also wie in Kapitel III, § 3: Das Zusatzfeld Z kann als dasjenige einer „inducirten Magnetisirung“

$$\Gamma = (\mu - \mu_0)\, M$$

aufgefasst werden. Diese Auffassung zerlegt das thatsächlich vorhandene magnetische Feld M begrifflich in der gleichen Weise, wie wir es soeben rechnerisch gethan haben; sie schreibt, wenn sich μ_0 auf Luft, μ auf Eisen bezieht, nur das Feld M_0 der Strömung zu, das Feld Z aber dem „magnetisch gewordenen“ Eisen. Wir ziehen es vor, in allen allgemeinen Betrachtungen das Feld M als ein einheitliches zu behandeln, weil wir so zu einfacheren Grundgleichungen gelangen. Damit ist nicht ausgeschlossen, dass für specielle Aufgaben sich die Zerlegung empfiehlt.

Ein besonderer Fall der „inducirten Magnetisirung“, welcher unter den Voraussetzungen des Kapitel III nicht realisirbar war, unter unseren jetzigen Voraussetzungen aber sehr wohl eintreten kann, verdient Erwähnung: es sei die Oberfläche eines Raumes τ ganz von Kraftlinien erfüllt; in diesem Raum werde der Körper $\mu_0 =$ const. durch einen Körper $\mu_1 =$ const. ersetzt. Unter diesen Umständen bleibt die Feldintensität überall ungeändert. Der Beweis hierfür ist geliefert, sobald wir gezeigt haben, dass das Feld $M \equiv M_0$ allen Bedingungen für M genügt. Nun genügt nach Voraussetzung M_0 den Bedingungen:

innerhalb wie ausserhalb τ: $\quad P(M_0) = \frac{A}{V}, \quad \Gamma(M_0) = 0$

an der Oberfläche von τ: $\quad M_{0N_i} = 0, \quad M_{0N_a} = 0.$

Von M aber wird gefordert:

innerhalb wie ausserhalb τ: $\quad P(M) = \frac{A}{V}, \quad \Gamma(M) = 0,$

an der Oberfläche von τ: $\quad \mu_1 M_{N_i} + \mu_0 M_{N_a} = 0.$

Diesen Forderungen genügt der Ansatz: $M \equiv M_0$; q. e. d. —

Dies bedeutet keineswegs, dass durch die Einführung des Eisens sich nichts im Felde verändert hat. Die Feldintensität blieb ungeändert; also hat die Polarisation und damit die

Energie zugenommen, da in τ die μ-Werthe gewachsen sind. Mit anderen Worten: es existirt wohl eine „inducirte Magnetisirung", aber sie verläuft durchweg in geschlossenen Curven, — es existirt keine „inducirte magnetische Vertheilung". —

Allgemein lässt sich wieder aussprechen, dass die in einem homogenen Körper ($\mu = \mu_1 =$ const.) inducirte Magnetisirung solenoidal, d. h. die inducirte Vertheilung eine reine Oberflächen-Vertheilung ist.

Das Problem, das Feld M gegebener Ströme zu finden, ist — abgesehen von dem Fall $\mu =$ const. — nur für wenige specielle Anordnungen streng gelöst. Zu einer genäherten Lösung können häufig die folgenden Bemerkungen führen:

Wir fanden in Kapitel II eine Analogie zwischen gewissen Vertheilungen der stationären elektrischen Strömung einerseits und der elektrostatischen Polarisation andererseits. Diese Analogie betraf Räume, in welchen die elektrischen Kraftlinien keine Endpunkte haben. Die magnetischen Kraftlinien nun besitzen, wenn das Feld, wie wir gegenwärtig voraussetzen, von Strömen herrührt, nirgends Endpunkte; die gleiche Analogie lässt sich daher in weiterem Umfange durchführen. Bezeichnen wir die magnetische Polarisation μM durch $\mathfrak{M}$; dann lassen sich die Grundgleichungen (16′) und (H) unseres Feldes schreiben:

$$\Gamma(\mathfrak{M}) = 0, \tag{a$_1$}$$

und für alle geschlossenen Curven

$$\oint \frac{\mathfrak{M}_l}{\mu}\, dl = \frac{1}{V} \int A_N\, dL = \text{gegebenen Grössen.} \tag{b$_1$}$$

Andererseits war die stationäre Strömung (vgl. S. 145f.) durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\Gamma(A) = 0, \tag{a$_2$}$$

und für alle geschlossenen Curven

$$\oint \frac{A_l}{\lambda}\, dl = -\oint K_l\, dl = \text{gegebenen Grössen.} \tag{b$_2$}$$

Die Analogie wäre vollkommen, wenn nicht dieser Unterschied bestände: es giebt Körper, für welche $\lambda = 0$ ist, aber keine Körper, für welche $\mu = 0$ ist. Daraus folgt: die Strömungslinien der zweiten Aufgabe können in Canäle von willkürlich vorgeschriebener Form eingedämmt werden; wählt man für diese „lineare“ Bahnen, so reducirt sich das Strömungsproblem auf die Auflösung der linearen Kirchhoff'schen Gleichungen. Den magnetischen Kraftlinien der ersten Aufgabe hingegen steht, allgemein gesprochen, der ganze unendliche Raum offen.

Es sei nun aber der Raum zum Theil von Eisen (μ), zum Theil von Luft (μ_0) erfüllt; dann ist μ_0 sehr klein gegen μ. Wir werden also das Feld in erster Näherung richtig erhalten durch den Ansatz $\frac{\mu_0}{\mu} = 0$, — sofern unter dieser Annahme überhaupt noch ein Feld möglich ist. Der Ansatz bedeutet (vgl. Kap. II, S. 144), dass in die Luft überhaupt keine Kraftlinien eindringen. Da nun jede Kraftlinie eine geschlossene Curve bildet, welche Stromlinien umzingelt, so liefert der Ansatz eine Näherung nur dann, wenn Curven dieser Art construirt werden können, welche ganz in Eisen verlaufen. Dem System „Eisen, Luft, Kraftlinien“ entspricht dann vollkommen ein geometrisch gleiches System „Leiter, Luft, Stromlinien“. —

Ist hingegen die Anordnung so, dass jede geschlossene Curve, welche eine Stromlinie umzingelt, geometrisch nothwendig zum Theil in Luft verläuft, so ist das Analogon des magnetischen Feldes ein Stromgebiet, in welchem etwa dem Eisen ein metallischer Leiter, der Luft ein Elektrolyt entspricht. Die Kraftlinien treten an den Grenzflächen nahezu normal in die Luft ein; sie sind im Luftraum in merklicher Dichte nur auf den kürzesten Wegen vorhanden (ein Beispiel s. in § 3, A 6).

Indem wir von einem magnetischen Felde M elektrischer Ströme sprachen, haben wir diesem Felde implicite die Eigenschaften beigelegt, welche in den bisher behandelten Fällen die Grösse M charakterisirten. Wir haben insbesondere damit aussagen wollen, dass auf einen nicht stromdurchflossenen,

übrigens aber beliebigen, magnetisirten oder nicht-magnetisirten, homogenen oder inhomogenen Körper in diesem Felde die uns aus Kapitel III bekannten mechanischen Kräfte wirken. Es war nach Kapitel III (31) für $d\tau$ die Kraft: $f \cdot d\tau$, wo

$$f_x = \varrho M_x - {}^1/_2\, M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x}, \text{ etc.} \tag{a}$$

Wir haben noch zu fragen nach den mechanischen Kräften $f \cdot d\tau$, welche auf die Elemente $d\tau$ eines durchströmten Leiters wirken. Wenn wir in (9b) gemäss (17) setzen:

$$i_1 dx_1 = A_x d\tau, \text{ etc.}$$

und beachten, dass die in (9) durch $f_1 ds_1$ bezeichnete Kraft jetzt $f \cdot d\tau$ heisst, so kommt

$$f_x = \frac{\mu}{V}(A_y M_z - A_z M_y), \text{ etc.} \tag{b}$$

oder, unter Berücksichtigung von (H''):

$$f_x = \mu M_z \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) + \mu M_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right), \text{ etc.}$$

Voraussetzung für die Gültigkeit von (9b) war:

1) dass bei der Berechnung von M das Feld des in s_1 fliessenden Stromes selbst nicht in Betracht gezogen würde, und die Kräfte demgemäss nur die Wechselwirkung zwischen dem Leiter s_1 und dem „fremden“ Felde M darstellten;

2) dass am Ort von ds_1 die Permeabilität μ nicht variirte;

3) (implicite) dass sich auf ds_1 keine magnetische Vertheilung befand.

Die erste Beschränkung können wir jetzt fallen lassen; denn wir haben gesehen, dass im Falle endlicher räumlicher Stromdichte A der unendlich dünne Stromfaden, welcher $d\tau$ enthält, zum Werthe von M in $d\tau$ nichts endliches beiträgt. Wir können also die Gleichung (b) dahin interpretiren, dass sie die gesammte Kraft auf die Volumeinheit darstellt, und dass M die gesammte Feldintensität bedeutet, wenn an der be-

trachteten Stelle die Strömung gleich A ist und die Grössen $\varrho, \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot\cdot$ gleich Null sind.

Die einfachste Annahme, welche für die beiden soeben betrachteten Specialfälle (a) und (b) zu richtigen Werthen führt, ist demnach: In dem allgemeinsten stationären magnetischen Felde, welches sowohl Magnete, wie stationäre elektrische Ströme enthalten kann, ist die mechanische Kraft f auf die Volumeinheit gegeben durch:

$$f_x = \varrho M_x - \tfrac{1}{2} M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\mu}{V}(A_y M_z - A_z M_y), \text{ etc.} \quad (20)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} f_x = \Gamma(\mu M) \cdot M_x - \tfrac{1}{2} M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu M_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) \\ + \mu M_z \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right), \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (20a)$$

Diese Kräfte aber lassen sich, wie in Kapitel III, S. 204 gezeigt wurde, bedingungslos durch die Spannungen p_{ik} darstellen, deren einfachster Ausdruck ist: auf jede zu den Kraftlinien normale Flächeneinheit wirkt ein normaler Zug $\tfrac{1}{2} \mu M^2$, und auf jede zu den Kraftlinien parallele Flächeneinheit ein normaler Druck von gleichem Betrage.

An späterer Stelle (in Kap. VIII, B) soll gezeigt werden, dass die Annahme dieser Spannungen thatsächlich allgemein dem Princip von der Erhaltung der Energie Genüge leistet, aus dem sie unter den speciellen Bedingungen des Kap. III abgeleitet sind.

§ 3. Specielle Aufgaben.

Wir wollen nun die allgemeinen Sätze der §§ 1 und 2 auf eine Reihe specieller Fälle anwenden. Sofern nichts anderes bemerkt ist, wird stets vorausgesetzt, dass das die Stromträger umgebende Medium ausschliesslich Luft ist, und der Stromträger eine Permeabilität μ besitzt, welche derjenigen der Luft gleich ist. Wo diese Voraussetzungen nicht gelten sollen, wollen wir von „Eisenkörpern“ sprechen. Zunächst behandeln wir

A. Das Feld gegebener Ströme.

1) Ein System gleicher linearer Ströme i möge gleiche sehr kleine Flächen S umfliessen, welche normal zu einer beliebigen Leitlinie l so angeordnet sind, dass n derselben auf die Längeneinheit kommen. („Einfaches Solenoid"; es wird sehr nahe verwirklicht durch eine dünne, eng und gleichmässig gewundene stromführende Spirale mit eng anliegender Rückleitung.) Dem Stromsystem ist „äquivalent" ein System von Doppelschichten mit der Fläche S und der Stärke

$$\Phi = \frac{i}{V},$$

oder eine Magnetisirung I des Hohlraumes der Spirale, welche parallel zu l ist und deren Werth nach Kapitel III (54) bestimmt ist durch

$$\frac{I}{n\mu} = \Phi = \frac{i}{V};$$

oder ein „magnetisches Solenoid" mit den Polen

$$\pm IS = \pm \frac{\mu n i S}{V}.$$

Das heisst: das magnetische Feld der Ströme ist in jedem Punkt des äusseren Raumes gleich dem Feld dieser beiden Pole. Innerhalb der Spirale ist es gleich der durch μ dividirten „Induction" B des magnetischen Systems, welche definirt ist durch

$$B_l = \mu M_l + I_l,$$

d. h. in unserm Fall: zu dem Feld der beiden Pole kommt hinzu ein Feld

$$\frac{I}{\mu} = \frac{ni}{V}$$

parallel zu l, und vom Südpol zum Nordpol gerichtet. Ist die Leitcurve l geschlossen, so ist das Feld Null ausserhalb der Spirale; innen ist es

$$\frac{ni}{V} \text{ parallel zu } l.$$

2) Eine stromführende Spirale umgebe in engen gleichmässigen Windungen einen geraden Cylinder von beliebiger Basis. Wie in 1) erhalten wir: dem Strom i ist „äquivalent" ein System von Doppelschichten von der Stärke

$$\Phi = \frac{i}{V},$$

oder eine gleichförmige Magnetisirung

$$I = \frac{\mu n i}{V},$$

oder eine magnetische Vertheilung auf den Stirnflächen von der gleichförmigen Dichte

$$\pm \frac{\mu n i}{V}.$$

Ist die Spirale sehr lang, so ist in den von den Enden weit entfernten Raumtheilen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ausserhalb der Spirale:} & M = 0 \\ \text{innerhalb } \;,, \quad ,, \; : & M = \dfrac{ni}{V} \end{array}\right\} \qquad (21)$$

parallel den Erzeugenden der Cylinderfläche.

Das Feld M wird (s. S. 254) nicht verändert, wenn man in die sehr lange (genau: unendlich lange) Spirale einen sehr (unendlich) langen parallelen Cylinder aus Eisen einführt.

3) Eine stromführende Spirale umgebe in $2\pi\nu$ engen gleichmässig vertheilten Windungen einen Ring von beliebigem Profil. Wir bezeichnen so einen Körper, welcher durch die Rotation einer beliebigen ebenen Figur um eine in deren Ebene gelegene, aber die Figur nicht schneidende Axe entsteht. — Allgemein muss jede Kraftlinie eines Stromes mit der Stromcurve mindestens einmal verschlungen sein. Aus den Symmetrie-Verhältnissen unserer Anordnung ergiebt sich daher, dass die Kraftlinien ausschliesslich im Ringkörper verlaufen, dass sie Kreise um die Rotationsaxe bilden, und dass längs einer jeden Kraftlinie M constant ist. Daher folgt aus (2a) für einen Abstand ϱ von der Axe:

$$2\pi\varrho \cdot M = 2\pi\nu \frac{i}{V}$$

oder

$$M = \frac{i}{V}\frac{\nu}{\varrho}. \tag{22}$$

Ausserhalb des Ringkörpers ist das Feld in Strenge Null; wir haben also hier den Fall eines geschlossenen magnetischen Feldes.

(Das gleiche Resultat hätten wir, wie oben, mittels des äquivalenten Magneten erhalten; dieser wäre ein Ringmagnet, dessen Feld überall Null ist.)

Das Feld M unseres Stromes wird nicht verändert, wenn man in die Spirale einen coaxialen Eisenring von beliebigem Profil einführt. — Im äusseren Raum sind Eisenkörper von beliebiger Form ohne Einfluss.

4) Wir suchen das Feld eines Kreisstromes für Punkte auf der Axe. Die Componenten von M im Punkte p sind nach (12) die negativen Derivirten von

$$\psi' = \frac{i}{V}\frac{\alpha'}{4\pi},$$

wo α' den körperlichen Winkel bezeichnet, unter welchem die Stromcurve von p aus erscheint. Für Punkte der Axe ist α' ein Grenzwerth bezüglich aller zur Axe normalen Verschiebungen; also hat das Feld dort die Richtung der Axe und den Werth

$$M = -\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{i}{4\pi V}\frac{\partial \alpha'}{\partial x},$$

wenn x den Abstand des Punktes p von der Kreisebene bedeutet. Sei noch R der Radius der Kreislinie, r ihr Abstand von p, so dass

$$r^2 = x^2 + R^2,$$

dann ist

$$\alpha' = 2\pi\left(1 - \frac{x}{r}\right),$$

also

$$M = \frac{i}{4\pi V}\frac{2\pi R^2}{r^3}. \tag{23}$$

Die Richtung ist durch die „Rechtsschraubenregel“ gegeben (vgl. Fig. 31 und 32). Für den Kreismittelpunkt wird:

$$M = \frac{i}{4\pi V} \frac{2\pi}{R}. \tag{23a}$$

Der Kreis sei vertical und im magnetischen Meridian; dann ist dieses Feld normal zum Meridian; es liefert also zusammen mit der Horizontalcomponente H des Erdfeldes eine Resultante, deren Grösse F und Neigung ϑ gegen den Meridian gegeben ist durch

$$F \cos \vartheta = H$$

$$F \sin \vartheta = M.$$

Daraus

$$tg\,\vartheta = \frac{2\pi}{R} \frac{i}{4\pi V} \frac{1}{H}. \tag{24}$$

Eine sehr kleine Magnetnadel, welche sich um die Verticale frei drehen kann, wird also durch den Strom i um diesen Winkel ϑ abgelenkt. (Tangentenbussole.)

5) Der Strom i fliesse in einem unendlich langen Kreiscylinder vom Radius R. (Die Strombahn muss nothwendig geschlossen sein; unsere Annahme bedeutet daher, dass sie unter anderm ein sehr langes cylindrisches Stück enthalten soll, und dass wir nur das Feld in der Umgebung des mittleren Theils dieses Cylinders in's Auge fassen.) Die stationäre Strömung ist dann gleichmässig über den Querschnitt verbreitet, also

$$A = \frac{i}{\pi R^2}.$$

Aus Symmetriegründen folgt, dass die Kraftlinien Kreise um die Cylinderaxe bilden, und dass M nur Function des Abstandes ϱ von der Axe sein kann. Also ergiebt (H), auf eine Kreislinie um die Axe angewandt:

für einen äusseren Punkt: $2\pi\varrho \cdot M_a = \frac{A}{V} \pi R^2,$

" " inneren " : $2\pi\varrho \cdot M_i = \frac{A}{V} \pi \varrho^2;$

oder:

$$\left.\begin{aligned} M_a &= \frac{i}{V} \frac{1}{2\pi\varrho} \\ M_i &= \frac{i}{V} \frac{\varrho}{2\pi R^2}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Dass diese Lösung die Gleichungen (H) und (16) befriedigt, folgt unmittelbar aus der Ableitung. Es ist ferner sowohl M_i wie M_a stetig, und an der Grenzfläche $\varrho = R$ gehen ihre Tangential-Componenten, — welche mit M selbst identisch sind, — stetig in einander über. Dass für $\varrho = \infty$ nur ϱM und nicht, wie es die allgemeinen Bedingungen verlangen, $\varrho^2 M$ endlich bleibt, weist auf die Nothwendigkeit der Rückleitung hin (vgl. Cylinder-Condensator in Kap. I, S. 70). Das äussere Feld M_a ist dasselbe, wie dasjenige eines „linearen" Stromes i in der Cylinderaxe. Das innere Feld im Abstand ϱ aber ist das gleiche, welches ein in der Axe fliessender Strom $i' = A\pi\varrho^2$ hervorrufen würde. (Man sieht zugleich, dass das Feld im Innern eines durchströmten Kreis-Hohlcylinders Null ist.) — Das Feld M in (25) bleibt ungeändert, wenn der stromführende Cylinder mit einem coaxialen Hohlcylinder aus Eisen umgeben wird, oder wenn er selbst aus Eisen gebildet wird. Besonders der letztere Fall ist von Interesse: der Eisencylinder erhält eine „inducirte Magnetisirung"

$$I' = (\mu - \mu_0)\, M_i$$

wo sich μ_0 auf Luft, μ auf Eisen bezieht; aber diese ist ringförmig; ihr entsprechen keine inducirten magnetischen Mengen; sie erzeugt kein Zusatzfeld.

6) (Als Ausführung der Bemerkungen S. 255 f.) Eine stromführende Spirale von N Windungen umgebe einen Eisenkörper, der durch weitere Eisenmassen entweder α) vollkommen oder β) nahezu zu einem ringartigen Gebilde geschlossen wird.

Fall α) (vgl. Fig. 21, S. 159.) Wir betrachten das Integral $\int M_l\, dl = \int \frac{\mathfrak{M}_l}{\mu} dl$ für eine geschlossene, ganz im Eisen verlaufende Curve.

Es ist $= 0$ für jede Curve vom Typus a;

$= N \frac{i}{V}$ „ „ „ „ „ b.

Ferner ist in der ganzen Eisenmasse $\Gamma(\mathfrak{M}) = 0$, und, wenn wir für den Aussenraum $\mu_0 = 0$ setzen, an der Oberfläche $\mathfrak{M}_n = 0$.

Wir setzen nun an die Stelle des Eisenringes einen geschichteten Leiter vom Leitungsvermögen $\lambda = \mu$; an die Stelle der N Windungen elektromotorische Schichten mit der gesammten elektromotorischen Kraft $\mathcal{E} = N\frac{i}{V}$. Dann ist (vgl. S. 159f.) die Strömung $\varLambda$ in diesem Leiter durch dieselben Gleichungen bestimmt (und zwar eindeutig bestimmt) wie $\mathfrak{M}$. Es ist also $\mathfrak{M} = \varLambda$, — als eine erste Näherung, in welcher Grössen der Ordnung $\frac{\mu_0}{\mu}$ vernachlässigt sind. Mit der gleichen Näherung folgt weiter: das Integral $Q = \int \mathfrak{M}_N dS$, gebildet für beliebige Querschnitte des Eisenkörpers, hat einen constanten Werth; der Quotient $\frac{N\frac{i}{V}}{Q} = R$ ist eine durch die Form und die μ-Werthe der Eisenmasse bestimmte Grösse, und numerisch gleich dem Widerstand w des leitenden Ringes. (Man hat R daher zuweilen den „magnetischen Widerstand" des Ringes genannt.)

Ist der Eisenkörper homogen, der Ring dünn und von gleichmässigem Querschnitt S, so wird $R = \frac{l}{\mu S}$, wo l den Ringumfang bezeichnet, und somit

$$Q = \frac{\mu NS}{l}\frac{i}{V}.$$

Fall β): Der Ring sei aufgeschlitzt, der Zwischenraum mit Luft erfüllt. Würden wir hier wiederum $\mu_0 = 0$ setzen, so würde $\mathfrak{M}$ identisch mit der Strömung $\varLambda$ im aufgeschnittenen Ring, d. h. $= 0$. Um für diesen Fall eine erste Näherung zu erhalten, kann man der Luft im Schlitz den wahren Werth der Permeabilität (μ_0), der Luft im übrigen Raum den Werth 0 zuschreiben. Die magnetische Polarisation $\mathfrak{M}$ ist dann wieder gleich der Strömung $\varLambda$ in einem geschichteten Leiter, der sich aus zwei Theilen zusammensetzt. Der erste Theil ist der vom Eisenkörper erfüllte Raum; er enthält die elektromotorische Kraft $\mathcal{E} = N\frac{i}{V}$, und sein

Leitungsvermögen ist $\lambda = \mu$; die Strom-Eintrittsflächen werden von den Stirnflächen des Schlitzes gebildet; die Mantelfläche bildet der Rest der Eisenoberfläche; der elektrische Widerstand dieses Körpers heisse R. Der zweite Theil des Leiters ist ein Körper vom Leitungsvermögen $\lambda = \mu_0$, ohne innere elektromotorische Kraft; seine äquipotentialen Strom-Eintrittsflächen S_e und S_a bilden die Stirnflächen des Schlitzes; seine Mantelfläche S_0 ist eine willkürliche Fläche, welche mit S_e und S_a zusammen den Schlitz begrenzt. Da der Abstand der Stirnflächen klein sein soll gegen ihre linearen Abmessungen, so ist der Widerstand dieses Körpers nahezu unabhängig von der besonderen Wahl der Fläche S_0; er heisse R_0. — Es hat wiederum $Q = \int \mathfrak{M}_\nu dS$ denselben Werth für alle Querschnitte des vollständigen Ringes und es wird

$$\frac{Ni}{V} = Q\,(R + R_0).$$

Dass $\frac{\mu_0}{\mu}$ sehr klein ist, hat zur Folge, dass R klein ist gegen R_0, selbst wenn die Breite des Schlitzes nur einen kleinen Theil des Ringumfanges ausmacht. Es genügt daher praktisch, den Verlauf der Kraftlinien im Eisen annähernd zu kennen; d. h. man darf

$$R = \frac{l}{\mu S}$$

setzen, wo S einen mittleren Querschnitt, l eine mittlere Länge des Eisenkörpers bezeichnet. — Die hier skizzirte Methode findet in der Technik Verwendung als erste Näherung. Eine zweite Näherung wird erhalten, indem man (vgl. Fig. 33) den „magnetischen Kreis" in eine endliche Anzahl ($k + 1$) von Abschnitten zerlegt, von denen einer durch die Luftschicht gebildet wird, die übrigen durch passend gewählte Stücke des

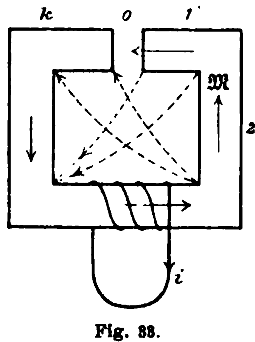


Fig. 33.

Eisenkörpers. Es wird angenommen, dass innerhalb jedes einzelnen Abschnitts Q einen constanten Werth habe, während an den Endpunkten jedes Abschnitts Kraftlinien abzweigen („gestreut werden“). Die Vertheilung der Kraftlinien wird damit gleichgesetzt der Vertheilung der Strömung in einem verzweigten Leitersystem, welches nur in einem Zweige eine elektromotorische Kraft enthält, und in welchem die $(k+1)$ Ringabschnitte die Zweige eines Umlaufs bilden. Die Gleichung des „Kreises“ wird daher

$$N\frac{i}{V} = Q_0 R_0 + \Sigma\frac{Ql}{\mu S},$$

wo der Index 0 sich auf Luft beziehen, und Σ eine Summation über die k Abschnitte des Eisenkörpers bezeichnen soll. Schreibt man

$$Q = \nu Q_0,$$

so sind die Grössen ν constante, von i unabhängige Coefficienten, welche empirisch bestimmt werden können und als „Streuungscoefficienten“ bezeichnet werden. (In der correspondirenden Strömungsaufgabe sind es Functionen der Widerstände aller Zweige des Netzwerks.) Mit dieser Bezeichnung wird

$$N\frac{i}{V} = Q_0 R_0 + \Sigma\frac{\nu Q_0 l}{\mu S}.$$

In dieser Gleichung bedeutet

$\frac{\nu Q_0}{S}$ die mittlere Polarisation $\mathfrak{M}$,

$\frac{\nu Q_0}{\mu S}$ die mittlere Feldstärke M

in dem betreffenden Eisenstück. Nun ist für Eisen (vgl. Kap. VIII A) dass Verhältniss $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ thatsächlich keine Constante: es ist vielmehr

$$M = f(\mathfrak{M})$$

eine Function, welche für jede Eisensorte empirisch bestimmt werden muss. Führen wir diese Verallgemeinerung ein, so wird

$$N\frac{i}{V} = Q_0 R_0 + \Sigma l \cdot f\left(\frac{\nu Q_0}{S}\right).$$

Sind die Functionen f experimentell bestimmt, und ebenso die Coefficienten ν (welche jetzt ebenfalls keine Constanten mehr sind), so kann, tabellarisch oder graphisch, Ni als Function der Induction Q_0 durch den Luftraum dargestellt werden, — also auch umgekehrt Q_0 als Function von Ni. — Die Gleichung bildet die Grundlage für die Construction der Dynamomaschinen. (Hopkinson.)

B. Mechanische Kräfte auf Stromträger in einem gegebenen Feld.

1) Ein linearer Strom i befinde sich in einem gleichförmigen Felde M. Dann ist [vgl. (7) (8)] die Arbeit bei einer Verschiebung

$$A = \frac{i}{V}\delta Q,$$

wo

$$Q = \mu M_x \cdot S_x + \mu M_y \cdot S_y + \mu M_z \cdot S_z,$$

$$S_x = \int \cos(Nx)\, dS \quad \text{etc.}$$

Wir nennen „Ebene des Stromes" die Ebene, für welche die Projection einer von der Stromcurve umspannten Fläche den grössten Werth besitzt. Die positive Normale dieser Ebene heisse ν. Als „Fläche des Stroms" S bezeichnen wir die Grösse dieser Maximalprojection, d. h. die algebraische Summe aller $\cos(N\nu)\, dS$. Dann ist $S_x = S\cos(\nu x)$ etc., folglich

$$Q = \mu M \cdot S \cdot \cos(M\nu). \tag{26}$$

Sei der Stromträger lediglich drehbar um eine verticale Axe; sei Σ die maximale Projection von S auf eine verticale Ebene, H die horizontale Componente von M, und ϑ der Winkel zwischen H und der Normalen von Σ; dann ist

$$Q = \mu H \cdot \Sigma \cdot \cos\vartheta + \text{const}.$$

und folglich das Drehungsmoment zu wachsenden ϑ:

$$\Theta = \frac{\partial A}{\partial \vartheta} = -\frac{i}{V}\mu H \cdot \Sigma \cdot \sin\vartheta. \qquad (27)$$

Dieses Drehungsmoment kann durch dasjenige einer bifilaren Aufhängung compensirt und gemessen werden. (Weber's Bifilargalvanometer.)

Ist — wie etwa in Figur 34 — die Form der Stromcurve derartig, dass $S = 0$ ist, so wird die Arbeit Null für jede Verschiebung in einem gleichförmigen Felde. Das heisst: ein solches „astatisches" Leitersystem ist im gleichförmigen Felde in jeder Lage im Gleichgewicht. Es können daher an ihm die Einwirkungen eines beliebigen Feldes beobachtet werden, unbeeinflusst von dem gleichzeitig vorhandenen Erdfelde.

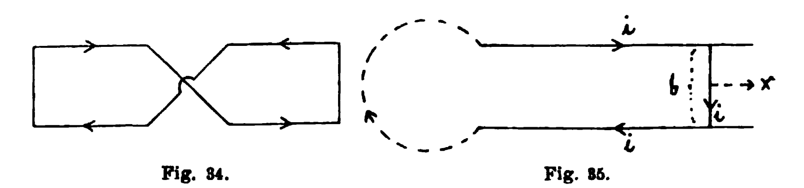


Fig. 34. Fig. 35.

2) Ein im übrigen beliebig geformter Stromkreis (Fig. 35) enthalte u. A. zwei parallele Schienen im Abstande b, auf welchen eine dritte, zu ihnen normale Schiene, die Brücke, gleiten kann. Wo diese Brücke sich befindet, bestehe ein Feld, dessen Componente nach der positiven Normale der Stromfläche M_N heissen mag. Gleitet dann die Schiene um δx nach aussen, so ist

$$\delta Q = \mu M_N \cdot b \cdot \delta x;$$

also wirkt auf die Schiene eine nach aussen gerichtete Kraft

$$f = \frac{i}{V}\mu M_N b.$$

M_N ist positiv und die Schiene wird nach aussen getrieben, wenn der Strom die Richtung der Pfeile in Fig. 35 hat, und zugleich die Kraftlinien von vorn nach hinten durch die

Zeichnungsebene treten, oder wenn beide Richtungen die entgegengesetzten sind; — die Schiene gleitet nach innen, wenn eine der beiden Richtungen umgekehrt wird.

3) Ein Stromkreis (s. Fig. 36) sei zum Theil gebildet aus einem kreisförmigen Leiter *ACBD* vom Radius *R*, und einem radialen Leiter *EB*, welcher um den Mittelpunkt rotiren kann. Den Rest der Leitung bilde eine Verbindung *EFA* zwischen dem Mittelpunkt *E* und einem festen Punkt der Peripherie *A*. Der Strom in diesem Stück und im radialen Leiter sei *i*. Es sei ein gleichförmiges Feld *M* vorhanden, welches normal zur Kreisebene, und zwar von der Vorder-

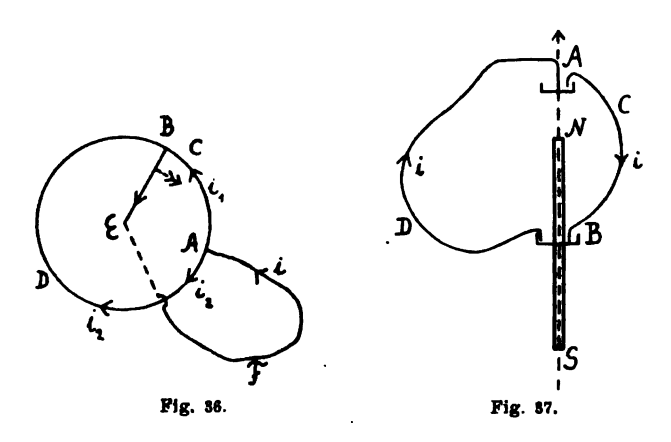


Fig. 36. Fig. 37.

seite zur Rückseite der Zeichnung gerichtet sei. Dann wirkt nach (9a) auf ein Element *dr* des radialen Leiters eine Kraft

$$f\,dr = \frac{i}{V}\,\mu M\,dr$$

in der Richtung des Doppelpfeils. Die Gesammtheit dieser Kräfte erzeugt ein Drehungsmoment

$$\Theta = \int_0^R r\,f\,dr = \frac{i}{V}\,\mu M\,\frac{R^2}{2}.$$

Dasselbe besitzt constante Grösse und wirkt stets im gleichen Sinne. Es würde also, wenn keine anderen Kräfte wirkten,

eine dauernde Rotation des radialen Leiters mit unbegrenzt zunehmender Geschwindigkeit zur Folge haben.

Wir wollen das Resultat nochmals direct aus (7) und (8) ableiten. Q hat eine Bedeutung nur für vollständige, geschlossene Stromschleifen. In solche muss sich aber auch jedes System stationärer Ströme zerlegen lassen. Das unsrige entsteht aus den Strömen i_1 in der Bahn $ACBEFA$ und i_2 in $ADBEFA$, welche sich auf der Strecke $BEFA$ zu $i = i_1 + i_2$ superponiren. Das Feld tritt durch die Fläche S_1 von i_1 in negativer, durch die Fläche S_2 von i_2 in positiver Richtung. Es ist also

$$\partial A = \frac{i_1}{V} dQ_1 + \frac{i_2}{V} dQ_2, \quad \text{wo} \quad dQ_1 = -\mu M \cdot dS_1$$
$$dQ_2 = + \mu M \cdot dS_2 .$$

Wenn aber EB in der Richtung des Doppelpfeils um $d\vartheta$ rotirt, so ist

$$-dS_1 = \tfrac{1}{2} R^2 d\vartheta = + dS_2 .$$

Folglich

$$\Theta = \frac{\partial A}{\partial \vartheta} = \frac{i_1 + i_2}{V} \mu M \frac{R^2}{2} = \frac{i}{V} \mu M \frac{R^2}{2} .$$

4) (Sogenannte unipolare Wirkung.) Um die Axe eines der Länge nach gleichförmig magnetisirten dünnen Stabes SN (s. Figur 37) möge das Stück ACB eines Stromträgers rotiren können, der durch die beliebige Curve BDA zum Kreise geschlossen ist. Das magnetische Feld ist dasjenige zweier magnetischer Mengen $+m$, $-m$, welche sich in N bezw. S befinden. Nach Kapitel III, (70) ist das auf den Bogen ACB wirkende Drehungsmoment, welches von einem Pol 1 im Punkte p herrührt:

$$\Theta(p) = \frac{i}{4\pi V} \left[\cos(\overline{pB}, \overline{SN}) - \cos(\overline{pA}, \overline{SN}) \right] .$$

Also ist das resultirende Drehungsmoment:

$$\Theta = m\,\Theta(N) - m\,\Theta(S) , \text{ wo}$$

$$\Theta(N) = \frac{i}{4\pi V} [-1 - (+1)] = -\frac{i}{2\pi V}$$

$$\Theta(S) = \frac{i}{4\pi V}[+1-(+1)] = 0.$$

Folglich

$$\Theta = -\frac{m\,i}{2\pi V} = \text{const.};$$

der Bügel *ACB* wird also stets in gleichem Sinn um die Axe *SN* herumgeführt, und zwar so, dass er aus der gezeichneten Lage nach vorn tritt. Wesentlich für das Resultat ist, dass *N* zwischen *A* und *B*, *S* aber auf der Verlängerung von *AB* liegt. Wenn *NS* zwischen *A* und *B*, oder ganz ausserhalb *AB* läge, so würde $\Theta = 0$.

Das Resultat ist erhalten (vgl. die Ableitung in Kap. III) aus der Zusammensetzung der Elementarkräfte, welche auf die Elemente des Bogens *ACB* wirken, oder mit anderen Worten: aus der Anzahl von Kraftlinien, welche von *ACB* bei einer virtuellen Drehung geschnitten werden. Wir wollen es nochmals ableiten aus der Gleichung

$$\Theta = \frac{\partial A}{\partial \vartheta} = \frac{i}{V}\frac{\partial Q}{\partial \vartheta}.$$

Es scheint, als müsse Q von ϑ unabhängig sein, da ja das Feld symmetrisch um *SN* ist. Man muss aber beachten, dass, wenn Q berechnet werden soll als

$$Q = \int \mu M_N dS,$$

die Fläche S das magnetische System, von welchem M herrührt, nicht schneiden darf. Man muss sich also etwa die Curve *ACBDA* von einer elastischen Membran ausgefüllt denken, welche den Stab *SN* nicht durchdringt und sich bei der Drehung um den Stab herumwickelt. Bei einer vollen Umdrehung, bei welcher diese Membran ihre negative Seite nach innen wendet, hat sich dann Q vermehrt um die Zahl aller Kraftlinien, welche von N ausstrahlen (die Kraftlinien μM divergiren gleichmässig nach allen Richtungen von N, der Bruchtheil, welcher im Stab liegt und die Fläche nicht trifft, ist also verschwindend), — d. h. um m. Folglich ist die Arbeit für eine volle Umdrehung: $m\frac{i}{V}$, und für eine Drehung um $d\vartheta$ ist sie: $m\frac{i}{V}\frac{d\vartheta}{2\pi}$.

Man sieht ferner aus der Figur, dass die Stromfläche ihre negative Seite nach innen wendet, wenn ACB im negativen Sinn um SN rotirt. Demnach

$$\Theta = -\frac{mi}{2\pi V}.$$

5) (Gramme'scher Ring.) Ein um seine Axe drehbarer Ringkörper vom Querschnitt S sei mit einer in sich zurücklaufenden Spirale von $2\pi\nu$ gleichmässig vertheilten Windungen bedeckt (s. Fig. 38). Die Spirale sei an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten A und B durch Schleifcontacte mit einem äusseren Stromkreise (i) in leitender Verbindung. i vertheilt sich dann auf die beiden Windungshälften (i_1 und i_2). Es bestehe ein magnetisches Feld, welches im Ringe bei A wie bei B den Werth M und die Richtung des Pfeils hat. Die Spirale sei rechts gewunden. Wenn dann eine bestimmte Windung im Sinne des Pfeils von A nach B übergeführt wird, so ist der Strom in ihr i_1, und die Zahl der in positiver Richtung durch sie hindurchtretenden Kraftlinien wächst von $-Q_0$ auf $+Q_0$, wo $Q_0 = \mu MS$. Während sie weiter von B nach A übergeführt wird, ist der Strom in ihr i_2, und die Kraftlinienzahl wächst zum zweiten Mal von $-Q_0$ auf $+Q_0$. Die an ihr geleistete Arbeit bei einer vollen Umdrehung ist somit

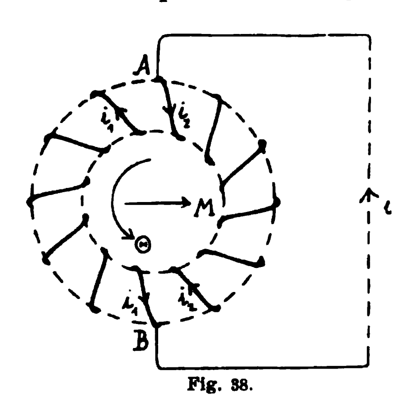


Fig. 38.

$$\frac{i_1}{V} 2Q_0 + \frac{i_2}{V} 2Q_0 = \frac{i}{V} 2Q_0.$$

Die an dem ganzen System der $2\pi\nu$ Windungen geleistete Arbeit ist also

$$2\pi\nu \cdot \frac{i}{V} 2Q_0$$

und folglich das Drehungsmoment

$$\Theta = \frac{\nu i}{V} 2Q_0 = 2\nu \frac{i}{V} \mu MS,$$

C. Stromträger im Felde von Strömen.

1) Zwei unendlich lange parallele Drähte im Abstande a, — deren jeden wir uns in unendlicher Entfernung zum Kreise geschlossen denken, — mögen die Ströme i_1 und i_2 führen. Das Feld von i_1 am Orte des Elements ds_2 ist dann nach (25)

$$M = \frac{i_1}{V \cdot 2\pi a}$$

normal zur Ebene der Paralleldrähte, im Sinn des positiven Umlaufs um i_1. Also ist die auf ds_2 wirkende Kraft nach (9a):

$$\frac{i_1\, i_2}{V^2}\, \frac{\mu}{2\pi a}\, ds_2\,;$$

sie hat die Richtung der gemeinsamen Normalen der beiden Drähte und ist anziehend oder abstossend, je nachdem i_1 und i_2 gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

2) Eine unendlich lange gerade Spirale mit dem Strom i_1 und n_1 Windungen von der Fläche S_1 auf der Längeneinheit rage in eine zweite parallele, ebenfalls unendlich lange Spirale i_2, n_2 soweit hinein, dass alle Enden unendlich weit von einander entfernt sind. Wenn sie dann um δx weiter eingesenkt wird, so vermehrt sich die Zahl der durch die Gesammteinheit ihrer Windungen hindurchtretenden Kraftlinien nach (21) um

$$\delta Q_{21} = \pm\, \mu\, \frac{n_2\, i_2}{V} \cdot S_1\, n_1\, \delta x\,,$$

je nachdem die Kraftlinien, welche positiv durch die Stromflächen von i_2 treten, positiv oder negativ durch S_1 treten, d. h. je nachdem i_1 und i_2 gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Nach (10) ist folglich die Kraft, mit welcher die Spirale eingesaugt wird:

$$f = \pm\, \mu\, \frac{i_1\, i_2}{V^2}\, n_1\, n_2\, S_1\,. \tag{28}$$

Hierin ist

$$\pm\, \frac{\mu\, n_1\, n_2\, S_1}{V^2} = \frac{\partial p_{12}}{\partial x}\,,$$

wo p_{12} den durch die Gleichungen (11) definirten wechselseitigen Inductionscoefficienten der beiden Spiralen bezeichnet.

3) Eine sehr lange Spirale mit dem Strom i_1 und n_1 Windungen von der Fläche S_1 auf der Längeneinheit sei an einer von den Enden sehr weit entfernten Stelle von N_2 Windungen einer zweiten Spirale umgeben; dann ist am Ort dieser letzteren nach (21):

$$M_1 = \frac{n_1 i_1}{V} \text{ innerhalb } S_1$$

$$M_1 = 0 \quad \text{ausserhalb } S_1;$$

also

$$Q_{12} = N_2 \frac{n_1 i_1}{V} \mu S_1$$

und

$$p_{12} = \frac{N_2 n_1}{V^2} \mu S_1. \tag{29}$$

Die Gleichungen (21) gelten auch noch, wenn sich innerhalb der ersten Spirale ein sehr langer Eisencylinder befindet. Sei dessen Querschnitt S, seine Permeabilität μ, und seien S_0, μ_0 dieselben Grössen für den übrig bleibenden Luftraum (sodass also $S + S_0 = S_1$), dann wird

$$p_{12} = \frac{N_2 n_1}{V^2} (\mu S + \mu_0 S_0). \tag{29a}$$

p_{12} ist unabhängig von der Lage der äusseren Spirale; es ändert sich nicht bei Verschiebung, Drehung oder Deformation derselben. Also wirken auch keine mechanischen Kräfte auf die Spirale. (Die Bedeutung von p_{12} wird aber in Kap. V hervortreten.)

4) In der Tangentenbussole [s. A, 4)] werde der kleine Magnet durch einen kleinen verticalen, vom Strom i_2 durchflossenen Kreis ersetzt. Bildet dessen Fläche S_2 mit der Ebene des äusseren Stromkreises (i_1) den Winkel ϑ, so ist nach (23a)

$$Q_{12} = \frac{i_1}{4\pi V} \frac{2\pi}{R} \mu S_2 \cos\vartheta,$$

und es wirkt folglich nach (10) auf den kleinen Kreis ein Drehungsmoment

$$\Theta = -\frac{\mu i_1 i_2}{4\pi V^2} \frac{2\pi}{R} S_2 \sin\vartheta. \tag{30}$$

5) Wir wollen noch den wechselseitigen Inductionscoefficienten p_{12} berechnen für zwei Kreise von den Radien A und a, welche in parallelen Ebenen vom Abstande x liegen, und deren Mittelpunkte sich auf der gleichen Normalen dieser Ebenen befinden. Nach (15) ist

$$p_{12} = \frac{\mu}{4\pi V^2}\mathfrak{M}, \text{ wo } \mathfrak{M} = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{x^2 + A^2 + a^2 - 2Aa\cos\vartheta}}.$$

Setzt man $$\vartheta = \pi - 2\eta$$

$$k^2 = \frac{4Aa}{(A+a)^2 + x^2},$$

so wird $$\cos\vartheta = 2\sin^2\eta - 1$$ und

$$\mathfrak{M} = 4\pi\sqrt{Aa} \cdot k \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\eta - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta}}\, d\eta$$

$$= 4\pi \frac{\sqrt{Aa}}{k} \left[(2 - k^2)\, F - 2\, E\right],$$

wo $$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta}}, \qquad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\eta} \cdot d\eta$$

die vollständigen elliptischen Integrale erster, bezw. zweiter Gattung zum Modul k bezeichnen.

Es mögen speciell die beiden Kreise einander sehr nahe liegen, d. h. $A - a$ und x sehr klein sein gegen A. Dann wird k^2 sehr nahe gleich Eins. Setzt man dann

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(A-a)^2 + x^2}{(A+a)^2 + x^2},$$

so ist (s. z. B. Schlömilch, höhere Analysis Band II, S. 322 f.):

$$F = \lg\left(\frac{4}{k'}\right) + \frac{1}{4}\left[\lg\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right] k'^2 + \ldots$$

$$E = 1 + \tfrac{1}{2}\left[\lg\left(\frac{4}{k'}\right) - \tfrac{1}{2}\right] k'^2 + \ldots$$

In erster Näherung wird

$$k' = \frac{b}{2A},$$

wo b den kürzesten Abstand der beiden Kreislinien bezeichnet; und zugleich

$$\mathfrak{M} = 4\pi A\,[F - 2E] = 4\pi A\left[\lg\left(\frac{4}{k'}\right) - 2\right];$$

also

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= \frac{\mu}{4\pi V^2}\mathfrak{M} \\ \mathfrak{M} &= 4\pi A\left[\lg\left(\frac{8A}{b}\right) - 2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

§ 4. Massmethoden.

Im Vorstehenden sind die Grundlagen elektrodynamischer Massmethoden enthalten, welche wesentlich von Wilhelm Weber ausgebildet worden sind. — Alle Gleichungen dieses Kapitels enthalten eine Grösse V, welche hier zuerst aufgetreten ist und eine universelle Constante bezeichnet. Nur in der Verbindung $\frac{i}{V}$ kommen Stromstärken i vor.

Die Resultate unter A zeigen allgemein, wie $\frac{i/V}{M}$, — diejenigen unter B, wie $\frac{i}{V}\mu M$, — diejenigen unter C, wie $\frac{\mu i^2}{V^2}$ in mechanischem Mass gemessen werden kann. Auch die Combination zweier Messungen nach A und B giebt die Grösse $\frac{\mu i^2}{V^2}$, und zugleich μM^2. — Instrumente zur Messung von $\frac{i/V}{M}$ oder von $\frac{i}{V}\mu M$ heissen allgemein Galvanometer, Instrumente zur Messung von $\frac{\mu i^2}{V^2}$ Elektrodynamometer. Die einfachsten Formen des Galvanometers bilden die unter A 4) und B 1) beschriebenen Instrumente. Die Anordnung unter C 4) ist das Schema des Weber'schen Dynamometers. Ein Dynamo-

meter, welches die translatorischen Kräfte auf Stromspulen benutzt, ist von Lord Rayleigh (Philos. Transactions 175, S. 411) angegeben worden. Das einfachste, aber praktisch nicht ausführbare Schema eines solchen Instruments würde die Anordnung unter C 2) bilden.

Aus Gleichung (2) folgt, dass $\frac{i/V}{M}$ eine Länge ist, aus (9), dass $\frac{i}{V}\mu M$ eine Kraft, dividirt durch eine Länge ist. — In Zeichen:

$$\left[\frac{i}{VM}\right] = L$$

$$\left[\frac{i}{V}\mu M\right] = M\,T^{-2}.$$

Folglich

$$\left[\frac{i\sqrt{\mu}}{V}\right] = M^{1/2}\,L^{1/2}\,T^{-1}$$

(und wie schon früher gefunden:

$$[M\sqrt{\mu}] = M^{1/2}\,L^{-1/2}\,T^{-1}).$$

Für einen bestimmten Strom i erhält man so z. B. mittels (30) oder mittels der Combination von (24) und (27)

$$\frac{i\sqrt{\mu_0}}{V} = A\ \mathrm{gr}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{sec}^{-1},$$

wo μ_0 die Permeabilität der Luft ist.

Für den gleichen Strom erhalte man nach den Methoden von Kap. II § 5, wenn ε_0 die Dielektricitäts-Constante der Luft bezeichnet:

$$\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0}} = B\ \mathrm{gr}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{sec}^{-2}.$$

Eine Combination beider Messungen ergiebt dann:

$$\frac{V}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{B}{A}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}.$$

Diese Constante ist zuerst von W. Weber und R. Kohl-

rausch, und später häufig nach mannigfachen Methoden gemessen worden. Das Ergebniss ist

$$\frac{V}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}. \tag{32}$$

Allgemein ist, wenn ε und μ sich auf einen beliebigen Körper beziehen, $\frac{V}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ eine Geschwindigkeit, und zwar offenbar eine Geschwindigkeit, welche diesen Körper in elektromagnetischer Beziehung charakterisirt; ihre einfache physikalische Bedeutung werden wir in Kap. VII kennen lernen.

Leitet man den nach den Methoden dieses § gemessenen Strom gleichzeitig durch einen Elektrolyten, so erhält man

$$\alpha\eta i = C \frac{\text{gr}}{\text{sec}},$$

wo, wie in Kap. II § 5, α das Aequivalentgewicht eines ausgeschiedenen Ions und η die elektrochemische Constante bezeichnet. Durch Combination beider Messungen ergiebt sich:

$$\alpha\eta \frac{V}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{C}{A} \text{gr}^{1/2} \text{cm}^{-1/2}.$$

So wurde gefunden — s. F. und W. Kohlrausch, Wied. Ann. 27, S. 1; Lord Rayleigh l. c. —

$$\alpha_H \eta \frac{4\pi V}{\sqrt{4\pi\mu_0}} = 0{,}0001036 \text{ gr}^{1/2} \text{cm}^{-1/2}. \tag{33}$$

Bezeichnet w einen Widerstand, $\mathcal{E}$ eine elektromotorische Kraft, t eine Zeit, dann ist i^2wt eine messbare Energiegrösse (vgl. Kap. II, § 5). Also erhält man mittels $\frac{i\sqrt{\mu_0}}{V}$ auch

$$\frac{w V^2}{\mu_0} = D \text{ cm}^1 \text{sec}^{-1},$$

und weiter aus dem Ohm'schen Gesetz:

$$\frac{\mathcal{E} V}{\sqrt{\mu_0}} = E \text{ gr}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-2}.$$

So kann man für den Widerstand w_S der Siemens-Einheit erhalten:

$$\frac{w_S (4\pi V)^2}{4\pi\mu_0} = \frac{10^9}{1{,}063} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

oder, was dasselbe bedeutet, für das specifische Leitungsvermögen λ_1 des Quecksilbers:

$$\lambda_1 \frac{4\pi\mu_0}{(4\pi V)^2} = 1{,}063 \cdot 10^{-5} \frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}. \qquad (34)$$

Weiter für die elektromotorische Kraft des Clark'schen Elements bei 15° C:

$$\mathcal{E}_c \frac{4\pi V}{\sqrt{4\pi\mu_0}} = 1{,}433 \cdot 10^8 \text{ gr}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sec}^{-2}. \qquad (35)$$

In den Gleichungen (32), (33), (34), (35) sind die Resultate der wichtigsten elektromagnetischen Normalen-Bestimmungen enthalten. Indem man (32) mit je einer der folgenden Gleichungen combinirt, erhält man die in Kapitel II, § 5 angeführten Zahlen.

Unsere Gleichungen sind unabhängig von jeder Festsetzung über die Masssysteme für elektrische und magnetische Grössen; sie setzen lediglich voraus, dass mechanische Grössen in absolutem mechanischem Mass gemessen seien, (in welchem „Kraft = Masse mal Beschleunigung"). Wir haben nun bereits ein „absolutes elektrisches Masssystem" erwähnt, welches $4\pi\varepsilon_0 = 1$ setzt; und ein „absolutes magnetisches Masssystem", welches $4\pi\mu_0 = 1$ setzt. Trifft man beide Festsetzungen gleichzeitig, so entsteht das sogenannte „Gauss'sche Masssystem" (welches u. A. Helmholtz und Hertz benutzen). In diesem hat V einen bestimmten Werth; es ist nämlich nach (32):

$$4\pi V = 3.10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Ein zweites, das sogenannte „elektrostatische absolute Masssystem", entsteht durch die Festsetzungen:

$$4\pi\varepsilon_0 = 1 \text{ und } 4\pi V = 1.$$

Es ist selten benutzt worden.

Ein drittes, das sogenannte „elektromagnetische absolute Masssystem" setzt fest:

$$4\pi\mu_0 = 1 \text{ und } 4\pi V = 1.$$

Dieses Masssystem liegt der überwiegenden Mehrzahl elektromagnetischer Messungen zu Grunde, und zwar in neuerer Zeit mit der weiteren Festsetzung, dass cm, gr, sec als Einheiten von Länge, Masse und Zeit gelten sollen, — sogenanntes *c. g. s.*-System. —

Als Abart dieses letzten hat sich ferner ein sogenanntes „praktisches Masssystem“ entwickelt. Dieses wählt als Einheit

für die Stromstärke:	1 Ampère	$= 10^{-1}$	*c.g.s.*-Einheiten,
für die elektromotor. Kraft:	1 Volt	$= 10^{8}$	„ „
für den Widerstand	1 Ohm	$= 10^{9}$	„ „
für die Elektricitätsmenge:	1 Coulomb	$= 10^{-1}$	„ „
für die elektrostatische Capacität:	1 Farad	$= 10^{-9}$	„ „
für elektromagnetische Inductionscoefficienten:	1 Quadrant	$= 10^{9}$	„ „
für die Energie:	1 Joule	$= 10^{7}$	„ „
für die Energieabgabe in der Zeiteinheit (Leistung):	1 Watt	$= 10^{7}$	„ „

Diese Einheiten entstehen, wenn man, wie im *c. g. s*-System, $4\pi\mu_0 = 1$ und $4\pi V = 1$ setzt, weiter aber 10^9 cm, 10^{-11} gr, sec als Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit wählt. Neben den genannten abgeleiteten Einheiten benutzt aber das „praktische Masssystem“ für die magnetischen und für die geometrischen Grössen die Einheiten des *c. g. s.*-Systems. Das „praktische Masssystem“ ist also kein consequentes absolutes Masssystem; es kann aus unseren Gleichungen nicht durch Specialisirung der verfügbaren Constanten (ohne Einführung von Zahlfactoren) abgeleitet werden. Für die Zwecke der theoretischen Physik ist es ungeeignet.

Wir stellen tabellarisch zusammen:

	$4\pi\varepsilon_0$	$4\pi\mu_0$	$4\pi V$	λ_1
Gauss	1	1	$3.10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$1{,}063\,.\,10^{-5}\,.\,9.10^{20}\,\frac{1}{\text{sec}}$
elektrostatisch .	1	$\frac{1}{9.10^{20}}\,\frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}$	1	$1{,}063\,.\,10^{-5}\,.\,9.10^{20}\,\frac{1}{\text{sec}}$
elektromagnetisch	$\frac{1}{9.10^{20}}\,\frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}$	1	1	$1{,}063\,.\,10^{-5}\,\frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}$

§ 5. Energie des stationären magnetischen Feldes.

In den älteren Untersuchungen über das magnetische Feld elektrischer Ströme spielt dessen Energie keine Rolle. Wir fragen jetzt nach dem Werth dieser Grösse, und wollen uns dabei leiten lassen durch die Kenntniss, welche wir bereits von der Energie eines magnetischen Feldes anderer Art besitzen. Von den Ausdrücken, welche wir in Kap. III fanden, scheiden diejenigen ohne weiteres aus, welche die magnetischen Mengen oder die Magnetisirung enthalten. Als ein möglicher Werth bleibt nur derjenige der Gleichung (F):

$$W_m = {}^1/_2 \int \mu M^2 d\tau.$$

Wir nehmen an, dass dieser Ausdruck die Energie eines magnetischen Feldes ganz allgemein darstelle, — möge nun in diesem Felde nur magnetische Vertheilung oder nur elektrische Strömung oder beides gleichzeitig vorhanden sein. — Diese erweiternde Annahme muss und wird ihre Berechtigung darin finden, dass die Abnahme des Werthes W_m in (F) bei irgend welchen möglichen Veränderungen des Systems thatsächlich stets gleich der Summe aller in nicht-magnetischer Form auftretenden Energie ist. (Siehe Kap. V und in allgemeinster Form Kap. VIII B.) —

Wir ziehen einige Folgerungen aus unserer Annahme. Es sei gegeben bei unveränderter Anordnung der Materie, also unveränderten μ-Werthen:

1) eine beliebige magnetische Vertheilung ϱ, σ; zu ihr gehöre das Feld M_1 und die Energie W_{m1};

2) eine beliebige stationäre Strömung A; zu ihr gehöre M_2 und W_{m2};

3) die Vertheilung ϱ, σ und die Strömung A gleichzeitig; das Feld heisse dann M, die Energie W_m.

Dann ist

$$1)\quad W_{m1} = {}^1/_2 \int \mu M_1{}^2 d\tau, \qquad M_{1l} = -\frac{\partial \psi}{\partial l},\ \psi \text{ einwerthig,}$$

$$2)\ W_{m2} = {}^1/_2 \int \mu M_2{}^2 d\tau, \qquad \Gamma(\mu M_2) = 0,$$

$$3)\ W_m = {}^1/_2 \int \mu M^2 d\tau, \qquad M_l = M_{1l} + M_{2l}.$$

Es folgt:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + R,$$

wo

$$R = \int \mu (M_{1x} M_{2x} + \cdot\cdot)\, d\tau = -\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \mu M_{2x} + \cdot\cdot\right) d\tau$$

$$= \int \psi \cdot \Gamma(\mu M_2)\, d\tau = 0;$$

also

$$W_m = W_{m1} + W_{m2}. \tag{36}$$

Das heisst: eine wechselseitige Energie zwischen permanenten Magneten und stationären Strömen existirt nicht; die Energiewerthe beider Systeme addiren sich einfach, wenn die Systeme superponirt werden.

Die Energie des Magnetsystems und ihre Umwandlung ist in Kapitel III vollständig behandelt. Wir können und wollen daher jetzt annehmen, es seien im Felde keine Magnete, vielmehr nur Ströme vorhanden. Es ist dann

$$P(M) = \frac{A}{V} \text{ und } \Gamma(\mu M) = 0.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt (vgl. S. 226), dass es eine unendliche Anzahl von Vectoren A giebt, welche der Gleichung

$$\mu M = P(A)$$

genügen, stetig sind und im unendlichen verschwinden. Einen solchen Vector A wollen wir in den Ausdruck für die Energie des „Stromfeldes" einführen. Es wird zunächst

$$W_m = {}^1/_2 \int \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) M_x + \cdot\cdot\right] d\tau.$$

Wir integriren partiell über den unendlichen Raum; wegen der Eigenschaften von M und A treten keine Flächenintegrale auf, und es entsteht:

$$W_m = \tfrac{1}{2}\int\left[A_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau\,,$$

oder

$$W_m = \frac{1}{2V}\int (A_x\,A_x + A_y\,A_y + A_z\,A_z)\, d\tau\,. \tag{37}$$

Seien ferner zwei verschiedene Stromsysteme der A_1 und A_2 gegeben; dann ist in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + R,\ \text{wo}$$

$$\left.\begin{aligned} R &= \int \mu\,(M_{1x}\,M_{2x} + \cdots)\, d\tau \\ &= \frac{1}{V}\int (A_{1x}\,A_{2x} + \cdots)\, d\tau = \frac{1}{V}\int (A_{2x}\,A_{1x} + \cdots)\, d\tau \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Um die physikalische Bedeutung des Ausdrucks (37) deutlicher hervortreten zu lassen, zerlegen wir den Raum τ in Stromfäden mit der Leitcurve s, dem Querschnitt dq und dem Strom di, sodass also

$$d\tau = dq\cdot ds\,,\quad A = A_s\,,\quad di = A\,dq$$

wird, und di constant ist längs s. Dann wird

$$W_m = \frac{1}{2V}\int\int A_s\,A\,dq\,ds = \frac{1}{2V}\int di \oint A_s\,ds\,,$$

oder

$$W_m = \tfrac{1}{2}\int Q\,\frac{di}{V}\,, \tag{37'}$$

wo $Q = \oint A_s\,ds = \int \mu M_N\,dS$ die Induction durch die Curve s bezeichnet, und die Summation über alle Stromfäden zu erstrecken ist.

Ebenso kommt

$$R = \int Q_{12}\,\frac{di_2}{V} = \int Q_{21}\,\frac{di_1}{V}\,, \tag{38'}$$

wo im zweiten Integral Q_{21} die vom Stromsystem der A_2 herrührende Induction durch einen Stromfaden des Systems A_1

bedeutet, und die Integration sich über alle Stromfäden von A_1 erstreckt.

Wir wollen diesen Satz nochmals direct herleiten für zwei lineare Ströme i_1 und i_2 in den Curven s_1 und s_2. Wir legen durch s_1 eine Fläche S_1, nennen N die positive Normale von S_1, und τ_1 den einfach zusammenhängenden Raum, welcher ausser der unendlich fernen Begrenzung noch die beiden Seiten von S_1 zu Grenzen hat. Dann ist nach (6) in τ_1: $M_{1l} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial l}$, wo ψ_1 einwerthig und stetig. Da ferner $\Gamma(\mu M_2) = 0$, so folgt durch partielle Integration über τ_1:

$$R = \int_{\overset{+}{S_1}} \mu M_{2N} \psi_1 \, dS_1 - \int_{\overset{-}{S_1}} \mu M_{2N} \psi_1 \, dS_1 .$$

Nun ist μM_{2N} stetig an S_1, ψ_1 hingegen unstetig, nämlich

nach (6) $$\overset{+}{\psi_1} - \overset{-}{\psi_1} = \frac{i_1}{V} = \text{const.};$$

folglich wird:

$$R = \frac{i_1}{V} \int \mu M_{2N} dS_1 = \frac{i_1}{V} Q_{21} . \tag{38a}$$

Ebenso ergiebt sich auch:

$$R = \frac{i_2}{V} Q_{12}, \text{ oder} \tag{38b}$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{i_1}{V} Q_{21} + \frac{i_2}{V} Q_{12}\right) = i_1 i_2 p_{12}, \tag{38c}$$

wo die Zeichen Q_{21}, Q_{12}, p_{12} die frühere Bedeutung haben.

In einem beliebigen ringartigen Stromgebiet möge der Gesammtstrom i ver-n-facht werden, während die Vertheilung der Stromfäden unverändert bleibt. Dies tritt z. B. ein, wenn die elektromotorische Kraft im Kreise auf das n-fache wächst, während das Leitungsvermögen überall seinen Werth behält. Dann ver-n-facht sich überall die Feldintensität M und es wächst folglich nach (F) die Energie W_m auf den n^2-fachen Werth. Man kann daher schreiben:

$$W_m = \frac{1}{2} p i^2, \tag{39}$$

wo p von i unabhängig ist.

Seien zwei verschiedene ringartige Gebiete gegeben, und für jedes einzelne die Vertheilung der Strömung fest vorgeschrieben, der Gesammtstrom (i_1 resp. i_2) aber zur Verfügung gehalten, dann erhält man ebenso:

$$\left.\begin{aligned} W_{m1} &= \tfrac{1}{2} p_{11} i_1^2 \\ W_{m2} &= \tfrac{1}{2} p_{22} i_2^2 \\ R &= P_{12} i_1 i_2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

wo die Coefficienten p_{11} p_{22} P_{12} bei gegebener Vertheilung der A_1, A_2 von den Integralwerthen i_1, i_2 unabhängig sind. Sind die Stromkreise „linear", so geht P_{12} in das p_{12} der Gleichung (38c) über, d. h. es ist gleich dem wechselseitigen Inductionscoefficienten der beiden Stromcurven, oder der durch V dividirten Anzahl von Kraftlinien, welche ein Strom Eins in der einen Curve durch die andere Curve hindurchsendet. Dieser letztere Ausdruck erhält einen bestimmten Sinn, sobald es für das Resultat gleichgültig ist, wie man die Stromcurve in dem ringförmigen Leiter annimmt.

Wenn man entsprechend als „Selbstinductionscoefficienten" eines ringförmigen Leiters bezeichnen wollte: „die durch V dividirte Anzahl von Kraftlinien, welche ein in ihm fliessender Strom Eins durch seine eigene Curve hindurchsendet", so wäre diese Grösse geometrisch erst ausreichend definirt bei unendlich kleinem Querschnitt des Leiters; dann aber würde die Strömung und somit das Feld innerhalb des Leiters selbst unendlich. So wird denn auch der Werth p_{12} in (15), welcher für $\mu = \text{const.}$ gilt, logarithmisch unendlich, sobald man die Curven s_1 und s_2 zusammenfallen lässt. Der Begriff des „linearen Stromes" versagt hier.

Wir können und wollen aber ganz allgemein wechselseitige (p_{hk}) und Selbstinductionscoefficienten (p_{hh}) von ringartig geschlossenen Gebilden in folgender Weise definiren:

Es sei die Strömung vollständig bestimmt durch die Werthe der n Stromstärken $i_1 \ldots i_n$. Dann kann, wie aus (40) leicht folgt, die Energie in der Form dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} W_m &= \tfrac{1}{2} \sum_h \sum_k p_{hk}\, i_h\, i_k, \qquad p_{hk} = p_{kh} \\ &= \tfrac{1}{2} p_{11}\, i_1{}^2 + p_{12}\, i_1\, i_2 + \ldots + \tfrac{1}{2} p_{nn}\, i_n{}^2 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die Coefficienten in dieser Darstellung sind die Inductionscoefficienten.

In dieser allgemeinen Definition ist dann die frühere Definition für das p_{hk} zweier linearer Stromkreise als Specialfall enthalten. $p_{11}\, i_1\, V = Q_{11}$ aber kann man ansehen als die Anzahl von Kraftlinien, welche die Gesammtheit aller in i_1 vereinigten Stromfäden durch einen gewissen mittleren Stromfaden hindurchsendet.

$$W_m = \tfrac{1}{2} \int \mu M^2\, d\tau$$

ist eine wesentlich positive Grösse. Es folgt daher aus der Gleichung (41): alle symmetrischen Determinanten der p_{hk}, d. h. die Grössen

$$p_{11} \ldots \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \ldots \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \ldots \text{ etc.}$$

sind positiv, oder im Grenzfall Null. (S. z. B. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Band I, § 86.)

Vergleicht man die Gleichungen (38a, b, c) mit den Gleichungen (10) und (11), so ergiebt sich:

$$A = + \delta R; \tag{42}$$

die Arbeit der wechselseitigen Kräfte zwischen zwei linearen Stromkreisen ist gleich der Zunahme, welche ihre wechselseitige Energie bei der Verschiebung erfährt. Auf die Betrachtung der wechselseitigen Kräfte und der wechselseitigen Energie mussten wir uns beschränken, weil aus dem Begriff linearer Ströme sich bestimmte endliche Werthe für die Gesammtkräfte und die Gesammtenergie nicht definiren lassen. Wenn wir aber eine überall endliche Strömung voraussetzen, fällt diese Schwierigkeit fort.

Wir wollen zeigen: wenn ein Körpersystem, in welchem stationäre elektrische Ströme (aber keine permanenten Mag-

nete) vorhanden sind, beliebige virtuelle Verschiebungen erfährt, bei welchen die Strömung in den Körperelementen unverändert bleibt, so ist die von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit gleich der Zunahme der magnetischen Energie.

Einerseits: die Arbeit ist, wenn δx .. die Verschiebung des in $d\tau$ befindlichen Theilchens bezeichnet:

$$\partial A = \int d\tau \left[f_x \cdot \delta x + f_y \cdot \delta y + f_z \cdot \delta z \right], \tag{43}$$

wo nach (20), gemäss unserer Annahme $\varrho = 0$,

$$f_x = -\, {}^1\!/_2\, M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{V}\left(A_y\, \mu M_z - A_z\, \mu M_y\right). \tag{44}$$

Andererseits: die Zunahme dW_m von

$$W_m = {}^1\!/_2 \int \mu M^2 d\tau$$

wird dadurch hervorgerufen, dass in jedem Raumelement $d\tau$ sich bei den Verschiebungen sowohl die Strömung A, wie die Permeabilität μ ändern kann. Da es sich um unendlich kleine Aenderungen handelt, addiren sich die Aenderungen von W_m, welche den beiden Ursachen einzeln entspringen. Wir schreiben

$$dW_m = d_A W_m + d_\mu W_m. \tag{45}$$

Um $d_A W_m$ zu finden, betrachten wir zwei Felder M, W_m und M', W'_m, zu denen dasselbe μ, aber bezw. die Strömung A und A' gehöre. Dann ist:

$$P(M) = \frac{A}{V}, \quad P(M') = \frac{A'}{V}.$$

Setzen wir noch

$$P(A) = \mu M, \quad P(A') = \mu M',$$

so wird nach (37):

$$2\, W_m = \frac{1}{V}\int (A_x\, A_x + \cdot\cdot)\, d\tau$$

$$2 W'_m = \frac{1}{V}\int (A_x' A_x' + \cdots)\, d\tau$$

und nach (38):

$$0 = \frac{1}{V}\int [(A_x A_x' - A_x' A_x) + \cdots]\, d\tau,$$

also

$$2(W'_m - W_m) = \frac{1}{V}\int [(A_x + A_x')(A_x - A_x) + \cdots]\, d\tau. \qquad (46)$$

Für unendlich kleine Unterschiede der A und A' folgt daraus:

$$d_A W_m = \frac{1}{V}\int (A_x\, \partial A_x + A_y\, \partial A_y + A_z\, \partial A_z)\, d\tau. \qquad (46a)$$

Um $d_\mu W_m$ zu finden, betrachten wir zwei Felder M und M_0 (W_m und W_{0m}), zu denen dasselbe A, aber bezw. die Permeabilität μ und μ_0 gehört. Dann ist

$$P(M) = P(M_0) = \frac{A}{V} \quad \text{oder} \quad M_l - M_{0l} = -\frac{\partial \chi}{\partial l},$$

und
$$\Gamma(\mu M) = \Gamma(\mu_0 M_0) = 0,$$

folglich
$$\int [\mu M_x (M_x - M_{0x}) + \cdots]\, d\tau = 0.$$

Also
$$2 W_m = \int (\mu M_x \cdot M_x + \cdots)\, d\tau$$
$$= \int (\mu M_x \cdot M_{0x} + \cdots)\, d\tau.$$

Ebenso:
$$2 W_{0m} = \int (\mu_0 M_{0x} \cdot M_x + \cdots)\, d\tau.$$

Also
$$2(W_m - W_{0m}) = \int (\mu - \mu_0)(M_x \cdot M_{0x} + \cdots)\, d\tau. \qquad (47)$$

Für unendlich kleine Unterschiede der μ und μ_0 folgt daraus:

$$d_\mu W_m = + \tfrac{1}{2}\int \partial\mu \cdot M^2 d\tau. \qquad (47a)$$

In (46a) und (47a) bedeuten $\partial A_x \ldots \partial \mu$ die Aenderungen im Raumelement $d\tau$. Sie sind auszudrücken durch die Verschiebungen δx .. der Körpertheilchen.

Die Veränderung, welche irgend eine Grösse U im festen Raumpunkt erfährt, möge durch ∂U bezeichnet werden; die Veränderung, welche sie in einem festen materiellen Punkt erfährt, durch δU. Dann ist allgemein:

$$\delta U = \partial U + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z\,. \qquad (48)$$

Es sei ferner τ' das Volumen eines beliebigen Körpers, S' seine Oberfläche, N die äussere Normale von dS'; dann erfährt τ' durch die Verschiebungen δx .. die Vergrösserung

$$\delta\tau' = \int [\delta x \cdot \cos(Nx) + \delta y \cdot \cos(Ny) + \delta z \cdot \cos(Nz)]\, dS'$$
$$= \int \left[\frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \delta z}{\partial z}\right] d\tau'\,.$$

Also folgt für das Volumen $d\tau'$ eines unendlich kleinen Körpertheilchens

$$\delta(d\tau') = \left[\frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \delta z}{\partial z}\right] d\tau'\,. \qquad (49)$$

Es sei jetzt $d\tau'$ ein unendlich kleines Stück eines Stromfadens von der Länge ds' und dem Querschnitt q. Bezeichnen dx', dy', dz' die Projectionen von ds', und i den Strom im Faden, so ist

$$i = q A, \quad i\,ds' = A\,d\tau',$$

$$\left.\begin{aligned} i \cdot dx' &= A_x \cdot d\tau' \\ i \cdot dy' &= A_y \cdot d\tau' \\ i \cdot dz' &= A_z \cdot d\tau' \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Unsere Voraussetzung bezüglich der Strömung ist, dass jeder materielle Stromfaden bei der Deformation seinen Strom behält, d. h.

$$\delta i = 0\,.$$

Daher folgt aus (50):

$$i\,\delta(dx') = \delta(A_x \cdot d\tau')\,.$$

Nun ist

$$\delta(dx') = \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial s'} ds' = \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} dx' + \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial y} dy' + \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial z} dz',$$

also

$$\delta(A_x d\tau') = \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} i dx' + \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial y} i dy' + \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial z} i dz',$$

oder nach (50):

$$= \left[A_x \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} + A_y \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial y} + A_z \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial z}\right] d\tau'.$$

Andrerseits ist

$$\delta(A_x d\tau') = \delta A_x \cdot d\tau' + A_x \cdot \delta(d\tau')$$

also nach (48) und (49)

$$= \left[\partial A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z} \delta z\right] d\tau'$$

$$+ A_x \left[\frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \delta z}{\partial z}\right] d\tau'$$

$$= \left[\partial A_x + \frac{\partial}{\partial x}(A_x \delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_x \delta y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x \delta z)\right] d\tau'.$$

Durch Vergleichung der zwei Ausdrücke für $\delta(A_x d\tau')$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \partial A_x = A_x \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial x} + A_y \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial y} + A_z \frac{\partial \cdot \delta x}{\partial z} \\ - \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_x \delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_x \delta y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x \delta z)\right]; \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

entsprechend für ∂A_y und ∂A_z.

Die μ-Werthe haften an den Körperelementen; es ist also

$$\delta\mu = 0,$$

und folglich nach (48)

$$\partial\mu = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mu}{\partial z}\delta z\right). \quad (52)$$

Aus (46a) und (51) folgt durch partielle Integration:

$$d_A W_m = -\frac{1}{V}\int d\tau \Big\{\delta x\Big[\frac{\partial}{\partial x}(A_x A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_x A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x A_z)$$
$$- A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - A_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big]$$
$$+ \delta y[\cdots] + \delta z[\cdots]\Big\}$$

oder, da $\Gamma(A) = 0$,

$$d_A W_m = -\frac{1}{V}\int d\tau \Big\{\delta x\Big[A_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + A_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\Big]$$
$$+ \delta y[\cdots] + \delta z[\cdots]\Big\}$$

oder

$$d_A W_m = \frac{1}{V}\int d\tau \Big[\delta x\,(A_y \cdot \mu M_z - A_z \cdot \mu M_y) + \cdots\Big]. \tag{53}$$

Aus (47a) und (52) folgt:

$$d_\mu W_m = -\frac{1}{2}\int d\tau \Big[\delta x \cdot M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \cdots\Big]. \tag{54}$$

Aus (45) (53) (54):

$$d W_m = \int d\tau \Big[\delta x\Big(-\frac{1}{2} M^2 \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{V}(A_y \cdot \mu M_z - A_z \cdot \mu M_y)\Big) + \cdots\Big]$$

also nach (43) und (44):

$$\delta A = d W_m ,$$

und folglich auch für beliebige endliche Verschiebungen:

$$A = \delta W_m , \tag{55}$$

was zu beweisen war.*)

Es bestehe das Stromgebiet aus einem ringartigen Leiter mit dem Gesammtstrom i. Bei irgend welchen Verschiebungen oder Deformationen des Leiters oder seiner Umgebung leisten dann die elektrodynamischen Kräfte die Arbeit

*) Mit den vorstehenden Entwicklungen vergleiche man diejenigen des Kapitels I, § 11; es entsprechen sich Kapitel IV, (46) (47) und Kapitel I, (49) (50).

$$A = {}^1/_2\, i^2 \cdot \delta p\,, \tag{56}$$

wo p der durch die Gleichung (39) definirte Coefficient ist.

Es werde insbesondere die Aenderung von p hervorgebracht durch Bewegung eines Eisenstückes in der Nachbarschaft des Stromleiters. Wir können das Feld M zerlegen in ein Feld M_0, welches bei gleichem Strom i in Abwesenheit des Eisenkörpers vorhanden wäre, und ein Feld Z, welches sich aus der inducirten Magnetisirung des Eisens herleiten lässt. M_0 ändert sich dann nicht bei der Bewegung. Sind ferner die geometrischen Verhältnisse derart, dass der Leiter gegenüber dem Felde Z als „linear" betrachtet werden darf, so ist

$$i \cdot \delta p = \frac{\delta Q'}{V}\,,$$

wo Q' die Induction des Feldes Z durch die „Stromcurve" bezeichnet, — nach unserer Annahme eine vollkommen bestimmte Grösse. Es wird also

$$A = {}^1/_2\, \frac{i}{V}\, \delta Q'\,. \tag{57}$$

Dieselbe Arbeit haben wir in Kapitel III, Gleichung (42) durch das Feld M_0 und die inducirte Magnetisirung ausgedrückt:

$$A = \delta \left[{}^1/_2 \int (I_x' M_{0x} + I_y' M_{0y} + I_z' M_{0z})\, d\tau \right].$$

Es lässt sich zeigen, dass in der That identisch ist

$$\int (I_x' M_{0x} + I_y' M_{0y} + I_z' M_{0z})\, d\tau = \frac{i}{V}\, Q'\,. \tag{58}$$

Den Gleichungen (56) (57) (58) liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass das Feld ausschliesslich vom Strom i herrührt, d. h. dass $M = 0$ wird für $i = 0$. Diesem Fall stellen wir einen andern, bereits früher behandelten gegenüber: der Träger des Stromes i_1 werde als starrer Körper bewegt in einem Raum, in welchem durchweg $\mu = \mu_0$ ist und neben dem Feld M_1 des Stromes ein „fremdes Feld" M_2 besteht. Dann wird Arbeit ausschliesslich geleistet von den Kräften

des Feldes M_2, und diese Arbeit ist nach (7):

$$A = \frac{i_1}{V}\,\delta Q_{21}\,.$$

Das Feld M_2 kann von einem zweiten Strom herrühren (s. oben S. 243) oder aber von einem im strengen Wortsinn permanenten Magneten, d. h. einem solchen, welcher im Felde M_1 keine inducirte Magnetisirung erhält. Im letztern Fall ist, wenn I_2 die Magnetisirung des Magneten, und S_1 eine willkürliche, von der Stromcurve begrenzte Fläche bezeichnet, nach (8a):

$$Q_{21} = \int (\mu M_{2N} + I_{2N})\, dS_1\,.$$

Wir fanden andrerseits [s. Kap. III, (5a) und (14)]: wird der permanente Magnet I_2 als starrer Körper im Felde M_1 bewegt, und ist durchweg $\mu = \mu_0$, so wird die Arbeit geleistet:

$$A = \delta \left[\int (I_{2x} M_{1x} + I_{2y} M_{1y} + I_{2z} M_{1z})\, d\tau \right].$$

Die Arbeit kann nur von der relativen Verschiebung der beiden Systeme abhängen; und in der That ist allgemein

$$\int (I_{2x} M_{1x} + I_{2y} M_{1y} + I_{2z} M_{1z})\, d\tau = \frac{i_1}{V} \int (\mu M_{2N} + I_{2N})\, dS_1\,, \quad (59)$$

wenn M_1 das Feld von i_1 und M_2 das Feld von I_2 ist. [Die Beweise der Gleichungen (58) und (59) ergeben sich durch partielle Integration unter Benutzung der Eigenschaften der Felder M_0 und Z, bezw. M_1 und M_2; vgl. übrigens Kap. III, (62)].

Die bisherigen Untersuchungen über die Energie sind unabhängig von jeder speciellen Voraussetzung. Es werde nun angenommen: $\mu =$ const. im ganzen Raum; dann ist nach (18) und (19):

$$M_x = \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \text{ etc.,}$$

wo

$$\Pi_x = \frac{1}{V} \int \frac{A_x}{4\pi r}\, d\tau \text{ etc.}$$

Folglich wird die Energie nach (F):

$$W_m = \frac{\mu}{2}\int\left[M_x\left(\frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau.$$

Sowohl $M_x \cdots$ wie $\Pi_x \cdots$ sind stetig im ganzen Raum und verschwinden im unendlichen. Also folgt durch partielle Integration:

$$W_m = \frac{\mu}{2}\int\left[\Pi_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau,$$

oder nach (19) und (H''):

$$W_m = {}^1\!/_2\, \frac{\mu}{4\pi\, V^2}\int\int \frac{A_x A_x' + A_y A_y' + A_z A_z'}{r}\, d\tau \cdot d\tau', \quad (60)$$

wo A die Strömung in $d\tau$, A' diejenige in $d\tau'$ bezeichnet, und bezüglich $d\tau$ wie bezüglich $d\tau'$ über den ganzen Raum zu integriren ist.

Handle es sich um eine endliche Zahl „linearer" Ströme i_h, i_k in den Curven s_h, s_k, dann wird durch die Substitutionen (17) aus (60):

$$W_m = {}^1\!/_2 \sum_h \sum_k p_{hk}\, i_h\, i_k,$$

wo übereinstimmend mit (15)

$$p_{hk} = \frac{\mu}{4\pi\, V^2}\int_{s_h}\int_{s_k} \frac{dx_h \cdot dx_k + dy_h \cdot dy_k + dz_h \cdot dz_k}{r}.$$

Die p_{hh} aber erscheinen in der unzulässigen Form unendlicher Grössen.

Wir wollen die Energie und damit zugleich den Coefficienten p der Gleichung (39) für zwei specielle Fälle berechnen. Zunächst eine allgemeine Bemerkung. Wenn die Strömung, wie wir voraussetzen wollen, in einem ringartigen Gebilde stattfindet, dann können wir auf unendlich viele Arten durch eine den Ring umhüllende Fläche H den Gesammtraum zerlegen in zwei zweifach zusammenhängende Räume: τ_1, welcher die Strömung enthält, und τ_2, in welchem keine Strömung

stattfindet. Die Antheile, welche beide zu W'_m liefern, mögen W'_{m1} und W'_{m2} heissen. Um den letzteren Antheil zu berechnen, machen wir τ_2 einfach zusammenhängend durch einen Querschnitt S_0, welcher die Gestalt einer der Hülle H angehefteten Membran besitzt. In diesem Raum τ_2 ist dann, wenn i den Gesammtstrom bezeichnet:

$$M_l = -\frac{\partial \psi}{\partial l}, \quad \psi \text{ einwerthig,}$$

$$\text{aber an } S_0: \quad \overset{+}{\psi} - \overset{-}{\psi} = \frac{i}{\Gamma};$$

und ferner $$\Gamma(\mu M) = 0.$$

Es wird also (vgl. Fig. 39)

$$W'_{m2} = \tfrac{1}{2}\int \psi \cdot \mu M_n \, dS,$$

Fig. 39.

wo S die gesammte Oberfläche von τ_2 und n deren innere Normale bezeichnet. S wird gebildet von H und den beiden Seiten von S_0. — Die Kraftlinien umzingeln den Raum τ_1; es kann also H stets so gewählt werden, dass die Kraftlinien in der Fläche H verlaufen. Dann liefert H keinen Beitrag zum Integral, und es wird

$$W'_{m2} = \tfrac{1}{2}\int (\overset{+}{\psi} - \overset{-}{\psi})\, \mu M_N \, dS_0 = \tfrac{1}{2}\,\frac{i}{\Gamma}\int \mu M_N \, dS_0, \qquad (61)$$

wo N in der Richtung des positiven Umlaufs um i gezogen ist.

1. Beispiel. Der Strom fliesse in zwei unendlich langen parallelen Drähten vom Radius r im Abstande a, die wir uns beiderseits in unendlicher Entfernung verbunden und so zur

geschlossenen Bahn ergänzt denken. Wir fragen nach der Energie des Raumes, welcher von zwei zu den Drahtaxen normalen Ebenen im Abstande h begrenzt wird. Die Permeabilität der Drähte sei μ_1, diejenige des Aussenraums μ_2. Ist zunächst $\mu_1 = \mu_2$, so genügt allen Bedingungen ein Feld, welches durch Superposition der beiden für die einzelnen Drähte nach (25) gebildeten Felder entsteht. Ist $\mu_1 \neq \mu_2$, so gilt dies nicht allgemein, weil jetzt die Oberfläche der Drähte nicht mehr allgemein von Kraftlinien gebildet wird. Dies trifft aber wieder zu, sobald a sehr gross ist gegen r, was wir voraussetzen wollen. Dann ist das Feld innerhalb jedes Drahtes merklich das gleiche, als ob der andere Draht nicht vorhanden wäre. Wir nehmen für H die Oberfläche der beiden Drähte, und für S_0 den Theil einer durch die Drahtaxen gelegten Ebene, welcher zwischen den Drähten liegt. Dann ist

$$W_{m1} = 2h\int_0^r {}^1/_2\, \mu_1 M^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho, \quad \text{wo } M = \frac{i}{V}\frac{\rho}{2\pi r^2},$$

also

$$W_{m1} = \frac{h}{2}\frac{\mu_1}{4\pi V^2}\, i^2;$$

und nach (61):

$$W_{m2} = 2h\, {}^1/_2\, \frac{i}{V}\int_r^{a-r} \mu_2 M_N \cdot d\rho, \quad \text{wo } M_N = M = \frac{i}{V}\frac{1}{2\pi\rho},$$

also

$$W_{m2} = \frac{h}{2}\frac{\mu_2}{\pi V^2}\, i^2 \lg\frac{a-r}{r},$$

demnach

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{h}{2}\frac{i^2}{4\pi V^2}\left[\mu_1 + \mu_2\, 4 \lg\frac{a-r}{r}\right]. \quad (62)$$

Die physikalische Bedeutung dieses Ausdrucks liegt darin, dass die gesammte Energie des Feldes um W_m wächst, wenn die Paralleldrähte um die Strecke h verlängert werden. Der Factor von h in (62) ist daher die Kraft, mit welcher ein beliebig geformter Bügel, der die Verbindung zwischen den

Drähten herstellt, nach aussen getrieben wird. Da dieser Factor wesentlich positiv ist, so wirkt die Kraft thatsächlich stets nach aussen, — im Sinn einer **Ausweitung** des Stromkreises.

$$\frac{\partial p}{\partial h} = \frac{1}{4\pi V^2}\left[\mu_1 + \mu_2\, 4 \lg \frac{a-r}{r}\right] \tag{63}$$

ist als Selbstinductionscoefficient der Längeneinheit des Drahtsystems zu bezeichnen.

Falls es sich um Kupferdrähte in Luft handelt, ist merklich $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$; dann überwiegt in (62) und (63) der zweite, vom **äusseren** Raum herrührende Term. — Bestehen aber die Drähte aus Eisen, so kann $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ mehrere Hunderte, ja Tausende betragen, und dann überwiegt, selbst bei **sehr** grossen Werthen von $\frac{a}{r}$, der **erste** Term, welcher den Beitrag des Drahtes selbst darstellt.

2. Beispiel. Der Stromträger sei ein Draht vom Radius r, welcher zu einem Kreise vom Radius R gebogen ist. R soll sehr gross sein gegen r; i, μ_1, μ_2 mögen die obige Bedeutung haben. Wir denken eine coaxiale Ringfläche Σ construirt, welche durch Rotation eines mit dem Drahtquerschnitt concentrischen Kreises vom Radius a entsteht. a kann und soll sehr gross gegen r, aber sehr klein gegen R gewählt werden. Wegen der ersten Bedingung ist dann ausserhalb Σ das Feld dasselbe, als wenn der ganze Strom i „linear" in der Drahtaxe flösse. Wegen der zweiten Bedingung ist innerhalb Σ das Feld dasselbe, als wenn der Draht gerade ausgestreckt wäre; dann aber ist es nach (25) ausserhalb des Drahtes ebenfalls dasselbe, als ob der Strom in der Drahtaxe concentrirt wäre. Zusammengefasst: **überall** ausserhalb des Drahtes ist das Feld dasjenige eines in der Axe fliessenden Stromes i. Die Oberfläche des Drahtes ist aus Stromlinien gebildet; wir wählen sie als die Fläche H. Dann ist das Integral $\int \mu M_N\, dS_0$ der Gleichung (61) identisch mit der Grösse $V p_{12}\, i$ der Gleichung (31), sofern man in letzterer $A = R$, $b = r$, $\mu = \mu_2$ setzt; also

$$W_{m2} = {}^1/_2 \frac{i^2}{4\pi V^2} \mu_2 \, 4\pi R \left(\lg \frac{8R}{r} - 2\right).$$

Für die Energie des Drahtinnern aber erhalten wir, wie in der vorigen Aufgabe (an Stelle von $2h$ tritt $2\pi R$):

$$W_{m1} = {}^1/_2 \frac{i^2}{4\pi V^2} \mu_1 \cdot \pi R.$$

Also

$$W_m = {}^1/_2 \, p i^2, \quad \text{wo}$$

$$p = \frac{\pi R}{4\pi V^2} \left[\mu_1 + \mu_2 \, 4\left(\lg \frac{8R}{r} - 2\right)\right]. \tag{64}$$

Befindet sich ausserhalb des Drahtes atmosphärische Luft und führt man durch „$4\pi V = 1$, $4\pi\mu_0 = 1$" das „absolute elektromagnetische Masssystem" ein, so entsteht:

$$\frac{\partial p}{\partial h} = \frac{\mu_1}{\mu_0} + 4 \lg \frac{a-r}{r} \tag{63a}$$

$$p = \pi R \left[\frac{\mu_1}{\mu_0} + 4\left(\lg \frac{8R}{r} - 2\right)\right]. \tag{64a}$$

Wir haben das Feld M linearer Ströme erhalten, indem wir von der Erfahrungsthatsache ausgingen, dass es identisch ist mit dem Feld gewisser magnetischer Doppelschichten; nur den Raum der Doppelschichten selbst mussten wir bei der Vergleichung ausschliessen. Wenn wir aber die „magnetische Induction" B einführten, so war diese für Strom und Doppelschicht durchweg identisch, mit alleinigem Ausschluss der Stromcurve, für welche sie nicht definirbar war.

Wir wollen jetzt den Vergleich mit einem magnetischen System durchführen für eine beliebig im Raum vertheilte stationäre Strömung A. Das Feld M_A einer gegebenen Strömung A ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\Gamma(\mu M_A) = 0, \quad P(M_A) = \frac{A}{V}.$$

Das Feld M_I einer gegebenen Magnetisirung I ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\Gamma(\mu M_I) = -\Gamma(I), \qquad P(M_I) = 0.$$

Führen wir im einen, wie im andern Falle die Induction B ein, welche definirt ist durch:

$$B_l = \mu M_l + I_l, \tag{65}$$

d. h. setzen wir

$$B_{Al} = \mu M_{Al}$$
$$B_{Il} = \mu M_{Il} + I_l.$$

Dann wird:

$$\Gamma(B_A) = 0, \quad P\left(\frac{B_A}{\mu}\right) = \frac{A}{V}$$
$$\Gamma(B_I) = 0, \quad P\left(\frac{B_I}{\mu}\right) = P\left(\frac{I}{\mu}\right).$$

Es wird also B_A identisch mit B_I $(= B)$, wenn überall

$$\frac{A}{V} = P\left(\frac{I}{\mu}\right) \tag{66}$$

ist. Man kann daher auch das Feld permanenter Magnete ansehen als das Feld gewisser im Magneten vorhandener „Molecularströme“ (Ampère). Die Vertheilung dieser „äquivalenten“ Ströme ist in kürzester Form durch (66) gegeben; es fehlt denselben aber eine wesentliche Eigenschaft, welche wir sonst mit dem Begriff „elektrischer Strom“ verknüpfen: sie können unbegrenzt bestehen ohne Energieumsatz.

Wählt man zur Darstellung eines magnetischen Feldes ganz allgemein den Vector B statt des Vectors M, so gewinnt man in einer Hinsicht eine einheitlichere Form; denn für B gilt allgemein, — es mögen nur Magnete oder nur Ströme oder beide gleichzeitig vorhanden sein —:

$$\Gamma(B) = 0, \qquad P\left(\frac{B}{\mu}\right) = \text{gegebenen Grössen,}$$

welche von Null verschieden sind in Magneten und in durchströmten Leitern. In Worten: die B-Linien sind durchweg geschlossene Curven; der Vector $\frac{B}{\mu}$ besitzt kein Potential

innerhalb der Magnete und der durchströmten Leiter, aber wohl ein Potential im Aussenraum.

Aber man verliert dafür die Einheitlichkeit der Form an anderer Stelle: die magnetische Energie ist allgemein

$$W_m = {}^1/_2 \int \mu M^2 \, d\tau \,;$$

die Abnahme dieser Grösse giebt unter allen Umständen den Betrag der in nicht-magnetischer Form auftretenden Energie; das ist eine experimentelle Thatsache (s. Kap. V). Führen wir hier B ein, so wird für das Feld von Strömen:

$$W_m = {}^1/_2 \int \frac{B^2}{\mu} \, d\tau \,.$$

Für das Feld permanenter Magnete können wir nach Kapitel III (F) und (13) schreiben:

$$W_m = -\int (M_x I_x + \cdot\cdot) \, d\tau - {}^1/_2 \int \mu (M_x^2 + \cdot\cdot) \, d\tau \,,$$

und dies ist nach (65):

$$= - {}^1/_2 \int \frac{B^2}{\mu} \, d\tau + {}^1/_2 \int \frac{I^2}{\mu} \, d\tau \,.$$

D. h. es ist

$$W_m = - {}^1/_2 \int \frac{B^2}{\mu} \, d\tau + \text{const.}$$

Also besitzt die Energie zweier Felder, für welche B überall denselben Werth hat, verschiedene Werthe, wenn das eine Feld von Magneten, das andere von Strömen herrührt.

Kapitel V.

Inductionsströme in linearen Leitern.

§ 1. Das Gesetz der inducirten elektromotorischen Kraft.

Wir haben uns im Kapitel II vorzugsweise und im Kapitel IV ausschliesslich mit elektrischen Strömen von besonderer Art beschäftigt. Unsere Voraussetzung war: die Ströme sollen stationär sein, und die Stromträger sollen gegen ihre Umgebung ruhen. Wenn im Kapitel IV von Bewegungen die Rede war, so handelte es sich lediglich um virtuelle Verschiebungen, aus welchen auf mechanische Kräfte geschlossen werden sollte; die Geschwindigkeit solcher Bewegungen können wir unendlich klein denken. — Unter den genannten Voraussetzungen finden in unserm System Energieumsetzungen ausschliesslich statt zwischen Joule'scher Wärme, welche stets abgegeben wird, und andrerseits Peltier'scher Wärme und chemischer Energie, welche sowohl aufgenommen wie abgegeben werden kann. Als Stromquelle erschien somit lediglich die thermische und chemische Energie der galvanischen Elemente. —

Wir wollen jetzt Ströme betrachten, für welche die obigen Voraussetzungen nicht zutreffen. Dabei werden wir neue Stromquellen kennen lernen. Wir gehen aus von der durch Faraday festgestellten Thatsache, dass in einem Leiter ein Strom entsteht, wenn er relativ zu einem Magneten oder zu einem Stromträger bewegt wird. Einen möglichst einfachen

Fall dieser Art wollen wir mit den uns bisher bekannten Fällen vergleichen.

Es handle sich um einen linearen Stromkreis in der Curve s. Das Ohm'sche Gesetz [Kapitel II, Gleichung (3)]

$$A_l = \lambda\,(E_l - K_l)$$

kann für diesen geschrieben werden (vgl. Kap. II, § 3):

$$\frac{i}{q\lambda}\,ds = E_s ds - K_s ds\,,$$

oder nach Integration über den ganzen Stromkreis:

$$i\,w = \int_{\circ} E_s\,ds + \mathcal{E}\,,$$

wenn, wie früher, der Widerstand des Kreises

$$\int \frac{ds}{q\lambda} = w\,,$$

und die innere elektromotorische Kraft

$$-\int K_s\,ds = \mathcal{E}$$

gesetzt wird. Die gesammte, in der Zeiteinheit abgegebene, chemische und thermische Energie ist:

$$\Psi = \int E A \cos(E A)\,d\tau$$

$$= i \int_{\circ} E_s ds = i^2 w - i\mathcal{E}\,.$$

In diesen Gleichungen ist bereits benützt, dass die Stromstärke i längs der ganzen Curve s *denselben* Werth hat, — *was* für *stationäre* Ströme nothwendig der Fall ist.

Für stationäre Strömung und einen gegen die Umgebung *ruhenden* Leiter ist nun

$$\int_{\circ} E_s ds = 0\,;$$

dies ergiebt $\Psi = 0$, wodurch unter den gegebenen Verhältnissen das Energieprincip erfüllt wird. Jetzt möge unser Leiter gegen einen permanenten Magneten bewegt werden, es möge aber nach wie vor der Strom stationär sein. Wir wissen (vgl. Kap. IV, S. 282), dass eine wechselseitige Energie zwischen Strömen und Magneten nicht existirt, die magnetische Energie unseres Systems also durch die Bewegung nicht verändert wird. Wir nehmen, unter Vorbehalt genauerer Prüfung, an, dass das gleiche für seine elektrische Energie gilt. Dann muss also die gesammte im Zeitelement dt von dem System abgegebene Energie Null sein. Es besteht diese aber aus der Grösse Ψdt und der bei der Bewegung geleisteten mechanischen Arbeit. Die letztere ist nach Kapitel IV, Gleichung (7):

$$A = \frac{i}{V} \delta Q = \frac{i}{V} \frac{\partial Q}{\partial t} dt,$$

wo Q die Zahl der vom Magneten durch die Stromcurve gesandten Inductionslinien und V eine universelle Constante bezeichnet. Daraus folgt:

$$i \int_{\bigcirc} E_s ds + \frac{i}{V} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

oder:

$$\int_{\bigcirc} E_s ds = -\frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad (1)$$

und weiter:

$$iw = \mathcal{E} - \frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial t}. \qquad (2)$$

Diese Gleichungen sprechen eine und dieselbe Thatsache in zweierlei Form aus:

1) Das Linienintegral der elektrischen Feldintensität, über die geschlossene Stromcurve erstreckt, ist nicht mehr Null, sondern gleich der durch V dividirten Abnahme der von der Stromcurve umspannten magnetischen Induction per Zeiteinheit.

2) Die Form des Ohm'schen Gesetzes kann aufrecht erhalten werden, wenn man der, durch die Structur des Kreises

fest gegebenen, inneren elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$ noch die Grösse: $-\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}$ hinzufügt. Wegen dieser formalen Analogie bezeichnet man sie ebenfalls als elektromotorische Kraft; nämlich als die „durch die Bewegung inducirte elektromotorische Kraft."

Unsere Ableitung setzte voraus, dass im Leiter bereits, unabhängig von der Bewegung, ein Strom floss, oder dass $\mathcal{E}$ von Null verschieden sei. Unser Resultat aber führt auf eine Grösse $\frac{\partial Q}{\partial t}$, welche von dem Werth von $\mathcal{E}$ unabhängig ist. Die Continuität verlangt, dass es in gleicher Form auch für $\mathcal{E} = 0$ gelte. Dann erhalten wir einen Strom erst durch die Bewegung, und dieser heisst der „durch die Bewegung inducirte Strom." Im allgemeinen Fall entsteht der thatsächliche Strom durch Superposition des von den inneren elektromotorischen Kräften und des von der Induction herrührenden Stromes gemäss den Gleichungen:

$$i_1 w = \mathcal{E}; \quad i_2 w = -\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}; \quad i = i_1 + i_2.$$

Unsere Betrachtungen bezogen sich ferner auf einen ganz speciellen Fall inducirter Ströme. Die Gleichungen, zu welchen wir gelangt sind, haben aber eine viel weiter reichende Bedeutung:

Jedesmal, wenn auf irgend welche Art die magnetische Induction Q durch einen linearen Leiterkreis sich ändert, tritt in diesem Kreise, neben etwaigen inneren elektromotorischen Kräften, eine „inducirte" elektromotorische Kraft $-\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}$ auf. Oder: die Gleichungen (1) und (2) gelten allgemein, wie auch die Aenderung δQ zu Stande gekommen sein mag.

Das magnetische Feld kann herrühren von permanenten Magneten und von elektrischen Strömen. Es kann sich ändern, indem Magnete oder Stromleiter oder Eisenkörper bewegt werden, oder indem die Stromstärken sich ändern. Wir wollen den allgemeinsten Fall in's Auge fassen, wo alle diese Veränderungen vor sich gehen, und untersuchen, ob auch dann durch

den Ansatz (2) dem Energieprincip Genüge geschieht. Der einfacheren Schreibweise wegen nehmen wir an, dass nur zwei Ströme i_1 und i_2 vorhanden sind. Dann gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 i_1 &= \mathcal{E}_1 - \frac{1}{V}\frac{\partial Q_1}{\partial t} \\ w_2 i_2 &= \mathcal{E}_2 - \frac{1}{V}\frac{\partial Q_2}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= q_1 + V i_1 p_{11} + V i_2 p_{12} \\ Q_2 &= q_2 + V i_1 p_{12} + V i_2 p_{22} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hier sollen q_1 und q_2 die von den Magneten herrührenden Beiträge zu Q_1 und Q_2 bezeichnen; p_{11}, p_{12}, p_{22} haben die frühere Bedeutung.

Die magnetische Energie ist nach Kapitel IV, Gleichung (36) und (41):

$$W_m = W^{(m)} + \tfrac{1}{2} i_1^2 p_{11} + i_1 i_2 p_{12} + \tfrac{1}{2} i_2^2 p_{22}, \tag{5}$$

wo $W^{(m)}$ die Energie des für sich allein gedachten Systems der Magnete bezeichnen soll.

Es wirken mechanische Kräfte 1) zwischen den Magneten. Die von diesen bei irgend welchen virtuellen Verschiebungen geleistete Arbeit ist nach Kap. III, S. 197:

$$\partial A^{(m)} = - dW^{(m)}; \tag{6a}$$

2) zwischen permanenten Magneten und Stromträgern. Die Arbeit ist nach Kap. IV (7):

$$\partial A^{(im)} = \frac{i_1}{V} dq_1 + \frac{i_2}{V} dq_2; \tag{6b}$$

3) zwischen den Stromträgern. Ihre Arbeit ist nach Kap. IV (41) und (55):

$$\partial A^{(i)} = \tfrac{1}{2} i_1^2 dp_{11} + i_1 i_2 dp_{12} + \tfrac{1}{2} i_2^2 dp_{22}. \tag{6c}$$

Die gesammte Arbeit ist

$$\partial A = \partial A^{(m)} + \partial A^{(im)} + \partial A^{(i)}. \tag{6d}$$

Die im Zeitelement dt abgegebene chemische und thermische Energie ist:

$$\Psi dt = \left[w_1 i_1{}^2 - \mathcal{E}_1 i_1 + w_2 i_2{}^2 - \mathcal{E}_2 i_2\right] dt,$$

oder nach (3) und (4):

$$\Psi dt = -\left(\frac{i_1}{V} dQ_1 + \frac{i_2}{V} dQ_2\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi dt = -\Big[\frac{i_1}{V} dq_1 + \frac{i_2}{V} dq_2 + i_1\, d\,(i_1 p_{11} + i_2 p_{12})\\ + i_2\, d\,(i_1 p_{12} + i_2 p_{22})\Big]\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Aus (5), (6) und (7) folgt:

$$\partial A + \Psi dt + dW_m = 0. \qquad (8)$$

Es fragt sich, ob diese Gleichung mit dem Energieprincip in Einklang ist. — Um dies zu beurtheilen, müssen wir die Voraussetzungen prüfen, welche implicite in unserer bisherigen Entwicklung enthalten sind.

Wir nahmen ursprünglich an, dass unsere Ströme stationär seien; nur unter dieser Voraussetzung konnten wir behaupten, dass alle Stromlinien in sich zurücklaufen, also jedes i im ganzen Stromkreis den gleichen Werth habe. Wenn nun aber z. B. die Bewegungen so erfolgen, dass Q_1 sich nicht gleichförmig ändert, so wird nach (3) i_1 zeitlich veränderlich. Es kann gleichwohl noch räumlich constant sein, — es ist aber nicht mehr nothwendig constant. Q_1 als die Induction durch die Stromcurve hat aber nur einen Sinn für geschlossene Stromcurven. Unser Ansatz kann nur für diesen Fall gelten, — die Erfahrung zeigt aber, dass er dann auch thatsächlich gilt. Eine Strömung, die zeitlich veränderlich ist, aber gleichwohl in geschlossenen Bahnen verläuft, ähnlich einer stationären Strömung, wollen wir als „quasistationär" bezeichnen. Sie ist mathematisch dadurch charakterisirt, dass zwar $A = f(t)$, aber trotzdem $\Gamma(A) = 0$ ist. Denken wir etwa, dass die inducirenden Bewegungen oder Stromänderungen, kurz die Aenderungen von Q_1 periodisch erfolgen, dann ist die Strömung quasistationär oder nicht, je

nachdem i_1 in allen Punkten der Curve s_1 gleiche Phase hat oder nicht. Unter welchen Bedingungen das eine oder andere eintritt, dafür werden wir erst später Anhaltspunkte gewinnen. Hier setzen wir das erste voraus, und für diese quasistationären Ströme setzen wir weiter voraus: in jedem Moment ist 1) das magnetische Feld und sind 2) die mechanischen Kräfte die gleichen, als wenn die in diesem Moment herrschenden Stromstärken stationär wären. — Unter diesen Voraussetzungen ist in (8) W_m die magnetische Energie, und ∂A die Arbeit, welche von den mechanischen Kräften magnetischen Ursprungs geleistet wird.

Auch das elektrische Feld ist uns bisher nur bekannt, soweit es stationär ist und alle Körper ruhen. Dann ist $\int_O E_l\,dl = 0$ für jede geschlossene Curve, es giebt keine in sich zurücklaufenden elektrischen Kraftlinien, und aus dieser Eigenschaft folgt, dass das Feld durch die Endpunkte der Kraftlinien, die Elektricitätsmengen, eindeutig bestimmt ist. Diese Eigenschaft besteht aber nicht mehr, sobald wir Inductionsströme vor uns haben, d. h. sobald für einen Leiterkreis $\frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0$ ist. Es superponirt sich dann dem System elektrischer Kraftlinien, welche in den Elektricitätsmengen enden, ein zweites System geschlossener elektrischer Kraftlinien (vgl. Kap. VI, § 4). Die Energie des Gesammtfeldes erhalten wir vollständig, indem wir die Energiebeträge addiren, welche den beiden Theilfeldern einzeln entsprechen würden. [Der Satz folgt in genau der gleichen Weise aus den Eigenschaften beider Felder, wie wir in Kap. IV, S. 282 zeigten, dass die magnetische Energie eines Stromfeldes und des Feldes permanenter Magnete sich superponiren.] Das zweite Feld ist um so schwächer, je langsamer die Aenderungen von Q sind. Wir wollen sie so langsam voraussetzen, dass wir die elektrische Energie des zweiten Feldes vernachlässigen, die gesammte elektrische Energie also als durch die Elektricitätsmengen bestimmt ansehen können. Unsere Voraussetzung in diesem Abschnitt ist also 3): die elektrische Energie ist in jedem Moment dieselbe, welche durch die gegenwärtige Elektricitäts-

vertheilung in einem stationären, ruhenden Felde hervorgebracht werden würde. — Nun sollen alle Ströme in geschlossenen Bahnen fliessen, also durchweg $\Gamma(\Lambda) = 0$ sein. Dann aber finden Aenderungen der Elektricitätsvertheilung durch Ströme nirgend statt. Die Elektricitätsvertheilung und damit die elektrische Energie kann sich aber ändern durch die Bewegungen der Elektricität mit ihren ponderablen Trägern. Wir nehmen nun endlich 4) an, dass auch die mechanischen Kräfte elektrischen Ursprungs die gleichen sind, die in dem zur Zeit vorhandenen Felde bestehen würden, wenn dasselbe stationär wäre. Dann ist die Arbeit dieser Kräfte bei irgend welchen Verschiebungen gleich der durch die Verschiebungen hervorgerufenen Abnahme der elektrischen Energie. Es treten also auf Grund des elektrischen Feldes in der Gleichung (8) lediglich zwei Glieder hinzu, welche sich gegenseitig compensiren. Die Gleichung sagt daher aus, dass die Summe aller im Zeitelement auftretenden Energie, — mechanische Arbeit, thermisch-chemische Energie, elektrische und magnetische Energie, — Null ist. Das heisst: die Gesammtheit unserer Annahmen hat zur Folge, dass durch das Inductionsgesetz (2) das Princip von der Erhaltung der Energie befriedigt wird.

§ 2. Specialfälle.

Wir wollen aus dem Gesetz (2) der inducirten Ströme Folgerungen ziehen. Man spricht von „Magnetoinduction“, wenn die Aenderungen von Q durch Bewegung von permanenten Magneten, von „Volta-Induction“, wenn sie durch Bewegung von Stromleitern oder Aenderung von Stromstärken bedingt sind; von „Selbstinduction“, wenn es sich um die Aenderungen desjenigen Antheils von Q_1 handelt, der von dem Strom i_1 selbst herrührt.

Zunächst eine allgemeine Bemerkung: Es enthalte ein Stromkreis (in der Curve s) keine innere elektromotorische Kraft. Dann wird aus (2):

$$iw = -\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

und folglich der inducirte „Integralstrom“

$$\mathfrak{J} = \int_0^\tau i dt = \frac{1}{wV} (Q_0 - Q_\tau) . \tag{9}$$

Dieser Integralstrom ist also vollständig bestimmt durch Anfangs- und Endzustand des Systems; er ist unabhängig von den zeitlichen und räumlichen Verhältnissen der Ueberführung.

Es sei nun für $t = 0$ der Zustand stationär; dann ist $i_0 = 0$. Nach irgend welchen Veränderungen im Felde mögen wieder stationäre Bedingungen hergestellt werden; dann werden nach genügend langer Zeit auch die Ströme wieder stationär. Sei τ so gross gewählt, dass dieser Zustand erreicht ist, dann ist auch $i_\tau = 0$. Unter diesen Bedingungen trägt also die Selbstinduction des betrachteten Stromkreises weder zu Q_0 noch zu Q_τ bei. Der vollständige Integralstrom ist daher ein Mass für die Veränderung, welche die Induction durch s in Folge der Bewegung von anderen Stromleitern und Magneten oder der Aenderung anderer Stromstärken erlitten hat.

Die Erscheinungen der Volta-Induction sind quantitativ bestimmt durch die Werthe der Inductionscoefficienten p_{hk}; diejenigen der Selbstinduction insbesondere durch die Werthe der Selbstinductionscoefficienten p_{kk}. Es ist wesentlich, dass (s. Kap. IV, S. 286) alle Grössen

$$p_{11}, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

positiv oder im Grenzfall Null sind.

A. Ruhende Leiter.

Sei zunächst nur ein starrer, gegen seine Umgebung ruhender Stromkreis vorhanden. Dann ist in (2):

$$\frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial t} = p \frac{\partial i}{\partial t},$$

wo p der Selbstinductionscoefficient; also

$$wi + p\frac{\partial i}{\partial t} = \mathcal{E}. \tag{10}$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn i_0 den Werth von i zur Zeit $t = 0$ bezeichnet,

$$wi - \mathcal{E} = (wi_0 - \mathcal{E})\, e^{-\frac{wt}{p}}; \tag{10a}$$

i strebt also aperiodisch seinem stationären Endwerth $\frac{\mathcal{E}}{w}$ zu. Der Verlauf ist quantitativ bestimmt durch den Werth des Quotienten $\frac{p}{w}$, der seiner Dimension nach eine Zeit ist und als „Zeitconstante" des Stromkreises bezeichnet wird.

Es sei speciell $\mathcal{E} = 0$, dann wird

$$i = i_0\, e^{-\frac{wt}{p}}.$$

Dieser Fall wird realisirt, indem man aus einem Stromkreis plötzlich die Elemente ausschaltet, während der Kreis mit unverändertem Widerstand geschlossen bleibt. Der Strom geht dann erst allmählich gegen 0; in der Zwischenzeit giebt er noch Joule'sche Wärme ab vom Betrage:

$$\int_0^\infty \Psi dt = \int_0^\infty J dt = \int_0^\infty i^2 w\, dt = -\int_0^\infty pi\frac{\partial i}{\partial t} dt = {}^1\!/_2\, pi_0{}^2,$$

d.h. gleich der beim Beginn vorhandenen magnetischen Energie.

Ist andererseits in (10a) $i_0 = 0$, d. h. betrachten wir den Vorgang beim Schliessen eines Stromkreises mit der elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$ und dem Widerstand w, so wird

$$wi - \mathcal{E} = -\mathcal{E} e^{-\frac{wt}{p}}$$

und

$$\int_0^\infty \Psi dt = \int_0^\infty (wi^2 - i\mathcal{E})\, dt = -\int_0^\infty pi\frac{\partial i}{\partial t} dt = -{}^1\!/_2\, pi_1{}^2,$$

wenn $i_1 = \frac{\mathfrak{E}}{w}$ den stationären Endwerth von i bezeichnet, der strenge nach unendlicher Zeit, bis auf unmerkliche Bruchtheile aber nach sehr kurzer Zeit erreicht wird. Um die magnetische Energie des stationären Stromes $^1/_2\, p i_1{}^2$ also übertrifft die aus den Elementen aufgenommene die als Joule'sche Wärme abgegebene Energie. — Während des stationären Zustandes sind beide Grössen einander gleich; beim Verschwinden des Stromes wird die aufgespeicherte magnetische Energie wieder in Wärme umgesetzt.

Der Vorgang ist genau analog dem rein mechanischen Process bei der Bewegung eines Körpers unter der gleichzeitigen Einwirkung einer constanten Kraft und eines der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes, — etwa eines Steines, der in einer zähen Flüssigkeit fällt: der magnetischen Energie dort entspricht die kinetische Energie hier, der Joule'schen Wärme dort die Reibungswärme hier, der von den Elementen gelieferten Energie dort die Arbeit der Schwerkraft hier. Die soeben verglichenen Grössen sind thatsächlich Grössen gleicher Art: sie sind sämmtlich Energiegrössen. Sie sind enthalten in der Gleichung, welche aus (10) durch Multiplication mit $i dt$ entsteht. Ueber die Dimensionen der einzelnen Glieder der Gleichung (10) selbst können wir nichts aussagen. Es liegt aber die Versuchung nahe, den Vergleich auch auf diese auszudehnen. Alle Grössen erhalten ihr bestimmtes Analogon, sobald wir es für eine festsetzen, etwa für i. Wäre i eine Geschwindigkeit, so würde $\frac{\partial i}{\partial t}$ eine Beschleunigung, p eine Masse, $\mathfrak{E}$ eine Kraft, w ein Widerstandscoefficient sein. (Wäre i eine Winkelgeschwindigkeit, so wäre p ein Trägheitsmoment, $\mathfrak{E}$ ein Drehungsmoment.) Der Coefficient p nun hängt, wie wir sahen, ganz wesentlich von der Form des Leiters und von seiner Umgebung ab; er kann z. B. einen sehr grossen Werth haben, wenn der stromführende Draht um einen geschlossenen Eisenring gewunden ist; er wird bereits sehr wesentlich verkleinert, wenn der Eisenring eine schmale Fuge erhält; er sinkt auf etwa $\frac{1}{1000}$, wenn der Eisenring ganz entfernt wird, und auf noch viel kleinere Werthe, wenn die Drahtspirale zu einer ebenen etwa

kreisförmigen Schleife ausgebreitet wird. p ist ein Mass für die Energie des magnetischen Feldes, welches ein Strom von gegebener Stärke erzeugt. Unsere Darstellung vertheilt diese Energie in bestimmter Weise auf die Theile des Raumes; sie leitet uns darauf hin, die Bewegungserscheinungen, welche wir geneigt sind, den beobachteten Energiewerthen unterzulegen, dort zu suchen, wo μM^2 hohe Werthe hat, nicht etwa dort, wo die elektrische Strömung stark ist. Ueber die Art dieser Bewegung, ja über ihre Existenz, geben bisher Versuche keine Auskunft. —

Es mögen nun zwei starre ruhende Stromkreise gegeben sein. Die Gleichungen (3) nehmen dann die Form an:

$$\left.\begin{aligned} i_1 w_1 + p_{11}\frac{\partial i_1}{\partial t} + p_{12}\frac{\partial i_2}{\partial t} &= \mathcal{E}_1 \\ i_2 w_2 + p_{12}\frac{\partial i_1}{\partial t} + p_{22}\frac{\partial i_2}{\partial t} &= \mathcal{E}_2 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Lösungen derselben sind:

$$i_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{w_1} = a_1 e^{\alpha t}; \quad i_2 - \frac{\mathcal{E}_2}{w_2} = a_2 e^{\alpha t},$$

wenn α, a_1, a_2 den Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} (w_1 + p_{11}\alpha) a_1 + p_{12}\alpha \cdot a_2 &= 0 \\ p_{12}\alpha \cdot a_1 + (w_2 + p_{22}\alpha) a_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Aus (12) folgt

$$\left.\begin{aligned} &A\alpha^2 + B\alpha + C = 0, \\ \text{wo } &A = p_{11}p_{22} - p_{12}^2, \quad B = w_2 p_{11} + w_1 p_{22}, \quad C = w_1 w_2 . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

A, B, C sind positiv, und auch

$$B^2 - 4AC = (w_2 p_{11} - w_1 p_{22})^2 + 4 w_1 w_2 p_{12}^2$$

ist positiv. Also erhält man für α zwei reelle negative Werthe $-\beta$ und $-\gamma$, und somit

$$\left.\begin{aligned} i_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{w_1} &= b_1 e^{-\beta t} + c_1 e^{-\gamma t} \\ i_2 - \frac{\mathcal{E}_2}{w_2} &= b_2 e^{-\beta t} + c_2 e^{-\gamma t}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

i_1 und i_2 nähern sich also ihren stationären Endwerthen $\frac{\mathcal{E}_1}{w_1}$ resp. $\frac{\mathcal{E}_2}{w_2}$ entweder aperiodisch, oder nachdem sie zuvor ein Maximum oder Minimum erreicht hatten. [Im Fall von n Leitern stellen sich die Grössen $i_k - \frac{\mathcal{E}_k}{w_k}$ als Summe von n Exponentialfunctionen dar. Aus den Eigenschaften der Coefficienten p_{hk} (S. 286) folgt, dass die Exponenten auch in diesem allgemeinen Fall reell und negativ sind. Für den Beweis vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. Bd. I, § 94.] Die Coefficienten b und c haben den Gleichungen (12) für die a mit den Werthen $\alpha = -\beta$, bezw. $\alpha = -\gamma$ zu genügen, und sind durch diese Gleichungen und zwei Anfangsbedingungen bestimmt.

Es sei speciell $\mathcal{E}_2 = 0$; man bezeichnet dann i_1 als den „primären", i_2 als den „secundären" Strom, und eine Anordnung, bei welcher i_1 abwechselnd geschlossen und geöffnet wird, als „Inductionsapparat."

Wird der primäre Strom geschlossen zur Zeit $t = 0$, so ist $i_{20} = 0$, und folglich nach (14):

$$i_2 = b_2\,(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}).$$

Der secundäre Strom steigt also zu einem Maximum an, um dann wieder zu Null abzufallen. Der Integralstrom ist

$$\mathfrak{J}_2 = \int_0^\infty i_2\,dt = b_2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Andrerseits ist aber nach (9):

$$\mathfrak{J}_2 = -\frac{p_{12}\,i_{1\infty}}{w_2} = -\frac{p_{12}\,\mathcal{E}_1}{w_2\,w_1}. \qquad (15)$$

Hierdurch ist b_2 bestimmt.

Wird der primäre Strom plötzlich geöffnet, so geht i_1 vom Werthe $\frac{\mathcal{E}_1}{w_1}$ auf Null herab. Der Integralwerth des secundären Stromes ist also numerisch wiederum durch (15) gegeben. Der zeitliche Verlauf aber entzieht sich der Be-

rechnung; denn der Widerstand des primären Kreises wächst — in Folge des Oeffnungsfunkens — sehr schnell, aber in unbekannter Weise von w_1 bis unendlich. Um einen Anhalt dafür zu bekommen, wie sich die Verhältnisse bei verschwindender Dauer des Oeffnungsfunkens gestalten, wollen wir annehmen, der Widerstand r des primären Kreises ändere sich derart, dass i_1 gemäss einer Exponentialfunction zu Null abfällt. Das heisst wir wollen ansetzen:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}_1}{w_1} e^{-kt} \\ i_2 w_2 + p_{22}\frac{\partial i_2}{\partial t} &+ p_{12}\frac{\partial i_1}{\partial t} = 0 \\ \text{für } t = 0: \quad & i_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

Aus diesem Ansatz folgt:

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{w_1}\frac{p_{12}}{p_{22}}\frac{k}{k-l}\left(e^{-lt} - e^{-kt}\right), \qquad \text{wo } l = \frac{w_2}{p_{22}}$$

die reciproke Zeitconstante des secundären Kreises bedeutet. [Der implicite vorausgesetzte Werth von $r = f(t)$ ergiebt sich dann a posteriori aus der ersten der Gleichungen (11); r erhält aber für $t = 0$ den vorgeschriebenen Werth w_1 nur dann, wenn $p_{11} p_{22} = p_{12}^2$ ist. Diese Bedingung muss also erfüllt sein, damit unser Ansatz zulässig sei; wie sie erfüllt werden kann, s. S. 319.]

i_2 erreicht ein Maximum für

$$t = \tau = \frac{\lg \frac{k}{l}}{k-l}.$$

Es möge nun k sehr gross sein gegen l; dann wird $l\tau$ klein, $k\tau$ gross, und in erster Näherung:

$$\mathfrak{J}_2(\tau) = \int_0^\tau i_2\,dt = \frac{\mathcal{E}_1}{w_1}\frac{p_{12}}{p_{22}}\,\tau; \qquad \int_0^\tau i_2{}^2\,dt = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{w_1}\frac{p_{12}}{p_{22}}\right)^2 \tau;$$

hingegen

$$\mathfrak{J}_2 = \int_0^\infty i_2\,dt = \frac{\mathcal{E}_1}{w_1}\frac{p_{12}}{p_{22}}\,\frac{1}{l}; \qquad \int_0^\infty i_2{}^2\,dt = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{w_1}\frac{p_{12}}{p_{22}}\right)^2 \frac{1}{2l}.$$

Es entfällt also auf das Zeitintervall von 0 bis τ nur ein verschwindender Bruchtheil sowohl des Integralstromes $\mathfrak{J}_2$ wie der Joule'schen Wärme. Man kann in beiden Beziehungen ohne merklichen Fehler annehmen, der secundäre Strom setze sogleich mit seinem Maximalwerth ein. Dieser Maximalwerth ist

$$i_2(\tau) = \frac{\mathcal{E}_1}{w_1} \frac{p_{12}}{p_{22}}. \tag{16}$$

Demselben entspricht eine elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E}_1 \frac{p_{12}}{p_{22}} \frac{w_2}{w_1};$$

sie kann gegenüber $\mathcal{E}_1$ beliebig gross sein. —

Wir kehren zu dem Fall eines einzigen Leiters zurück, wollen nun aber statt der constanten inneren elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$ eine gegebene periodisch veränderliche Grösse

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \nu t$$

annehmen. Diese elektromotorische Kraft können wir uns durch periodische Bewegungen eines Magneten gegenüber unserm Leiter hervorgerufen denken. $\frac{2\pi}{\nu}$ ist die volle Periode, $\frac{\nu}{\pi}$ die sogenannte Wechselzahl. Die Gleichung (2) nimmt die Form an:

$$wi + p \frac{\partial i}{\partial t} = \mathcal{E}_0 \sin \nu t. \tag{17}$$

Das vollständige Integral von (17) ist:

$$i = A e^{-\frac{wt}{p}} + i_0 \sin(\nu t - \varphi), \quad \text{wo}$$

$$\left.\begin{aligned} i_0 \sqrt{w^2 + (\nu p)^2} &= \mathcal{E}_0 \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\nu p}{w}. \end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

Nach genügend langer Zeit wird

$$i = i_0 \sin(\nu t - \varphi). \tag{18b}$$

Vergleicht man (18a,b) mit der Gleichung

$$wi = \mathcal{E},$$

welche für ein stationäres $\mathcal{E}$ gelten würde, so zeigen sich die folgenden Unterschiede: es hat scheinbar eine Widerstandsvermehrung stattgefunden, und es ist die Phase von i gegen diejenige von $\mathcal{E}$ verzögert. $\sqrt{w^2 + (\nu p)^2}$ wird häufig als „scheinbarer Widerstand" oder „Impedanz", w als „Ohm'scher", νp als „inductiver" Widerstand bezeichnet. Für enggewundene Spiralen mit Eisenkern verschwindet schon bei mässig grosser Wechselzahl w gegen νp. Dann convergirt φ gegen $\frac{\pi}{2}$. — Die während einer beliebigen Zahl voller Perioden, in der Zeit t, als Joule'sche Wärme consumirte Energie ist

$$\int_0^t i^2 w\, dt = \frac{t}{2} i_0{}^2 w = \frac{t}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \cos\varphi.$$

Man erhält bei gegebenem $\mathcal{E}_0$ dieselbe Stromamplitude i_0 jedesmal, wenn der scheinbare Widerstand der gleiche ist; der Energieverbrauch aber kann dabei unter jede Grenze herabgedrückt werden, indem man den inductiven Widerstand gegenüber dem Ohm'schen vergrössert. Diese Thatsache ist wichtig für die Technik.

Hätte statt der Gleichung (17) die folgende vorgelegen:

$$wi + p\frac{\partial i}{\partial t} = \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{\iota\nu t} \quad (\iota = \sqrt{-1}), \tag{17'}$$

so hätte man angesetzt:

$$i = c \cdot e^{\iota\nu t}$$

und erhalten:

$$i(w + \iota\nu p) = \mathcal{E}_0 e^{\iota\nu t}; \tag{17''}$$

daraus:

$$i = i_0 e^{\iota(\nu t - \varphi)}, \tag{18'b}$$

wo i_0 und φ wieder die Werthe in (18a) bedeuten. Wir hätten also in (17) $\sin\nu t$ durch die Grösse $e^{\iota\nu t}$, deren imaginärer

Theil $\sin \nu t$ ist, ersetzen, und dann in der Lösung den imaginären Theil wieder aussondern können. Das gleiche Verfahren ist stets anwendbar, sobald die Unbekannten und ihre Differentialquotienten lediglich linear und mit reellen Coefficienten in den Gleichungen auftreten. —

Es seien jetzt zwei Stromkreise gegeben, und in dem ersten, dem „primären", eine periodische elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E}_0 \sin \nu t .$$

Wir setzen an

$$\left.\begin{aligned} w_1 i_1 + p_{11} \frac{\partial i_1}{\partial t} + p_{12} \frac{\partial i_2}{\partial t} &= \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{\iota \nu t} \\ w_2 i_2 + p_{12} \frac{\partial i_1}{\partial t} + p_{22} \frac{\partial i_2}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und als Lösungen:

$$i_1 = c_1 e^{\iota \nu t}; \qquad i_2 = c_2 e^{\iota \nu t}.$$

Setzt man dies in (19) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} (w_1 + \iota \nu p_{11}) i_1 + \iota \nu p_{12} \cdot i_2 &= \mathcal{E}_0 e^{\iota \nu t} \\ \iota \nu p_{12} \cdot i_1 + (w_2 + \iota \nu p_{22}) i_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

Daraus zunächst

$$\left.\begin{aligned} & i_1 (W + \iota \nu P) = \mathcal{E}_0 e^{\iota \nu t}, \\ \text{wo} \qquad & W = w_1 + w_2 f^2 \qquad f^2 = \frac{(\nu p_{12})^2}{w_2^2 + (\nu p_{22})^2} \\ & P = p_{11} - p_{22} f^2 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Vergleicht man (20) mit (17″), so folgt: die Hinzufügung des zweiten, „secundären" Stromkreises hat für den primären eine scheinbare Vermehrung des Widerstandes, von w_1 auf W, und eine scheinbare Verminderung des Selbstinductionscoefficienten, von p_{11} auf P, zur Folge gehabt.

Es wird weiter

$$\left.\begin{aligned} & i_1 \sqrt{W^2 + (\nu P)^2} = \mathcal{E}_0 e^{\iota (\nu t - \varphi_1)}, \quad \text{wo } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\nu P}{W} \\ & i_2 = f \cdot i_1 e^{-\iota \delta}, \quad \text{wo } \operatorname{tg} \delta = -\frac{w_2}{\nu p_{22}}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Dies bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= A_1 \sin(\nu t - \varphi_1) \\ i_2 &= f \cdot A_1 \sin(\nu t - \varphi_1 - \delta) \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

wo

$$A_1{}^2 = \frac{\mathcal{E}_0{}^2}{W^2 + (\nu P)^2}$$

ist, und W, P, f, φ_1, δ die angegebenen Werthe haben.

In der hier betrachteten Anordnung, welche ein „Transformator“ heisst, wird dem primären Stromkreise Energie in der Form mechanischer Arbeit zugeführt; sie erzeugt zunächst in diesem eine inducirte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ (vgl. §§ 1 und 3). Die Absicht ist, die zugeführte Energie möglichst vollständig im secundären Kreise zu verbrauchen in einem Strom von veränderter, grösserer oder kleinerer, elektromotorischer Kraft.

Die dem primären Stromkreis zugeführte Energie ist $\int \mathcal{E} i_1 \, dt$. Sie wird zum Theil in magnetische Energie verwandelt, zum Theil in Joule'sche Wärme im primären und secundären Stromkreise. Die magnetische Energie ist aber eine periodische Function der Zeit, und das Resultat für genügend lange Zeit ist daher lediglich: Erzeugung Joule'scher Wärme. In Zeichen: man multiplicire die erste der Stromgleichungen (19) mit $i_1 \, dt$, die zweite mit $i_2 \, dt$, addire, integrire über eine volle Zahl von Perioden, und beachte, dass dann

$$\int i_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} \, dt, \quad \int i_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} \, dt, \quad \int \left(i_1 \frac{\partial i_2}{\partial t} + i_2 \frac{\partial i_1}{\partial t} \right) dt$$

gleich Null werden. Dann kommt:

$$\int \mathcal{E} i_1 \, dt = \int w_1 i_1{}^2 \, dt + \int w_2 i_2{}^2 \, dt = \int (J_1 + J_2) \, dt. \qquad (23)$$

Ist der secundäre Stromkreis geöffnet, also $w_2 = \infty$, so wird $f = 0$, $W = w_1$, $P = p_{11}$; es liegt der Fall der vorigen Aufgabe vor. Ist dann weiter die Frequenz so gross, dass $\frac{w_1}{\nu p_{11}}$ verschwindend klein ist, so wird nur ein verschwindend

kleiner Energiebetrag consumirt. Wird hingegen der secundäre Kreis geschlossen, so nimmt mit abnehmendem w_2 die Phasenverschiebung φ_1 ab und der Energieverbrauch zu.

Die Verhältnisse werden besonders übersichtlich unter gewissen speciellen Voraussetzungen: a) Es enthalte der primäre Kreis N_1, der secundäre N_2 Windungen, welche je gleichmässig über den Umfang desselben Ringkörpers von der mittleren Länge l, dem Querschnitt S und der Permeabilität μ vertheilt sind. Dann ist [vgl. Kap. IV, (22)] das Feld des Stromes i_1 innerhalb des Ringes:

$$M_1 = \frac{i_1}{V} \frac{N_1}{l},$$

die Induction dieses Feldes durch die N_1 Windungen des Stromes i_1:

$$Q_{11} = N_1 \cdot \mu M_1 \cdot S,$$

und der Selbstinductionscoefficient:

$$p_{11} = \frac{Q_{11}}{i_1 V}.$$

Daraus und aus den entsprechenden Werthen von M_2, Q_{12}, Q_{22} folgt:

$$\frac{p_{11}}{N_1^{\,2}} = \frac{p_{12}}{N_1 N_2} = \frac{p_{22}}{N_2^{\,2}} = \frac{S\mu}{l V^2}.$$

Die sämmtlichen Kraftlinien eines jeden der beiden Ströme durchsetzen die sämmtlichen Windungen beider Stromcurven. Dasselbe Resultat wird mit grosser Annäherung auch erreicht, wenn die Windungen beliebig auf einem geschlossenen Eisenring von grossem μ vertheilt sind [vgl. Kap. IV, S. 263f.]. Es folgt

$$p_{12}^{\,2} = p_{11} p_{22}. \tag{24}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung wird die Auflösung von (19a):

$$\Delta \cdot i_1 = \mathcal{E}\,(w_2 + \iota \nu p_{22})$$
$$\Delta \cdot i_2 = -\,\mathcal{E} \cdot \iota \nu p_{12}$$

wo $\Delta = w_1 w_2 + \iota \nu\,(p_{11} w_2 + p_{22} w_1)$.

Es sei nun b) die Frequenz so gross, dass $\frac{w_1}{\nu p_{11}}$ und $\frac{w_2}{\nu p_{22}}$ kleine Zahlen sind, dann wird:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \mathcal{E}\frac{p_{22}}{p_{11}w_2+p_{22}w_1} \\ i_2 &= -\mathcal{E}\frac{p_{12}}{p_{11}w_2+p_{22}w_1} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Dies giebt:

$$\frac{1}{t}\int \mathcal{E}\, i_1\, dt = {}^1\!/_2\, \mathcal{E}_0{}^2 \frac{p_{22}}{p_{11}w_2+p_{22}w_1}$$

$$\frac{1}{t}\int J_1 dt = {}^1\!/_2\, \mathcal{E}_0{}^2 \frac{w_1 p_{22}{}^2}{(p_{11}w_2+p_{22}w_1)^2}$$

$$\frac{1}{t}\int J_2 dt = {}^1\!/_2\, \mathcal{E}_0{}^2 \frac{w_2 p_{11} p_{22}}{(p_{11}w_2+p_{22}w_1)^2}$$

welche Werthe die Gleichung (23) befriedigen.

Es folgt aus ihnen:

$$\frac{\int J_1 dt}{\int J_2 dt} = \frac{w_1 p_{22}}{w_2 p_{11}};$$

man kann also einen beliebig grossen Bruchtheil der gesammten verbrauchten Energie dem secundären Leiter zuführen, wenn man w_2 genügend gross gegen w_1 macht. Sobald $\int J_1 dt$ verschwindet gegen $\int J_2 dt$, wird zugleich nach (25):

$$i_2 = -\frac{\mathcal{E}\, p_{12}}{w_2\, p_{11}}.$$

Diesen Strom würde direct in dem (inductionsfrei gedachten) secundären Leiter eine elektromotorische Kraft vom absoluten Betrage $\mathcal{E}\frac{p_{12}}{p_{11}} = \mathcal{E}\frac{N_2}{N_1}$ hervorrufen.

In erster Näherung also verbraucht unter unseren Voraussetzungen die Vorrichtung selbst keine Energie; sie „transformirt" sie aber in der gleichen Weise, wie wenn die gegebene elektromotorische Kraft im Verhältniss der Windungszahlen verändert würde.

Wir behandeln jetzt ein System verzweigter linearer Leiter. Gemäss unserer Voraussetzung, dass die Ströme „quasistationär“ seien, gilt, wie für stationäre Ströme [vgl. Kap. II (14)], die erste Kirchhoff'sche Regel:

$$\text{für jeden Verzweigungspunkt: } \Sigma i = 0. \tag{a}$$

Die zweite Regel:

$$\text{für jeden vollständigen Umlauf: } \Sigma w_k i_k = \Sigma \mathcal{E}_k \tag{b}$$

lässt sich im allgemeinen in dieser Form nicht verwerthen. Denn unter den $\mathcal{E}$ wären jetzt auch die inducirten elektromotorischen Kräfte einzubegreifen. Diese aber drücken sich aus durch Stromstärken und Inductionscoefficienten geschlossener Ströme; — sie sind nicht ausdrückbar durch die i_k der einzelnen Zweige. Aber in Folge von (a) kann, wie in Kapitel II (15), das Stromsystem zerlegt werden in ein System von Strömen $i^{(1)}$, $i^{(2)}$.., welche in vollständigen Umgängen 1, 2.. verlaufen. Man erhält für diese:

$$\left.\begin{aligned} i^{(1)} w^{(1)} + i^{(2)} w^{1,2} + i^{(3)} w^{1,3} + \cdots &= \mathcal{E}^{(1)} - \frac{1}{V}\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial t} \\ i^{(2)} w^{(2)} + i^{(1)} w^{2,1} + i^{(3)} w^{2,3} + \cdots &= \mathcal{E}^{(2)} - \frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{etc.,} \\ \text{wo} \quad \frac{Q^{(1)}}{V} = p^{1,1} i^{(1)} + p^{1,2} i^{(2)} &+ p^{1,3} i^{(3)} + \cdots \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die $i^{(k)}, w^{(k)}, w^{h,k}$ haben die gleiche Bedeutung wie in Kap. II (15). $\mathcal{E}^{(k)}$ bezeichnet, wenn alle Körper ruhen, die innere elektromotorische Kraft des k^{ten} Umgangs. Wenn Bewegungen von Magneten gegen das System stattfinden, so ist in $\mathcal{E}^{(k)}$ auch die durch diese Bewegungen inducirte elektromotorische Kraft enthalten. Das System (26) giebt soviel lineare Differentialgleichungen, wie Unbekannte $i^{(k)}$ vorhanden sind.*)

Praktisch gestaltet sich der Ansatz in der Regel einfacher: Es mögen einzelne Zweige enggewundene, — etwa noch mit Eisen gefüllte, — Spiralen enthalten, der Rest der

*) s. Helmholtz, Wissensch. Abhandlungen. Band I, S. 435.

Leitung aber aus gestreckten Drähten bestehen. Dann ist die Induction $Q^{(1)}$ durch irgend eine geschlossene Curve $s^{(1)}$ wesentlich bestimmt durch die Stromstärken i_k in den Spiralen und deren Form und Lage gegenüber $s^{(1)}$; nicht wesentlich aber sind die Formen der äusseren Leitungen, welche die Spiralen zu geschlossenen Kreisen ergänzen, und die Stromstärken in diesen Leitungen. Andererseits setzt sich dieses $Q^{(1)}$ wesentlich zusammen aus den Werthen der Induction für die in $s^{(1)}$ enthaltenen Spiralen; es wird nur unwesentlich beeinflusst durch die Form des Restes von $s^{(1)}$. Demnach erscheinen in (26) die Grössen $Q^{(1)}$ etc. in der Form

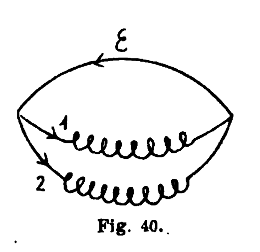


Fig. 40.

$$Q^{(1)} = \sum_{s^{(1)}} Q_k ,$$

$$\frac{Q_k}{V} = p_{1k}\, i_1 + p_{2k}\, i_2 + \cdots$$

wo die i_1 .. die Stromstärken aller einzelnen Zweige bedeuten, und die p_{1k} .. die Inductionscoefficienten derselben bezüglich der Spirale des Zweiges k, welche man sich in willkürlicher Weise geschlossen denken kann. Zerlegt man in entsprechender Weise die $\mathcal{E}^{(1)}$ .., und führt die i_k auch auf der linken Seite von (26) ein, so erhält man wieder den Ansatz in der Kirchhoff'schen Form:

$$\Sigma w_k i_k = \Sigma \left(\mathcal{E}_k - \frac{1}{V} \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right) \text{ für jeden Umlauf,} \qquad \text{(b)}$$

mit dem Zusatz

$$\Sigma i = 0 \text{ für jeden Verzweigungspunkt.} \qquad \text{(a)}$$

Als Beispiel mag die einfache Stromverzweigung Fig. 40 behandelt werden. Es kommt

$$w_1 i_1 - w_2 i_2 = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{\partial Q_2}{\partial t} \right),$$

$$\frac{Q_1}{V} = p_{11} i_1 + p_{12} i_2, \quad \frac{Q_2}{V} = p_{12} i_1 + p_{22} i_2,$$

wo als positive Richtungen der Strombahnen s_1, s_2 die durch die Pfeile bezeichneten zu gelten haben. Also

$$w_1 i_1 + (p_{11} - p_{12}) \frac{\partial i_1}{\partial t} = w_2 i_2 + (p_{22} - p_{12}) \frac{\partial i_2}{\partial t}.$$

Die Ströme stehen also nicht, wie bei stationärem Verlauf, im reciproken Verhältniss der Widerstände. Seien etwa die Spiralen so gelagert, dass p_{12} verschwindet gegenüber p_{11} und p_{22}, und sei die elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ und somit auch die Strömung periodisch mit der Wechselzahl $\frac{\nu}{\pi}$. Dann wird ($i_1 = c_1 e^{\iota\nu t}$ etc. gesetzt)

$$(w_1 + \iota\nu p_{11}) i_1 = (w_2 + \iota\nu p_{22}) i_2,$$

also das Verhältniss der maximalen Stromstärken

$$= \text{Mod}\left(\frac{i_1}{i_2}\right) = \frac{\sqrt{w_2^{\,2} + (\nu p_{22})^2}}{\sqrt{w_1^{\,2} + (\nu p_{11})^2}}.$$

Es steigt, wenn etwa p_{11}/w_1 klein ist gegen p_{22}/w_2, mit steigender Wechselzahl. Für hinreichend grosses ν wird es unabhängig von den Ohm'schen Widerständen, nämlich $= \frac{p_{22}}{p_{11}}$.

B. Induction durch Bewegung.

Im folgenden behandeln wir Fälle, in denen durch Bewegungen Ströme inducirt werden. Wir bezeichnen allgemein durch

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{27}$$

die inducirte elektromotorische Kraft. Die Gleichung (2) nimmt dann die Form an:

$$iw = \mathcal{E} + \mathcal{E}', \tag{28}$$

aus welcher sich ergiebt:

$$-\int \mathcal{E}' i\, dt = \int (\mathcal{E} i - i^2 w)\, dt.$$

Es ist also, wenn nur dieser eine Stromkreis vorhanden ist, $-\int \mathcal{E}' i\, dt$ der Ueberschuss der aus den galvanischen Elementen aufgenommenen über die als Joule'sche Wärme abgegebene Energie. In diesem Betrage also muss Energie in anderer Form auftreten. Dass dies stets zutrifft, wurde in § 1 gezeigt. Wir wenden die Gleichungen auf zwei besondere Fälle an:

1) es werde dem Stromkreis s aus unendlicher Entfernung ein permanenter Magnet genähert. Es heisse Q_0 der Antheil der Induction durch s, welcher vom Strome selbst, q derjenige, welcher vom Magneten herrührt, so dass

$$Q = Q_0 + q, \quad Q_0 = \text{const.}$$

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, die Bewegung erfolge so langsam, dass i in jedem Augenblick nur unmerklich von dem stationären Werth $\frac{\mathcal{E}}{w}$ abweicht, welchen es vor und nach der Bewegung besitzt. Dann ist die geleistete Arbeit nach Kapitel IV, Gleichung (7):

$$A = \frac{i}{V}\, \delta q = \frac{i}{V} (Q_1 - Q_0),$$

wo Q_1 den Endwerth von Q bezeichnet. Andererseits ist auch

$$-\int \mathcal{E}' i\, dt = \frac{i}{V} (Q_1 - Q_0).$$

Hierdurch wird dem Energieprincip genügt, da die magnetische Energie des Systems durch die Annäherung des Magneten an den Stromkreis nicht geändert wird. [Kapitel IV, Gleichung (36).]

2) es werde dem Stromkreis aus unendlicher Entfernung ein unmagnetisches Stück Eisen genähert. Es werde gesetzt

$$Q = Q_0 + Q',$$

und es sei wieder Q_0 der Anfangs-, Q_1 der Endwerth von Q; Q' ist dann der von der inducirten Magnetisirung des Eisens herrührende Betrag. Die Bewegung soll wieder sehr langsam erfolgen. Es ist dann nach Kapitel IV, Gleichung (57):

$$A = {}^1/_2 \frac{i}{V} \delta Q' = {}^1/_2 \frac{i}{V} (Q_1 - Q_0).$$

Andererseits ist wieder, wie unter 1),

$$-\int \mathfrak{E}' i dt = \frac{i}{V} (Q_1 - Q_0).$$

Diesmal aber hat die magnetische Energie sich geändert; sie war im Anfang:

$$W_{m0} = {}^1/_2 p_0 i^2 = {}^1/_2 \frac{i}{V} Q_0,$$

und ist am Ende:

$$W_{m1} = {}^1/_2 p_1 i^2 = {}^1/_2 \frac{i}{V} Q_1.$$

Es folgt:

$$A + \delta W_m = -\int \mathfrak{E}' i dt,$$

und hiermit ist das Energieprincip wiederum befriedigt. — Der inducirte Integralstrom ist im Fall 1) wie im Fall 2):

$$\mathfrak{J}' = -\frac{1}{Vw} (Q_1 - Q_0).$$

Für die erzeugten Inductionsströme also ist es ohne Bedeutung, ob der an irgend einer Raumstelle auftretende Magnetismus permanent oder temporär ist. Der Unterschied besteht aber in folgendem: bei der Bewegung eines permanenten Magneten gegen einen Stromleiter wird der Ueberschuss der aus den Elementen aufgenommenen über die als Joule'sche Wärme abgegebene Energie vollständig in mechanische Arbeit umgesetzt; bei der Bewegung eines Eisenstückes wird er zum Theil als magnetische Energie aufgespeichert. Diese Energie kommt zum Vorschein, wenn der Strom — etwa durch Ausschaltung der Elemente — zum Erlöschen

gebracht wird. Derselbe liefert dann ohne Eisenkörper noch Joule'sche Wärme vom Betrage $\frac{1}{2} p_0 i^2$, mit Eisenkörper aber $\frac{1}{2} p_1 i^2$ (s. S. 310). — Wir haben vorausgesetzt, dass die Permeabilität des permanenten Magneten gleich der der Luft sei (μ_0). In Wahrheit ist auch für ihn stets $\mu > \mu_0$; also ist ein Theil seiner Magnetisirung stets „inducirt". Die durch seine Bewegung inducirten Ströme verrathen seinen „freien" (wahren + inducirten) Magnetismus; — der Inductionsstrom, welcher, bei ruhenden Körpern, durch Ausschaltung der Elemente entsteht, ist abhängig von seinem inducirten Magnetismus.

Wir wollen jetzt innere elektromotorische Kräfte ausschliessen, so dass nach (2) wird:

$$wi = -\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{29}$$

Wird der Stromträger gegen ein fremdes magnetisches Feld bewegt, so wird in dt die Arbeit geleistet:

$$\partial A = \frac{i}{V}\,dQ = \frac{i}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}\,dt,$$

also nach (29):

$$\partial A = -\frac{1}{V^2 w}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 dt. \tag{30}$$

Diese Arbeit ist stets negativ, d. h.: Der durch die Bewegung eines Leiters gegen ein magnetisches Feld inducirte Strom hat stets solche Richtung, dass die auf den Stromträger ausgeübten elektrodynamischen Kräfte der Bewegung entgegen wirken. (Lenz'sche Regel.)

Die beiden Aufgaben: in einem gegebenen magnetischen Felde 1) die mechanischen Kräfte auf einen linearen Stromleiter, — 2) die durch Bewegung in dem Leiter inducirte elektromotorische Kraft zu finden, werden gelöst durch die Auffindung derselben Grösse: der Veränderung δQ, welche Q bei virtuellen Verschiebungen erfährt.

Dies führt zunächst zu einer allgemeinen Bemerkung: wir konnten δQ zerlegen in Beiträge, welche von der Verschiebung

v der einzelnen Curvenelemente ds herrühren. Der Beitrag von ds war (vgl. Kap. III, Seite 230)

$$d(\delta Q) = \mu M \cdot \sin(M\,ds)\, ds \cdot v_\nu\,,$$

wo ν die Axe der Drehung $\widehat{ds\,M}$ bedeutet. Es kann also in gleicher Weise die inducirte elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

zerlegt werden in Elemente, von welchen ds den Beitrag $-\frac{1}{V}\, d\frac{\partial Q}{\partial t}$ liefert. $d(\delta Q)$ bedeutet die vom Element ds bei der Bewegung geschnittenen Kraftlinien. Insbesondere also: zu $\mathcal{E}'$ liefert ein Element ds keinen Beitrag, wenn es sich sei es in seiner eigenen Richtung, sei es in der Richtung der Kraftlinien bewegt.

Aus (29) folgt die Gleichung (9):

$$\mathfrak{J} = \int_0^t i\,dt = \frac{1}{Vw}(Q_0 - Q).$$

Dieser Integralstrom ist, wenn wir nur die Zeit t hinreichend gross wählen, von der Selbstinduction unabhängig (s. S. 309). In der Differentialgleichung (29) dagegen enthält $\frac{\partial Q}{\partial t}$ im allgemeinen auch ein Glied: $p\frac{\partial i}{\partial t}$. Dasselbe verschwindet nach gewisser Zeit, wenn durch die Bewegung eine gleichförmige Zunahme von Q bewirkt wird. Diese Bedingung denken wir uns in den folgenden Beispielen [ausser 1)] eingehalten. Dieselben bilden die Gegenstücke zu den im Kapitel IV, § 3 B. unter gleicher Ziffer behandelten Beispielen.

1) Ein Stromleiter von der „Fläche" S werde im Erdfelde gedreht, dessen horizontale Componente H, dessen verticale Z heisse („Erdinductor"); und zwar:

erstens so, dass die Normale von S aus der Richtung von H in die entgegengesetzte Richtung übergeht; dann ist $Q_0 = \mu_0 H \cdot S$, $Q = -\mu_0 H \cdot S$, also der Integralstrom

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{Vw} 2\mu_0 H \cdot S;$$

zweitens so, dass die Normale aus der Richtung von Z in die entgegengesetzte übergeht; dann ist der Integralstrom

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{Vw} 2\mu_0 Z \cdot S.$$

Daraus

$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{Z}{H} = \operatorname{tg} \alpha,$$

wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung des Erdfeldes mit der Horizontalen bildet, die sogenannte Inclination. Dieselbe kann also aus $\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1}$ bestimmt werden (s. § 4).

Für das folgende kann man allgemein bemerken: findet eine Parallelverschiebung dx eines Leiterstücks statt, und bezeichnet f die Kraft, welche auf dasselbe wirken würde, wenn es den Strom i führt, so ist einerseits

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t},$$

andererseits

$$f_x = \frac{i}{V} \frac{\partial Q}{\partial x};$$

also

$$\mathcal{E}' = -\frac{f_x}{i} \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Ebenso: wenn eine Drehung $d\vartheta$ um eine Axe stattfindet, und Θ das, für den Strom i berechnete, Drehungsmoment um dieselbe bedeutet, so ist

$$\mathcal{E}' = -\frac{\Theta}{i} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Hiernach folgt sofort:

2) Wird die Brücke (Fig. 35) mit der constanten Geschwindigkeit u nach aussen geschoben, so ist

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{V} \mu M_N b u.$$

M_N bezeichnet die zur Schienenebene normale Componente des Feldes, und das Minuszeichen bedeutet, dass $\mathcal{E}'$ die Richtung des negativen Umlaufs um N hat.

3) Der bewegliche Radius (Fig. 36) werde durch äussere Kräfte in gleichförmige Rotation versetzt. Die inducirte elektromotorische Kraft ist

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{V}\mu M \frac{R^2}{2}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

4) (Sogenannte unipolare Induction.) Bei gleichförmiger Rotation des Bügels (Fig. 37) um einen Pol des Magneten wird inducirt:

$$\mathcal{E}' = \frac{m}{2\pi V}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

5) Gramme'scher Ring. Das Stromsystem kann (s. Fig. 38) in zwei einfache Umläufe mit den Strömen i_1 und i_2 aufgelöst werden. In jedem derselben ist bei gleichförmiger Rotation des Ringes die inducirte elektromotorische Kraft:

$$\mathcal{E}' = -\frac{2\nu\mu M S}{V}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Die Kirchhoff'schen Regeln aber ergeben, wenn w den Widerstand einer Ringhälfte, w_0 denjenigen des äusseren Kreises bezeichnet,

$$i = i_1 + i_2$$
$$i_1 w + i w_0 = \mathcal{E}'$$
$$i_2 w + i w_0 = \mathcal{E}'$$

und daraus:

$$2i_1 = 2i_2 = i = \frac{\mathcal{E}'}{\frac{w}{2} + w_0}.$$

Im Vorstehenden ist eine dauernde gleichmässige Verbindung des äusseren Kreises mit den beiden Windungshälften vorausgesetzt. Diese ist praktisch nicht ausführbar; es entstehen daher plötzliche Stromschwankungen und somit Wirkungen der Selbstinduction. Auf die hieraus entspringenden Complicationen gehen wir nicht ein.

§ 3. Ungeschlossene Stromkreise.

Wir kehren zur Betrachtung eines ruhenden Leiters zurück, nehmen aber jetzt an, der Leiterkreis s sei nicht vollständig geschlossen. Seine Enden mögen in einem Condensator (Capacität c, Elektricitätsmengen $\pm P$) enden (vgl. Fig. 41). Dann ist weder die Induction Q eines gegebenen Feldes durch s, noch das Feld M eines in s fliessenden Stromes i und somit die Induction Q' dieses Feldes durch eine gegebene Curve scharf definirt; wenn aber die Oeffnung sehr klein ist gegen die Länge der Leitung, so hat man angenommen, dass man diese durch die Oeffnung hindurch auf beliebige Art geschlossen denken darf. Mit anderen Worten: man ergänze s durch δs (quer durch den Condensator) zu einer geschlossenen Curve $s + \delta s$ und denke Q und Q', was stets möglich ist, durch Integrale über $s + \delta s$ ausgedrückt: lässt sich δs so ziehen, dass der von δs herrührende Beitrag verschwindet gegenüber dem Rest, so nimmt man an, dass das Integral über s praktisch den Werth von Q, bezw. Q' darstellt. Die Erfahrung hat diese Annahme in der Weise bestätigt, dass es nicht möglich war, durch Versuche mit solchen Anordnungen eine Entscheidung über die für den Fall ungeschlossener Ströme am Inductionsgesetz anzubringende Correction herbeizuführen. In anderer Beziehung aber ändert sich unser Ansatz (2): Es befindet sich jetzt auf jeder Belegung des Condensators eine Elektricitätsmenge, die durch den Strom geändert wird; denn die Stromlinien enden am Condensator. Wir haben also jetzt eine elektrische Energie W_e, deren Aenderungen nach der dritten allgemeinen Annahme dieses Kapitels (S. 307 f.) durch die Aenderungen der Elektricitätsvertheilung gegeben sind. Die Energiegleichung lautet nunmehr an Stelle von (8):

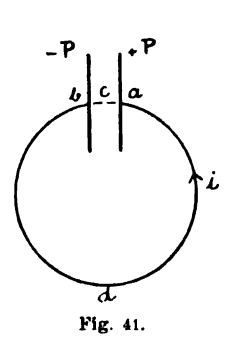


Fig. 41.

$$\partial A + \Psi dt = -(dW_e + dW_m). \tag{31}$$

Es handle sich um einen einzigen ruhenden Leiter ohne innere

elektromotorische Kräfte. Dann ist $\partial A = 0$, $\Psi = i^2 w$,

$$W_e = \text{const.} + \frac{1}{2}\frac{P^2}{c}, \qquad W_m = \frac{1}{2} p i^2.$$

Weiter folgt aus der allgemeinen Beziehung [Kap. II, Gleichung (1)]

$$\int A_N dS = -\frac{\partial e_i}{\partial t}$$

für unsern Fall:

$$i = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Also

$$i^2 w = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{P^2}{c} + \frac{1}{2} p i^2\right) = -\frac{P}{c} i - p i \frac{\partial i}{\partial t},$$

oder

$$i w = -\frac{P}{c} - p \frac{\partial i}{\partial t}. \tag{32}$$

Differenzirt man nach t, so kommt:

$$p \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + w \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{i}{c} = 0.$$

Wir setzen als Lösung an: $i = e^{\eta t}$, und finden:

$$p\eta^2 + w\eta + \frac{1}{c} = 0.$$

Daraus:

$$\eta = \frac{-w + \sqrt{w^2 - \frac{4p}{c}}}{2p}.$$

Es trennen sich zwei Fälle:

1) sei $\frac{4p}{cw^2} < 1$; dann wird

$$i = a_1 e^{\eta_1 t} + a_2 e^{\eta_2 t},$$

wo η_1 und η_2 reell und negativ sind. Der Strom i, und ebenso die Ladung P, geht also aperiodisch gegen den Werth Null.

Sei speciell $\frac{4p}{cw^2}$ sehr klein, dann wird sehr nahe

$$\eta_1 = -\frac{w}{p}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{cw}$$

und also η_2 numerisch sehr klein gegen η_1. Folglich ist nach einer gewissen Zeit merklich

$$i = a e^{-\frac{t}{cw}}. \tag{33}$$

Daraus folgt

$$-\frac{\partial W_m}{\partial t} = -p i \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{p}{cw} i^2,$$

also

$$\frac{-\frac{\partial W_m}{\partial t}}{\Psi} = \frac{p}{cw^2}$$

sehr klein; daher merklich als Energiegleichung:

$$\Psi = -\frac{\partial W_e}{\partial t}. \tag{31a}$$

Umgekehrt würde man zu der Gleichung (33) gelangen, wenn man in der Energiegleichung die magnetische Energie vernachlässigte, d. h. $p = 0$ setzte.

2) sei $\frac{4p}{cw^2} > 1$; dann wird

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\beta + \iota\gamma \\ \eta_2 &= -\beta - \iota\gamma \end{aligned} \quad \text{wo} \quad \left\{ \begin{aligned} \beta &= \frac{w}{2p} \\ \beta^2 + \gamma^2 &= \frac{1}{cp} \\ \iota &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right.$$

$$i = e^{-\beta t}\left(a_1 e^{\iota\gamma t} + a_2 e^{-\iota\gamma t}\right) = A e^{-\beta t} \cos(\gamma t + \delta).$$

i fällt also in gedämpften Schwingungen gegen Null ab. Bezeichnet T die Dauer der Halbschwingung, $\varkappa$ das „logarithmische Decrement“, so ist

$$\gamma = \frac{\pi}{T}, \quad \beta = \frac{\varkappa}{T},$$

und folglich

$$\frac{w}{2p} = \frac{\varkappa}{T} \tag{34a}$$

$$\frac{1}{cp} = \frac{\pi^2 + \varkappa^2}{T^2}. \tag{34b}$$

Der Ableitung der Gleichung (32) kann man eine andere Form geben. Aus dem Ohm'schen Gesetz folgt unmittelbar (vgl. Fig. 41)

$$iw = \int_{b}^{a} \Big|_{d} E_s\, ds$$

$$= \oint E_s\, ds - \int_{a}^{b} \Big|_{c} E_s\, ds,$$

wo die Buchstaben neben den Integralzeichen, von unten nach oben gelesen, den Integrationsweg bezeichnen sollen, und $\circ$ eine Integration über die geschlossene Curve im Sinne von i. Unsere Annahmen kommen nun auf das folgende heraus:

1) Das erste Integral der letzten Zeile darf $= -p\frac{\partial i}{\partial t}$ gesetzt werden, wo p den Selbstinductionscoefficienten einer Curve *bdacb* bedeutet, in welcher das Element *acb* unbestimmt ist.

2) Das zweite Integral darf gleich dem Werth gesetzt werden, den es für ein elektrostatisches Feld besitzen würde, in welchem die Condensatorplatten dieselbe Ladung besässen. Man darf es aber nicht mehr als die „Potentialdifferenz“ zwischen a und b bezeichnen; denn ein Potential existirt nicht; der Werth des Integrals ist erst durch den Integrationsweg (über c) bestimmt. Die Technik benutzt für den allgemeineren Begriff „Linien-Integral der elektrischen Feldintensität“ das Wort „Spannung“; im englischen ist „Voltage“ eingeführt.

Die Gleichung (32) zeigt, dass man für unsern nahezu geschlossenen Stromkreis das Ohm'sche Gesetz formal aufrecht erhalten kann, indem man diese Spannung, die Grösse

$-\frac{P}{c}$, als eine neue Art elektromotorischer Kraft einführt. Multiplicirt man (32) mit i, so bildet sich auf der linken Seite die in der Zeit Eins erzeugte Joule'sche Wärme, aus $-\frac{P}{c}$ aber entsteht die Abnahme der elektrischen Energie.

Allgemein kann man wie folgt definiren: erfahrungsmässig ist mit der Existenz eines linearen Stromes i das Auftreten einer Wärmemenge i^2w (Joule'sche Wärme) in der Zeiteinheit verknüpft, welche sich in bestimmter Weise, nämlich nach Verhältniss der Körperconstanten $w_1, w_2 \ldots$, über den Stromkreis vertheilt. Diese Wärme findet ihr Aequivalent in verschiedenen Arten verbrauchter Energie. Indem man jeden dieser Posten in der Form $\mathcal{E}^{(n)}i$ schreibt, erhält man nach Division mit i:

$$iw = \Sigma \mathcal{E}^{(n)},$$

d. h. eine Gleichung von der Form des Ohm'schen Gesetzes. Jeden Term $\mathcal{E}^{(n)}$ der rechten Seite bezeichnet man als eine elektromotorische Kraft in dem linearen Kreise. Jeder einzelne Term kann, für positives i, positiv oder negativ sein; nur die Summe ist nothwendig positiv.

Wir haben als Quellen Joule'scher Wärme („Stromquellen") kennen gelernt: 1) chemische und thermische, 2) mechanische, 3) magnetische, 4) elektrische Energie. Dem Posten 1) entspricht die von uns als „innere" bezeichnete elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$; — den Posten 2) und 3) die „inducirte" $\mathcal{E}'$; — dem Posten 4) die Spannung zwischen den Enden des aufgeschnittenen Kreises. — Nur die Grössen $\mathcal{E}$ sind durch innere Constanten des Kreises gegeben; sie trennen sich dadurch von den übrigen elektromotorischen Kräften.

Der Ansatz

$$iw = \mathcal{E} - \frac{P}{c} - p\frac{\partial i}{\partial t}, \quad i = \frac{\partial P}{\partial t}$$

giebt den Strom für einen durch einen Condensator unter-

brochenen Stromkreis mit der inneren elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$.

Für ein beliebig verzweigtes Leitersystem mit eingeschalteten Condensatoren erhält man, unter den Voraussetzungen der S. 322, den Ansatz durch die Kirchhoff'schen Regeln; an den Gleichungen (a) (b) ändert sich nur das eine, dass für jeden Zweig k, welcher durch einen Condensator (c_k) unterbrochen ist, zu $\mathcal{E}_k$ eine Grösse $-\frac{P_k}{c_k}$ tritt, wo $\frac{\partial P_k}{\partial t} = i_k$. Es handle sich um ein Stromnetz, in welchem keine $\mathcal{E}_k$ vorhanden sind, und dessen Zweige so gelagert sind, dass für einen jeden nur die Selbstinduction in Betracht kommt. Dann wird der Ansatz:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{a}) & \Sigma i = 0 \text{ für jeden Verzweigungspunkt,} \\ (\mathrm{b}) & \Sigma\left(w_k i_k + \frac{P_k}{c_k} + p_k \frac{\partial i_k}{\partial t}\right) = 0, \quad \frac{\partial P_k}{\partial t} = i_k \\ & \text{für jeden Umlauf.}\end{array}\right\} \quad (35)$$

Es seien die Ströme einfach-harmonische (sinusförmige) Functionen der Zeit; dann setzt man

$$i_k = a_k e^{\iota \nu t}$$

und erhält aus (a) (b):

$$\Sigma a = 0 \quad (\mathrm{a}')$$

$$\Sigma a_k \left[w_k + \iota\left(\nu p_k - \frac{1}{\nu c_k}\right)\right] = 0. \quad (\mathrm{b}')$$

Die Form der Kirchhoff'schen Gleichungen für stationäre Ströme bleibt also bestehen; es ist lediglich an Stelle des Widerstands w_k der complexe „Widerstandsoperator"

$$w_k + \iota\left(\nu p_k - \frac{1}{\nu c_k}\right)$$

getreten. Weiteres über die rechnerische Durchführung s. z. B. bei M. Wien, Wied. Ann. 44, S. 689.

§ 4. Massmethoden.

In diesem Kapitel sind zum ersten Mal zeitlich veränderliche elektromagnetische Grössen aufgetreten; solange die Voraussetzungen erfüllt sind, welche wir S. 307 f. unter 1) bis 4) gemacht haben, können wir ihre Messung auf die Messung stationärer Grössen zurückführen.

Aus den Annahmen 3) und 4) folgt zunächst: verbinden wir die Punkte a und b eines geschlossenen linearen Stromkreises (vgl. Fig. 42) mit den Organen A und B eines Elektrometers, so sind die mechanischen Kräfte auf den beweglichen Elektrometertheil in jedem Moment die gleichen, als ob die gegenwärtige elektrische „Spannung" zwischen A und B eine stationäre Potentialdifferenz wäre. Es werde etwa ein Quadrantelektrometer (vgl. S. 79) in der Weise benutzt, dass A und C mit a verbunden sind, B mit b; das Instrument sei mittels constanter Potentialdifferenzen „geaicht", d. h. der Coefficient k der Gleichung (48a) S. 79 bestimmt. Besteht dann zwischen A und B eine periodisch wechselnde Spannung $\mathfrak{S}$, und ist die Dauer der Periode klein gegen die Schwingungsdauer der Nadel, so erhält man den zeitlichen Mittelwerth $[\mathfrak{S}^2]$ von $\mathfrak{S}^2$ aus dem beobachteten Drehungsmoment Θ gemäss der Gleichung

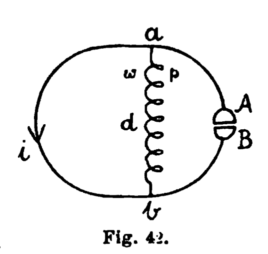


Fig. 42.

$$\Theta = \frac{k}{2}[\mathfrak{S}^2].$$

Es sei nun weiter die Capacität des Elektrometers so klein, dass sich kein merklicher Bruchtheil des veränderlichen Stromes in die Leitung bB, Aa verzweigt; dann fliesst in dem Zweige bda der gleiche Strom i, welcher dort vor Anlegung des Elektrometers bestand. Habe der Leiter bda etwa den Widerstand w und enthalte er eine Spirale vom Selbstinductionscoefficienten p, so ist [s. (35b)]

$$\mathfrak{S} = wi + p\,\frac{\partial i}{\partial t}.$$

Befände sich zwischen a und b anstatt der Spirale ein inhomogener Leiter mit der inneren elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$, so wäre

$$\mathfrak{S} = wi - \mathcal{E}.$$

Die inducirte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}' = -p\frac{\partial i}{\partial t}$ wird also elektrometrisch genau so wie eine „innere" $\mathcal{E}$ gemessen.

Es ist aber zu beachten: wenn hier dem ungeschlossenen Leiterstück bda ein bestimmter Werth $\mathcal{E}'$ zugeordnet wurde, so bedeutet das lediglich eine praktisch ausreichende Näherung.

Offen blieb bisher die Frage, ob der Werth einer inducirten elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}'$ allgemein eindeutig in Elemente zerfällt werden kann, welche den Elementen der Stromcurve entsprechen. Die Strömung ist vollkommen bestimmt durch die Integralwerthe $\mathcal{E}'$ für geschlossene Curven; nur auf diese Integralwerthe also kann aus der beobachteten Strömung geschlossen werden. — Das gleiche galt für die Grössen $\mathcal{E} = -\int K_s ds$. Auf die Elemente K aber konnte geschlossen werden aus den Energieumsetzungen, welche sich an die Existenz der $\mathcal{E}$ knüpfen; diese finden — wenigstens, soweit es sich um Wärme handelt — in bestimmt angebbarer Weise in den einzelnen Elementen des Leiters statt, und somit lassen sich auch die Elemente von $\mathcal{E}$ localisiren (s. Kap. II, S. 173). — Die Energieformen, welche bei Vorhandensein der $\mathcal{E}'$ auftreten, sind im allgemeinen mechanische Arbeit und magnetische Energie. Die letztere kann experimentell nicht localisirt werden; nur die Theorie vertheilt sie in bestimmter Weise auf die Raumelemente, aber wesentlich auch auf Raumtheile ausserhalb des Leiters. Die Aufgabe, $\mathcal{E}'$ in seine Elemente zu zerlegen, hat demnach physikalisch keine Lösung; mathematisch hat sie unendlich viele, welche alle physikalisch gleichwerthig sind. — Nur in dem speciellen Fall, wo nur mechanische Arbeit (keine magnetische Energie), auftritt, d. h. also bei der Bewegung des Leiters gegen einen permanenten, nicht inducirbaren Magneten, ist in der S. 327 angegebenen Weise eine eindeutig bestimmte Zerlegung möglich.

Wie unsere Annahmen 3) und 4) die Regeln für die Messung periodisch veränderlicher Spannungen ergaben, so ergeben die Annahmen 1) und 2) die Regeln für die Messung periodisch veränderlicher Ströme: ein Galvanometer misst bei hinreichend kurzer Periode den zeitlichen Mittelwerth von i im gleichen Mass, in dem es einen stationären Strom i misst; — ein Elektrodynamometer ebenso den Werth von $i_1 \cdot i_2$ bezw. von i^2.

Im gegenwärtigen Kapitel ist als neues Messungsobject der Integralstrom

$$\mathfrak{J} = \int_0^\tau i\,dt$$

aufgetreten. Die mechanische Wirkung, welche derselbe auf einen Magneten — z. B. die Nadel eines Galvanometers (vgl. S. 262) — ausübt, wird ebenfalls nach dem Princip gefunden, dass das Feld und die Kräfte in jedem Moment die gleichen sind, welche der jeweilige Strom als stationärer Strom hervorrufen würde. Es ist also das Drehungsmoment zur Zeit t:

$$\Theta_t = M\mathfrak{K} \cos\vartheta, \tag{36a}$$

wo M das Feld des stationär gedachten Stromes i am Ort der als sehr klein vorausgesetzten Nadel bedeutet, $\mathfrak{K}$ das magnetische Moment der Nadel, ϑ den Winkel, welchen ihre Axe mit der zu M normalen Ebene, dem magnetischen Meridian, bildet. Allgemein kann gesetzt werden

$$M = \frac{i}{V} g, \tag{36b}$$

wo g eine durch die Abmessungen des Instruments bestimmte Constante bezeichnet. Diese ergiebt sich bei geeigneter Form der Strombahn durch Rechnung [vgl. Kap IV, (23)]; für ein beliebiges Instrument kann sie durch Vergleichung mit einer Tangentenbussole empirisch bestimmt werden. ($G = 4\pi g$ heisst die „Galvanometerconstante".)

Auf die Nadel wirkt ferner, zu wachsenden ϑ, das Drehungsmoment des Erdfeldes H:

$$\Theta_2 = - H\mathfrak{K} \sin \vartheta. \tag{37}$$

Die Bewegungsgleichung der Nadel ist daher, wenn D ihr Trägheitsmoment bezeichnet:

$$D \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \Theta_1 + \Theta_2 .$$

Es handelt sich in der Regel um Ströme, welche merklich in sehr kurzer Zeit τ ablaufen. Wir setzen im Folgenden voraus, τ sei sehr klein gegen die Schwingungsdauer der Nadel, und diese befinde sich zur Zeit $t = 0$ im magnetischen Meridian und in Ruhe. Dann bleibt merklich $\vartheta = 0$ während der Zeit τ; es gilt folglich während dieser Zeit:

$$D \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{i}{V} g\mathfrak{K} . \tag{α}$$

Wir integriren diese Gleichung über die Zeit von 0 bis τ; dann folgt: die Nadel hat zur Zeit τ eine Winkelgeschwindigkeit ω erlangt, welche bestimmt ist durch

$$D\omega = g\, \mathfrak{K} \frac{\mathfrak{J}}{V} . \tag{38}$$

Nach Ablauf der Zeit τ ist $M = 0$, und es folgt:

$$D \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = - H\mathfrak{K} \sin \vartheta \tag{β}$$

mit den Anfangsbedingungen

für $t = \tau$: $\qquad \vartheta = 0$ und $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} = \omega .$

Die Auflösung ist, wenn sich die Bewegung auf kleine Winkel ϑ beschränkt:

$$\vartheta = \frac{T_0 \omega}{\pi} \sin \frac{\pi (t - \tau)}{T_0}, \text{ wo}$$

$$\left(\frac{\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{H\mathfrak{K}}{D} ; \tag{39}$$

d. h. die Nadel führt Schwingungen aus mit der halben Schwingungsdauer T_0 und der Amplitude:

$$\alpha = \frac{T_0 \omega}{\pi}. \tag{40}$$

Mittels (39) und (40) können $\frac{\mathfrak{K}}{D}$ und ω aus (38) eliminirt werden, und es folgt:

$$\frac{\mathfrak{J}}{V} = \frac{T_0}{\pi} \frac{H}{g} \alpha. \tag{41}$$

An dem gleichen Galvanometer bringe ein stationärer Strom i die dauernde kleine Ablenkung β hervor. Dann ist $\left[\text{vgl. S. 262, Gleichung (24), wo } g = \frac{1}{2R}\right]$

$$\frac{i}{V} = \frac{H}{g} \beta.$$

Also
$$\mathfrak{J} = i \frac{T_0}{\pi} \frac{\alpha}{\beta}. \tag{42}$$

Hiermit ist die Messung kurz dauernder Integralströme oder „Stromstösse" auf die Messung stationärer Ströme zurückgeführt.

Wenn der Stromkreis des Galvanometers, vom Widerstand w, nach dem Ablauf des Stromstosses geschlossen bleibt, so bedarf die vorstehende Entwicklung einer Correction: die Bewegung des Magneten inducirt dann einen Strom i', und dieser wirkt mit einem Drehungsmoment Θ_1' auf die Bewegung der Nadel zurück. Es ist, wenn Q die Induction des Magneten durch den Galvanometerkreis bezeichnet, nach (30):

$$\Theta_1' = -\frac{1}{w V^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \vartheta}\right)^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Wenn nun M' das vom Strom i' erzeugte Feld bezeichnet, so ist nach (36b):

$$M' = \frac{i'}{V} g, \text{ und } \measuredangle (\mathfrak{K} M') = \frac{\pi}{2} - \vartheta;$$

nach Kapitel IV (59) aber:

$$\mathfrak{K}M' \cos(\mathfrak{K}M') = \frac{i'}{V} Q;$$

folglich $$Q = \mathfrak{K}g \sin\vartheta .$$

Also wird

$$\Theta_1' = -\frac{1}{w}\frac{1}{V^2}(g\mathfrak{K})^2 \cos^2\vartheta \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

und an Stelle von (β) tritt:

$$D\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = \Theta_1' + \Theta_2 . \qquad (\beta')$$

Für kleine Schwingungen hat man daher:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = -p^2\vartheta - 2q\frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

wo $$p^2 = \frac{H\mathfrak{K}}{D},\quad 2q = \frac{g^2\mathfrak{K}^2}{wV^2.D}; \qquad (43)$$

für $t = \tau$: $$\vartheta = 0,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \omega .$$

Die Auflösung ist, sofern $p^2 > q^2$:

$$\vartheta = \frac{T\omega}{\pi} e^{-\frac{\varkappa}{T}(t-\tau)} \sin\frac{\pi(t-\tau)}{T},$$

wo $$\frac{\varkappa}{T} = q;\qquad \frac{\pi^2}{T^2} = p^2 - q^2; \qquad (44)$$

also nach (43) und (39):

$$\frac{\pi^2+\varkappa^2}{T^2} = p^2 = \frac{\pi^2}{T_0^2}. \qquad (45)$$

Die Amplitude dieser Schwingungen (das Maximum von ϑ) ist

$$a = \frac{T\omega}{\sqrt{\pi^2+\varkappa^2}} e^{-\frac{\varkappa}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\varkappa}},$$

oder nach (45) auch:

$$\alpha = \frac{T_0\,\omega}{\pi}\, e^{-\frac{\varkappa}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\varkappa}}. \tag{40'}$$

Aus (38), (39), (40') folgt an Stelle von (41), (42):

$$\frac{\mathfrak{J}}{V} = \frac{T_0}{\pi}\, e^{\frac{\varkappa}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\varkappa}} \cdot \frac{H}{g}\, \alpha \tag{41'}$$

oder

$$\mathfrak{J} = i\, \frac{T_0}{\pi}\, e^{\frac{\varkappa}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\varkappa}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\,. \tag{42'}$$

$\varkappa$ ist das „logarithmische Decrement" der Nadelschwingung, T_0 die Schwingungsdauer bei offenem Galvanometerkreis.

Aus (43), (44), (45) folgt noch

$$\frac{g^2\,\mathfrak{K}}{2\,V^2 w H} = \frac{q}{p^2} = \frac{T_0\,\varkappa}{\pi\sqrt{\pi^2 + \varkappa^2}},$$

also

$$\frac{V^2 w}{\mu_0} = \frac{\mathfrak{K}}{H\mu_0} \cdot \frac{g^2}{T_0} \cdot \frac{\pi\sqrt{\pi^2 + \varkappa^2}}{2\varkappa}\,. \tag{46}$$

$\frac{\mathfrak{K}}{H\mu_0}$ kann [s. Kap. III (22)] in absolutem mechanischem Mass gemessen, g in der S. 338 angegebenen Weise bestimmt werden; man erhält also $\frac{V^2 w}{\mu_0}$ in absolutem Mass (W. Weber).

Für die schon früher eingeführten elektrischen und magnetischen Grössen ergeben sich aus den Darlegungen dieses Kapitels mannigfache neue Messungsmethoden.

Die Grundlage der meisten bildet die Gleichung (9):

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{Vw}\,(Q_0 - Q)\,.$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{J}$ den Integralstrom in einem Kreise vom Widerstande w, welcher vor und nach einem kurzen Zeitintervall τ stromlos ist, und für welchen während τ die Induction von Q_0 auf Q angewachsen ist. Nach (41), bezw. (41')

kann das Verhältniss $\frac{\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{J}_2}$ zweier solcher Integralströme gemessen werden, indem man die Ausschläge beobachtet, welche sie in demselben Galvanometer hervorrufen, und event. noch in beiden Fällen das Decrement der Schwingungen bestimmt. Auf dieselben Messungen wird durch (9) die Bestimmung des Verhältnisses zweier Grössen $(Q_0 - Q)$ zurückgeführt.

1) Es werde nun zunächst ein Magnet vom Moment $\mathfrak{K}$ aus grosser Entfernung in eine lange Spirale Σ von n Windungen auf der Längeneinheit eingeführt. Das Feld eines Stromes i, welchen wir in der Spirale fliessend denken, wäre im Innern der Spirale gleichförmig, nämlich parallel der Axe von Σ und $= \frac{ni}{V}$ [s. Kap. IV, (21)]; in grosser Entfernung wäre es 0. Es ist daher nach Kapitel IV (59), wenn x die Richtung der Spiralenaxe bezeichnet: $Q = n\mathfrak{K}_x$, während $Q_0 = 0$ ist. — Hiernach können die permanenten Momente verschiedener Magnete oder auch die verschiedenen Componenten des Moments eines Magneten verglichen werden.

2) Es befinde sich ferner in derselben Spirale Σ eine zweite ebenfalls sehr lange Spirale Σ_1 mit n_1 Windungen auf der Längeneinheit und dem Strom i_1. Der Innenraum beider Spiralen enthalte zunächst nur Luft; dann ist innerhalb Σ_1 das Feld

$$M_0 = \frac{n_1 i_1}{V}.$$

Die Induction, welche dieses Feld durch Σ sendet, heisse Q_1. Der Strom i_1 werde geöffnet; dann sinkt die Induction durch Σ um Q_1. — Nun enthalte Σ_1 in seinem Innern ein beliebig geformtes Stück Eisen. Dann sinkt beim Oeffnen von i_1 die Induction durch Σ um $Q_1 + Q'$, wo nach Kapitel IV (21) und (59)

$$Q' = n\mathfrak{K}_x',$$

wenn $\mathfrak{K}_x'$ die x-Componente des durch den Strom i_1 oder durch das äussere Feld $M_0 = \frac{n_1 i_1}{V}$ in dem Eisenstück inducirten

magnetischen Moments bezeichnet. Mittels dreier Beobachtungen, welche je in relativem Mass

$$Q_1, \quad Q_1 + n\mathfrak{K}_x', \quad Q_1 + n\mathfrak{K}_x''$$

geben, kann man also das Verhältniss der inducirten Momente $\frac{\mathfrak{K}_x'}{\mathfrak{K}_x''}$ bestimmen, welche durch dasselbe Feld $M_0 = \frac{n_1 i_1}{V}$, sei es in dem gleichen Eisenstück bei verschiedener Orientirung, sei es in verschiedenen Eisenstücken, hervorgerufen werden.

3) Hieran ändert sich nichts, wenn das Eisenstück ein permanenter Magnet ist; denn das permanente Moment trägt zum Anfangs- und Endwerth der Induction den gleichen Betrag bei. Durch Combination der Methoden 1) und 2) kann man daher das permanente $\mathfrak{K}_x$ eines Magneten mit dem durch das Feld $M_0 = \frac{n_1 i_1}{V}$ inducirten $\mathfrak{K}_x'$ vergleichen. Lässt man noch den Strom i_1 durch eine Tangentenbussole gehen, so erhält man $\frac{i_1}{V \cdot H}$, also auch $\frac{M_0}{H}$, und somit das Verhältniss des permanenten zu dem bei beliebiger Orientirung durch das Erdfeld inducirten Moment; d. h. die Coefficienten A und B in Kapitel III, S. 219f.

4) Die Spirale Σ_1 sei jetzt in ihrer Mitte von einer kurzen Spirale Σ_2 von N_2 Windungen umgeben, die durch das Galvanometer geschlossen ist. Die Spirale Σ_1, deren Querschnitt S_1 heisse, sei in einem ersten Versuche von Luft erfüllt; in einem zweiten Versuch enthalte sie einen langen Eisenstab vom Querschnitt S. Dann ist die Induction durch Σ_2 im ersten Fall:

$$Q' = M_1 N_2 \cdot \mu_0 S_1 ;$$

im zweiten Fall:

$$Q'' = M_1 N_2 \cdot [\mu S + \mu_0 (S_1 - S)],$$

wo jedesmal: $M_1 = \frac{n_1 i_1}{V}$ [s. Kap. IV (29a)].

Daraus:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{S_1}{S} \frac{Q'' - Q'}{Q'}.$$

5) Allgemein liefert der inducirte Integralstrom, welchen das Oeffnen oder Schliessen eines gegebenen Stromes in einer benachbarten Leitung hervorruft, ein relatives Mass für den wechselseitigen Inductionscoefficienten p_{12} der beiden Leitungen, gemäss der Gleichung (15):

$$\mathfrak{J}_2 = \pm \frac{p_{12}\, i_1}{w_2}.$$

Die p_{12} können also verglichen werden durch Vergleichung der $\mathfrak{J}_2$.

Eine genauere Vergleichung, sowohl zwischen wechselseitigen, wie zwischen Selbstinductionscoefficienten, wie endlich zwischen Coefficienten beider Gattungen erhält man durch Nullmethoden, welche den Methoden zur Vergleichung von Widerständen nachgebildet sind. Es enthalte z. B. die Wheatstone'sche Verzweigung (Kap. II, S. 140 f.) in den Zweigen 1 und 2 Leiter von merklicher Selbstinduction, während die Selbstinduction der Zweige 3 und 4 und ebenso die wechselseitige Induction der verschiedenen Zweige zu vernachlässigen sei. Die Bedingungen für die Stromlosigkeit des Zweiges 5 sind dann nach den Gleichungen (a) (b) S. 322:

$$w_1\, i_1 + p_{11} \frac{\partial i_1}{\partial t} = w_3\, i_3$$

$$w_2\, i_1 + p_{22} \frac{\partial i_1}{\partial t} = w_4\, i_3 .$$

Zeigt sich also die „Brücke“ stromlos sowohl für stationären, wie für veränderlichen Strom, so ist

$$\frac{p_{11}}{p_{22}} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}.$$

Die Vergleichung der Inductionscoefficienten ist dadurch zurückgeführt auf eine Vergleichung von Widerständen.

Von der grössten Bedeutung sind die im Kapitel V entwickelten Sätze für die grundlegenden absoluten Messungen. Als Aufgabe derselben bezeichnen wir (vgl. Kap. IV, § 4): es sollen zwei der drei Grössen

$$\text{a)}\ \frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2}; \qquad \text{b)}\ \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}; \qquad \text{c)}\ \frac{V^2}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

bestimmt werden, wo λ_1 das Leitungsvermögen des Quecksilbers bedeutet, ε_0 und μ_0 die Constanten des Vacuums, und V die universelle Constante, welche in alle Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Grössen eingeht.

Bezeichnet nun p einen elektrodynamischen Inductionscoefficienten, c eine elektrostatische Capacität, w einen Widerstand, so sind sowohl $\frac{pV^2}{\mu_0}$, wie $\frac{c}{\varepsilon_0}$, wie $\frac{1}{w\lambda_1}$ Längen, welche für geeignete Formen der Leiter aus deren Dimensionen berechnet werden können, wenn das den Leiter umgebende Medium das Vacuum (Luft), bezw., wenn das Material des Leiters Quecksilber ist (s. Kap. IV, § 3, bezw. Kap. I, § 10 und Kap. II, § 4), und welche für beliebige Leiterformen experimentell durch Vergleichung mit einer solchen Normalanordnung zu bestimmen sind. — Man erhält daher

$$\text{a)}\ \frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2} = A\frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}, \qquad \text{b)}\ \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0} = B\frac{1}{\text{sec}}, \qquad \text{c)}\ \frac{V^2}{\varepsilon_0 \mu_0} = C\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2},$$

wenn man für irgend welche w, p, c die Combinationen

$$\text{a)}\ \frac{w}{p} = \alpha\frac{1}{\text{sec}}, \qquad \text{b)}\ wc = \beta\,\text{sec}, \qquad \text{c)}\ pc = \gamma\,\text{sec}^2$$

messen kann.

Die einfachsten Schemata für diese Messungen liefern die Gleichungen (10a), (33), (34b). Sie betreffen den zeitlichen Verlauf eines Stromes a) in einem geschlossenen Leiter mit Selbstinduction, b) in einem offenen Kreise ohne merkliche Selbstinduction, c) in einem offenen Kreise mit Selbstinduction. — Die drei Schemata bilden die Grundtypen aller rein elektrodynamischen Bestimmungen der fraglichen Constanten.

Als Beispiel einer ausgeführten Methode zur Messung von $\frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2}$ sei die folgende, von W. Weber herrührende erwähnt: man erzeugt einen Stromstoss durch Drehen einer Spule

im erdmagnetischen Feld („Erdinductor") und misst ihn durch ein Galvanometer. Dann ist einerseits (s. S. 328):

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{Vw} 2\mu_0 HS;$$

andererseits nach (41):

$$\frac{\mathfrak{J}}{V} = \frac{T_0}{\pi} \frac{H}{g} \alpha.$$

Daraus

$$\frac{V^2 w}{\mu_0} = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{Sg}{T_0}.$$

Hier sind S, g, α, T_0 messbare Grössen, nämlich S eine Fläche, g eine reciproke Länge, α ein Winkel, T_0 eine Zeit; man erhält also die rechte Seite in $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Der Widerstand w des Kreises kann verglichen werden mit dem Widerstand der Siemens-Einheit: $w_S = \frac{10^4}{\lambda_1} \frac{1}{\text{cm}}$; so kommt $\frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2}$ in $\frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}$. — Ein Beispiel einer ausgeführten Methode, welche einen permanenten Magneten benutzt, ist S. 342 gegeben. — Alle praktisch verwandten Methoden zur Messung von $\frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2}$ (in der Litteratur meistens als „Ohm-Bestimmungen" bezeichnet) beruhen auf den Sätzen des Kapitel V. Sie alle sind frei von der Benutzung des mechanischen Wärmeäquivalents, welches in die absoluten Widerstandsmessungen nach den Methoden der Kapitel II und IV eingeht. Nachdem in solcher Weise $\frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2}$ gefunden war, haben die Methoden in Kapitel IV umgekehrt dazu gedient, das mechanische Wärmeäquivalent zu bestimmen.

Die Bestimmungen von $\frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}$ sind praktisch nach dem folgenden Schema ausgeführt worden (vgl. Maxwell, Treatise § 775): Ein Condensator von der Capacität c werde mittels einer galvanischen Kette zur Potentialdifferenz $\mathcal{E}$ geladen, und die Elektricitätsmenge $c\mathcal{E}$ durch ein Galvanometer ent-

laden; dieser Vorgang wiederhole sich n mal in der Secunde. Ist die Zeit $\frac{1}{n}$ sehr klein gegen die Schwingungsdauer der Galvanometernadel, so bewirkt der intermittirende Strom denselben Ausschlag, wie ein constanter Strom

$$i = nc\mathcal{E}.$$

Wird also der gleiche Ausschlag hervorgebracht, wenn die Kette dauernd durch einen Widerstand w geschlossen ist, so ist

$$iw = \mathcal{E},$$

und folglich

$$wc = \frac{1}{n}.$$

Aus wc folgt $\frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}$. Ist nun $\frac{\lambda_1 \mu_0}{V^2}$ bereits bekannt, so folgt weiter $\frac{V^2}{\varepsilon_0 \mu_0}$. (Die Ermittlung von $\frac{V}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ist in der Litteratur häufig als „v-Bestimmung“ bezeichnet.)

Kapitel VI.

Die Maxwell'schen Gleichungen.

§ 1. Die erste Grundgleichung.

Unsere bisherigen Betrachtungen galten in der Hauptsache — Kapitel I bis IV — solchen elektromagnetischen Erscheinungen, welche zeitlich unverändert in ruhenden Körpern vorkommen, und — im Kapitel V — einer gewissen Art elektrischer Ströme, welche, wenn auch nicht stationär, doch mit den stationären das wesentliche Merkmal gemein haben, in geschlossenen Bahnen zu fliessen. Sehen wir von den statischen Erscheinungen ab, so kann demnach das Gebiet unserer Untersuchungen kurz bezeichnet werden als „die Lehre von den geschlossenen elektrischen Strömen". Für diese waren die ausreichenden und als ausreichend anerkannten Grundlagen gewonnen durch die Arbeiten von Ampère, Faraday, Wilhelm Weber und Franz Neumann. Die weitere Entwicklung der Elektricitätslehre ist beherrscht durch die Frage: welche Verallgemeinerung ist an den Grundgesetzen vorzunehmen, um auch von dem Verhalten ungeschlossener Ströme Rechenschaft zu geben? — oder mit Benutzung der früher eingeführten Bezeichnung: welches sind die Grundgesetze eines nicht stationären und auch nicht quasi-stationären, sondern ganz willkürlich veränderlichen elektromagnetischen Feldes?

Dieser Frage hat man zunächst die Fassung gegeben: 1) welche mechanischen Kräfte auf benachbarte Magnete

und Stromträger und 2) welche elektromotorischen Kräfte in benachbarten Leitern erzeugen Ströme in ungeschlossenen Bahnen? — und in weiterer Specialisirung: welches ist das allgemeinste Gesetz der mechanischen („ponderomotorischen") und elektromotorischen Einwirkung zweier Stromelemente auf einander? (W. Weber, Helmholtz u. A.) Dieses Vorgehen ist methodisch demjenigen analog, welches die ältere Darstellung der Elektrostatik beim Uebergang vom homogenen zum inhomogenen Dielektricum befolgte (s. in Kap. I, S. 97, und entsprechend in Kap. III, S. 205 ff.).

In anderer Weise hat Maxwell das Ziel zu erreichen gesucht. Er sah mit Faraday in der Umgebung elektrisirter Körper, wie in der Umgebung von Magneten und stromführenden Drähten veränderte Zustände des Raumes, — ein „elektromagnetisches Feld." Die Veränderungen in jedem Raumpunkt sind nach ihm vollständig charakterisirt durch Grösse und Richtung zweier veränderlicher Vectoren. Die Gesammtheit der Werthe dieser Feldvectoren in allen Raumpunkten bestimmt eindeutig — und unabhängig von den supponirten „Ursachen" der Veränderungen, den Elektricitätsmengen, magnetischen Mengen und Stromstärken — den elektromagnetischen Zustand des Raumes; er bestimmt insbesondere eindeutig dessen elektromagnetische Energie. Die Werthe der Vectoren in einem bestimmten Raumpunkt stehen in directem gesetzmässigem Zusammenhang lediglich mit den Werthen in den unendlich nahen Raumpunkten, — und nur in mittelbarem Zusammenhang mit irgend welchen Grössen, welche den Zustand in endlich entfernten Punkten charakterisiren.

Indem wir uns diesen Vorstellungen anschliessen, werden wir veranlasst, erstens die elektromagnetische Energie als ein Raumintegral darzustellen, dessen Element durch die Werthe der beiden Feldvectoren in einem Raumelement bestimmt ist; zweitens die Verallgemeinerung der Grundgesetze in einer Verallgemeinerung der Differentialgleichungen zu suchen, welche zwischen den elektrischen und magnetischen Vectoren bestehen.

Es ist dies das gleiche Verfahren, welches wir, im Anschluss an Maxwell, bereits in den früheren Abschnitten befolgt haben.

Das Verhältniss der beiden Theorien ist aber ein wesentlich verschiedenes auf dem bisher behandelten Gebiet der stationären Vorgänge einerseits, und auf dem nun zu behandelnden Gebiet der schnell veränderlichen Vorgänge andererseits. Auf jenem Gebiet war die experimentelle Kenntniss der Thatsachen dem Ausbau der Theorie voraufgegangen; den bekannten Thatsachen entsprechen die ältere wie die neuere Maxwell'sche Theorie mit gleicher Vollkommenheit; der Unterschied zwischen beiden ist lediglich formaler Natur (vgl. die citirten Stellen). — Ueber schnell veränderliche Vorgänge lagen zu Maxwell's Zeit ausreichende Erfahrungen nicht vor. Auf diesem Gebiet musste die Theorie Wegweiser für das Experiment sein; die verschiedenen Theorien unterschieden sich nach Umfang und Inhalt ihrer Voraussagungen. Die experimentelle Entscheidung ist das Verdienst von Hertz. Seine Versuche haben gezeigt, dass gegenüber allen älteren Darstellungen die Maxwell'sche Theorie nicht nur die einfachste, sondern auch die vollständigste Beschreibung der Thatsachen bildet.

Wir schreiten zur Aufstellung der Gleichungen, in welchen diese Theorie ihren kürzesten Ausdruck findet. Wir haben zu diesem Zweck an den bisher gewonnenen Gesetzen zwei Verallgemeinerungen vorzunehmen.

Die erste Verallgemeinerung betrifft das Gesetz der inducirten elektromotorischen Kräfte. Ein solches wurde bisher lediglich für lineare Strombahnen aufgestellt; wir haben es in folgender Form benutzt [Kap. V, (2)]:

$$iw = \mathcal{E} - \frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Den Inhalt des Kapitel V bildet wesentlich die Entwicklung dieser Gleichung. In derselben bezeichnet i einen längs der geschlossenen Curve s gleichförmigen Strom, und Q die magnetische Induction, welche durch s hindurchtritt. In dieser Form ist das Gesetz untrennbar verknüpft mit dem Begriff des geschlossenen Stromes. — Es giebt aber eine andre Form des Gesetzes [Kap. V, (1)]:

$$\int\limits_{O} E_s\, ds = -\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Hier ist eine Eigenschaft der elektrischen Feldintensität ausgesprochen: ihr Linienintegral über eine geschlossene Curve s ist nach dieser Gleichung bestimmt durch die zeitliche Aenderung des magnetischen Feldes in der Nachbarschaft dieser Curve. Die Gleichung ist bisher angewandt lediglich auf die Fälle, wo entweder die Aenderung von Q beliebig ist, die Curve s aber von einem linearen Leiter erfüllt wird (Kap. V), — oder die Curve s beliebig, Q aber stationär ist (Kap. I und II). Es ist logisch zulässig und naheliegend, der Gleichung Gültigkeit zuzuschreiben für eine beliebige geschlossene Curve s und beliebige Aenderungen von Q. Wir machen diese Annahme; d. h. wir stellen das Grundgesetz auf:

Das Linienintegral der elektrischen Feldintensität über irgend eine geschlossene Curve s ist gleich der durch V dividirten Abnahme der durch die Curve tretenden magnetischen Induction während der Zeiteinheit.

Bei den bisherigen Anwendungen des Satzes in Kapitel V war die Curve s unzweideutig bestimmt, auch wenn Bewegungen stattfanden: sie fiel stets mit dem linearen Leiter zusammen. Auf dem jetzigen erweiterten Gebiet kann die Bedeutung von s im Fall der Bewegung zweifelhaft sein. Wir schliessen einstweilen diesen Fall von unseren Betrachtungen aus und setzen für Kapitel VI und VII voraus: alle Körper sollen ruhen. (Die Erweiterung für bewegte Materie s. Kap. VIII B.)

Dann ist, da die Magnetisirung I fest an der Materie haftet, die Aenderung der Induction B identisch mit der Aenderung der Polarisation $\mathfrak{M} = \mu M$ (vgl. S. 242). Der Satz kann daher formulirt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mu M_N dS = -V\int\limits_O E_s\, ds. \tag{J}$$

Die Gleichung (J) ist, da sie für jede Fläche S gelten soll, ihrem Wesen nach eine Differentialgleichung; wir wollen sie in die entsprechende Form kleiden. Dies geschieht, indem wir für S ein Flächenelement wählen. Die Anzahl solcher möglicher Differentialformen ist unbegrenzt; wir wählen hier die Elemente des cartesianischen Coordinatensystems:

Es sei dS das Rechteck mit den Kanten dy und dz; dann ist (vgl. Kap. III, S. 223 f.)

$$M_N = M_x, \quad dS = dy\,dz, \quad \int\limits_O E_s\,ds = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dy\,dz,$$

also

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu M_x)}{\partial t} &= -V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\\
\frac{\partial(\mu M_y)}{\partial t} &= -V\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial(\mu M_z)}{\partial t} &= -V\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(J'')}$$

Die Klammergrössen der rechten Seite sind die rechtwinkligen Componenten des Vectors $P(E)$, der „Rotation“ von E. Bezeichnen wir noch den Vector, dessen Componenten $\frac{\partial M_x}{\partial t}$ .. sind, d. h. die Aenderungsgeschwindigkeit oder den „Anstieg“ von M, durch $\dot{M}$, so lassen sich die Gleichungen (J″) in folgender Form schreiben, welche von der Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem wiederum frei ist:

$$\mu\dot{M} = -V \cdot P(E). \qquad \text{(J')}$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung ist diese: man bestimme einerseits die magnetische Polarisation μM im Moment t und im Moment $t + dt$ nach Grösse und Richtung; der Vector, welcher durch geometrische Addition $(\mu M)_t$ zur Resultante $(\mu M)_{t+dt}$ ergänzt, ist $\mu\dot{M} \cdot dt$. $\mu\dot{M}$ heisse „Anstieg“ von μM. — Man bestimme andrerseits am gleichen Ort das Linienintegral von E, erstreckt um eine willkürlich gestellte Flächeneinheit. Für eine bestimmte Stellung der Fläche ist das Integral ein Maximum. Es heisse „Rotation“ von E ein Vector $P(E)$, der die Grösse dieses Maximalwerthes und die Richtung der (gegen den Umlauf) positiven Flächennormale besitzt. — Dann sind der Anstieg von μM und die Rotation von E parallel und entgegengesetzt gerichtet, und ihre Zahlwerthe stehen im constanten Verhältniss V.

Es folgt geometrisch: der Anstieg einer beliebigen Componente μM_N der magnetischen Polarisation, oder $\frac{\partial}{\partial t}(\mu M_N)$, ist gleich dem mit $-V$ multiplicirten Linienintegral von E, erstreckt um eine zu N senkrechte Flächeneinheit.

Specielle Formen des letzten Satzes sind in (J'') enthalten. Eine weitere Folgerung aus demselben ist (J). Vgl. Kap. III, l. c.

Als Anwendung der Gleichung (J) wollen wir die räumliche Vertheilung eines periodisch veränderlichen Stromes untersuchen. Der Leiter soll ein Draht vom Durchmesser $2r$ sein, der entweder geradlinig ausgestreckt ist, oder der wenigstens eine Curve von einem gegen r überall sehr grossen Krümmungsradius bildet. Innere elektromotorische Kräfte sollen in dem Draht nicht vorhanden, das Leitungsvermögen überall dasselbe sein. — Wenn die Strömung stationär ist, so ist sie dann gleichförmig über den Drahtquerschnitt verbreitet, und die gleiche in allen Querschnitten (s. Kap. II, S. 157 f.). Dies folgt aus den Bedingungen:

$$P(E) = 0\,, \text{ oder } \int\limits_{O} E_s ds = 0 \qquad \text{(C)}$$

und

$$\Gamma(A) = 0\,, \quad \text{wo } A = \lambda E.$$

Für die Vertheilung der magnetischen Feldintensität besteht dann weiter (s. Kap. IV) die Gleichung:

$$A = V \cdot P(M)\,, \text{ oder } \int\limits_{L} A_N dL = V \int\limits_{O} M_l dl\,, \qquad \text{(H)}$$

wo l die Randcurve von L.

Ist das Feld veränderlich, so gilt (C) nicht mehr; an seine Stelle tritt:

$$-V \cdot P(E) = \mu \dot{M} \quad \text{oder} \quad -V \int\limits_{O} E_s\, ds = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S} \mu M_N dS. \qquad \text{(J)}$$

Bezüglich der Gleichung (H) nehmen wir — bis auf weiteres — an, dass sie auch für veränderliche Felder gilt. Darin

liegt bereits, dass wir die Strömung als quasistationär voraussetzen; denn aus (H) folgt: $\Gamma(\Lambda) = 0$ (vgl. Kap. IV, S. 247). Diese Forderung soll in der Weise erfüllt sein, dass die Strömung auch jetzt durchweg parallel der Drahtaxe verläuft und in allen Querschnitten die gleiche ist. Man denke etwa den Draht zum Kreise gebogen, und einen Magneten in der Axe des Kreises bewegt; dann ergiebt sich das verlangte aus der Symmetrie.

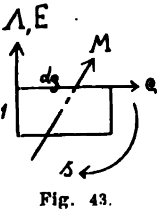


Fig. 43.

Aus (H) und (J) ist die Vertheilung des Stromes über den Drahtquerschnitt abzuleiten. Aus den geometrischen Voraussetzungen folgt, dass Λ, E, M nur Functionen des Abstandes ϱ von der Drahtaxe (und der Zeit) sein können, und dass M überall in concentrischen Kreisen um die Drahtaxe verläuft. Indem wir in (H) eine magnetische Kraftlinie für l wählen, erhalten wir:

$$\int_0^\varrho \Lambda \cdot 2\pi\varrho \cdot d\varrho = V \cdot 2\pi\varrho \cdot M, \tag{1'}$$

oder durch Differentiation

$$\Lambda\varrho = \lambda E\varrho = V \frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho M). \tag{1}$$

M umläuft positiv die, in der Richtung von E positiv gerechnete, Axe.

Als Fläche S der Gleichung (J) wählen wir ein Rechteck mit den Seiten 1 parallel und $d\varrho$ normal zur Axe; bedeutet dann N die Richtung von $+M$, so bezeichnet der Pfeil in Figur 43 die zugehörige Umlaufsrichtung für s. Es wird daher:

$$\int \mu M_N dS = \mu M \cdot d\varrho,$$

und

$$\int_{\circ} E_s ds = E_\varrho - E_{\varrho + d\varrho} = -\frac{\partial E}{\partial\varrho} d\varrho.$$

Also

$$V\frac{\partial E}{\partial \varrho} = \mu\frac{\partial M}{\partial t}. \tag{2}$$

Sobald also das Feld veränderlich ist, ist E nicht mehr gleichförmig über den Drahtquerschnitt, sondern Function von ϱ. Die Differentialgleichung, welche direct die räumliche und zeitliche Veränderung von E verknüpft, folgt aus (1) und (2) durch Elimination von M:

$$\lambda\mu\frac{\partial E}{\partial t} = V\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\mu\frac{\partial M}{\partial t}\right) \text{ nach (1)}$$

$$= V^2\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial E}{\partial \varrho}\right) \text{ nach (2), oder}$$

$$\lambda\mu\frac{\partial E}{\partial t} = V^2\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial E}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 E}{\partial \varrho^2}\right). \tag{3}$$

Das Feld möge nun periodisch veränderlich sein. Eine beliebig gegebene periodische Function der Zeit können wir uns nach einer Fourier'schen Reihe entwickelt denken. Wir haben es nun hier und in der Folge ausschliesslich mit der Auflösung solcher Differentialgleichungen zu thun, welche linear und homogen sind bezüglich der Componenten von E und M und ihrer Differentialquotienten. Aus beliebig vielen Lösungssystemen entsteht daher durch Addition stets wieder ein Lösungssystem. Es genügt deshalb, wie wir es hier und in Zukunft thun wollen, die periodischen Grössen als „einfach harmonische" (sinusartige) Functionen der Zeit vorauszusetzen. Es soll also an jeder Stelle des Drahtes

$$E = a\cos(\nu t + b) \tag{4'}$$

sein, wo ν eine Constante bezeichnet und Amplitude a und Phase b ausschliesslich Functionen von ϱ sind. Hierfür schreiben wir wiederum (vgl. Kap. V, S. 316f.)

$$E = f(\varrho)\cdot e^{\iota\nu t}. \tag{4}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in (3) folgt:

$$\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} - \iota\alpha f(\varrho) = 0, \tag{5}$$

wo

$$\alpha = \frac{\lambda \mu \nu}{V^2}. \tag{6}$$

Durch Einführung von

$$y = \varrho \cdot \sqrt{-\iota \alpha} \tag{7}$$

nimmt (5) die Form an:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} + f = 0. \tag{8}$$

Dies ist die Differentialgleichung der **Bessel'schen Functionen** von der Ordnung Null für das Argument y. Ein particuläres Integral ist die „Bessel'sche Function **erster** Art“ $J_0(y)$, welche für jedes endliche y endlich ist, aber für unendliches, nicht reelles y unendlich wird. Ein zweites particuläres Integral bildet die „Bessel'sche Function **zweiter** Art“ $K_0(y)$, welche für $y = 0$ unendlich wird, hingegen für unendliches y gegen Null convergirt. Aus beiden setzt sich das vollständige Integral der Gleichung (8) zusammen als

$$f(\varrho) = A \cdot J_0(y) + B \cdot K_0(y),$$

wo A und B willkürliche Constanten bezeichnen [s. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen; H. Weber, Zur Theorie der Bessel'schen Functionen, Mathemat. Annalen 37, S. 404, und eine Zusammenstellung der Resultate bei Sommerfeld, Wied. Ann. 67, S. 243]. Wir brauchen gemäss (4) die Function $f(\varrho)$ im Geltungsbereich $\varrho = 0$ bis $\varrho = r$, und in diesem Bereich muss sie endlich sein. Daher ist die für uns allgemeinste Lösung:

$$f(\varrho) = A \cdot J_0(y),$$

also

$$E = A \cdot J_0(y) \cdot e^{\iota \nu t}. \tag{9}$$

Die Function $J_0(y)$ lässt sich u. A. in Form einer unendlichen Reihe darstellen; es ist

$$J_0(y) = 1 - \frac{y^2}{2^2 \cdot 1^2} + \frac{y^4}{2^4 \cdot (1 \cdot 2)^2} - \frac{y^6}{2^6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{y^8}{2^8 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - + \cdot \tag{10}$$

Setzen wir daher

$$\frac{\alpha\varrho^2}{4} = \beta, \tag{11}$$

so wird wegen (7):

$$J_0(y) = \left(1 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{576} - \cdot + \cdot\cdot\right) + \iota\left(\beta - \frac{\beta^3}{36} + \cdot - \cdot\cdot\right) \tag{12}$$

Ferner: wenn y sehr gross ist, so ist ein Näherungswerth für $J_0(y)$:

$$J_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot \frac{1}{\iota}\left(e^{\iota\left(y+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-\iota\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}\right).$$

Wir entnehmen aus (7) den Werth

$$\iota y = +(\iota + 1)\varrho\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \tag{7a}$$

und erhalten mit diesem

$$J_0(y) = \frac{e^{\iota y}}{\sqrt{2\pi\iota y}} \tag{13}$$

als eine Näherung, falls $\varrho\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ eine grosse Zahl ist. (Der Grad der Näherung ist aus den vollständigen Formeln bei Sommerfeld zu ersehen.) —

Amplitude und Phase von E in (4') sind Functionen von ϱ. Wir fragen zunächst nach der Amplitude; sie ist gleich dem Modul von E in (4) oder (9).

Ist β eine kleine Zahl, so giebt (12) genähert:

$$\text{Mod}\left(\frac{E}{A}\right) = 1 + \frac{\beta^2}{4}.$$

Der grösste Werth von β ist

$$\beta_1 = \frac{\alpha r^2}{4} = \frac{\lambda\mu\nu r^2}{4V^2}. \tag{14}$$

Ist ν so klein, dass dieses β_1 eine kleine Zahl ist, so wird folglich für jeden vorkommenden Werth von ϱ genähert:

$$\text{Mod}\,\frac{E(\varrho)}{E(0)} = 1 + \left(\frac{\alpha\varrho^2}{8}\right)^2; \tag{15}$$

d. h. das elektrische Feld, und somit die Strömung, ist annähernd **gleichförmig** über den Querschnitt verbreitet.

Ist hingegen ν so gross, dass β_1 eine grosse Zahl ist, und ist δ klein gegen r, so gilt nach (9), (13) und (7a) genähert:

$$\text{Mod}\,\frac{E(r-\delta)}{E(r)} = \frac{e^{-\delta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{1-\frac{\delta}{r}}},\ \text{oder}$$

$$\text{Mod}\,\frac{E(r-\delta)}{E(r)} = e^{-\delta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}; \tag{16}$$

d. h. die Amplitude der Strömung sinkt auf $\frac{1}{e}$ ihres Randwerthes in einer Tiefe

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}. \tag{16a}$$

Um diese Resultate auf bestimmte Fälle anzuwenden, benutzen wir, dass [s. Kap. IV, (34)]

$$\frac{\mu_0\lambda_1}{4\pi V^2} = 1{,}063\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}$$

ist, wo λ_1 sich auf Quecksilber, μ_0 auf das Vacuum bezieht. Es sei nun der Drahtradius $r = 0{,}1$ cm, und die Wechselzahl $\frac{\nu}{\pi} = 10^6\,\frac{1}{\text{sec}}$. Besteht dann der Draht aus Kupfer, so ist $\frac{\mu}{\mu_0} = 1$ und $\frac{\lambda}{\lambda_1} = 55$. Dies giebt: $\alpha r^2 = 230$; daher ist (16) als Näherung brauchbar, und es folgt weiter $\delta_1 = \frac{1}{107}$ cm. Besteht der Draht aus Eisen, und nehmen wir die mittleren Werthe $\frac{\mu}{\mu_0} = 1000$, $\frac{\lambda}{\lambda_1} = 8$ an, so wird $\alpha r^2 = 34000$ und $\delta_1 = \frac{1}{1300}$ cm.

Ausser der Amplitude ist auch die Phase von E eine Function von ϱ; d. h. die Vertheilung der Strömung über den Querschnitt ist einem periodischen Wechsel unterworfen. — Nun waren der Widerstand w und der Selbstinductionscoefficient p eines Leiters durch folgende Gleichungen definirt: bezeichnet i den Strom durch einen willkürlichen Querschnitt, so ist (a) wi^2 die in der Zeiteinheit entwickelte Joule'sche Wärme, und (b) $\frac{1}{2} pi^2$ die magnetische Energie des zum Strom i gehörenden Feldes.

Aus diesen Definitionen ergeben sich w und p als constante Grössen nur, solange die Vertheilung der Strömung über den Querschnitt unveränderlich ist. Die Definitionen werden also in dem jetzt vorliegenden Fall unbrauchbar. Neben den Beziehungen (a) und (b), welche w und p unabhängig von einander definiren, bestand aber noch eine wichtige Beziehung, in welcher sie gemeinsam auftreten: es war wi die Summe aller elektromotorischen Kräfte im Kreise; demnach für alle Vorgänge, bei welchen sich p nicht ändert,

$$wi + p\frac{\partial i}{\partial t} = \mathcal{E}_f \tag{c}$$

die Gesammtheit der elektromotorischen Kräfte mit Ausnahme der selbstinducirten. Dieses $\mathcal{E}_f$ ist, wenn „innere" elektromotorische Kräfte nicht vorhanden sind, derjenige Antheil der elektromotorischen Kraft, welcher von der Aenderung des „fremden", nicht durch den Strom selbst hervorgerufenen Feldes herrührt, — die „fremde elektromotorische Kraft", wie wir sie nennen wollen.

Damit die Grösse $\mathcal{E}_f$ der Gleichung (c) eine bestimmte Bedeutung habe, muss der Leiter gegenüber den fremden elektromotorischen Kräften als „linear" betrachtet werden dürfen; d. h. seine Querschnittsdimensionen müssen verschwindend klein sein gegenüber den Entfernungen der Magnete und Ströme, welche das fremde Feld erzeugen. Dies sei vorausgesetzt.

Dann wollen wir den Widerstand w' und den Selbstinductionscoefficienten p' des Leiters für Ströme, welche einfach-harmonische Functionen der Zeit sind, aus der Beziehung (c) definiren. Dies ist stets möglich; denn die

nach unserer Voraussetzung allgemeinsten Ausdrücke für $\mathcal{E}_f$ und i sind von der Form:

$$i = a \sin \nu t$$

$$\mathcal{E}_f = b \sin \nu t + c \cos \nu t,$$

wo a, b, c Constanten. Daraus:

$$\mathcal{E}_f = \frac{b}{a} i + \frac{c}{a\nu} \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Also giebt es in unserm Fall stets constante reelle Grössen w', p', welche die Gleichung befriedigen:

$$w' i + p' \frac{\partial i}{\partial t} = \mathcal{E}_f. \tag{17}$$

Nun werden wir zeigen (s. S. 363), dass für das aus (17) definirte w' weiter gilt:

$$\int_0^T i^2 w' \, dt = \int_0^T J dt, \tag{18}$$

wo $T = \frac{\pi}{\nu}$ die Dauer der halben Stromperiode und J die Joule'sche Wärme bezeichnet. Aus den Constanten w' und p' erhalten wir also nicht nur die Stromgleichung in derselben Form, in welcher sie sich aus Widerstand und Selbstinductionscoefficient für Ströme von unveränderlicher Vertheilung ergiebt; sondern wir erhalten auch aus w' den richtigen Betrag der Joule'schen Wärme, zwar nicht für jedes Zeitelement, wohl aber im zeitlichen Mittelwerth.

Wir wollen nun w' und p' für unsern Draht bestimmen. Unsere obigen Betrachtungen beschränkten sich auf das Innere des Drahtes; die fremde elektromotorische Kraft $\mathcal{E}_f$ wurde nicht eingeführt. Der Werth von $\mathcal{E}_f$, welcher der betrachteten Strömung entspricht, muss also erst gefunden werden.

Wir construiren eine Fläche S_0, welche den den Draht umgebenden Raum τ_2 einfach zusammenhängend macht (vgl. S. 295f.), deren Randcurve s also auf der Drahtoberfläche liegt; die Länge des Drahtes und der Curve s sei l. Die magnetische Induction Q durch S_0 zerlegen wir in

die Antheile Q' und Q'', welche bezw. vom Strom i und von dem „fremden“ Felde herrühren. Dann ist

$$-\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{\circlearrowleft} E_s\,ds = l\cdot E(r) \tag{19}$$

$$-\frac{1}{V}\frac{\partial Q''}{\partial t} = \mathcal{E}_f. \tag{20}$$

Wir setzen weiter

$$\frac{Q'}{V} = iP. \tag{21}$$

Aus unserer Voraussetzung, dass der Krümmungsradius R der Drahtcurve durchweg sehr gross sein soll gegen den Drahtradius r, folgt dann genau wie S. 297: der Coefficient P ist unabhängig von der Vertheilung der Strömung über den Drahtquerschnitt; er ist also auch für unsere Ströme eine Constante, und sein Werth ist unabhängig von der Schwingungszahl. Es bedeutet ferner (vgl. S. 295) $^1/_2\,Pi^2$ die magnetische Energie des Raumes τ_2, welche dem Strom i entspricht. — Aus (19), (20), (21) folgt:

$$\mathcal{E}_f = lE(r) + P\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{22}$$

Der Vergleich mit (17) ergiebt:

$$w'i + (p' - P)\frac{\partial i}{\partial t} = lE(r). \tag{23}$$

Es muss also $E(r)$ linear durch i und $\frac{\partial i}{\partial t}$ ausgedrückt werden, und es muss der Coefficient P für die gegebene Drahtcurve berechnet sein. Dann sind die Grössen w' und p' bekannt, und zugleich ist die fremde elektromotorische Kraft $\mathcal{E}_f$ bestimmt, welche dem Strom i entspricht, — oder umgekehrt der Strom i, welcher zu dem gegebenen periodischen $\mathcal{E}_f$ gehört.

Wir schliessen hier den Beweis der Gleichung (18) an: es werde gesetzt

$$J + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau_1} {}^1\!/_2\,\mu M^2\,d\tau = \Omega,$$

wo τ_1 das Drahtvolumen bezeichnen soll; dann ist

$$\Omega = l \int_0^r \left(\frac{A^2}{\lambda} + \mu M \frac{\partial M}{\partial t} \right) 2\pi\varrho \cdot d\varrho ,$$

oder nach (1) und (2)

$$\Omega = l\, V 2\pi \int_0^r \left[E \frac{\partial}{\partial\varrho} (\varrho M) + \varrho M \frac{\partial E}{\partial\varrho} \right] d\varrho$$

$$= l\, V 2\pi r\, M(r) \cdot E(r) ,$$

oder nach (1′)

$$\Omega = li\, E(r) .$$

Also folgt aus (23):

$$w' i^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\tfrac{1}{2} (p' - P) i^2 \right] = J + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_1} \tfrac{1}{2} \mu M^2 d\tau .$$

Da aber i^2 und M^2 die Periode T haben, so erhält man hieraus durch Integration die Gleichung (18). [Die Form des Beweises, nicht aber das Resultat, hängt davon ab, dass der Leiter einen kreisförmigen Querschnitt habe; dies, sowie die physikalische Bedeutung der Grösse Ω wird sich in § 5 ergeben.]

Wir schreiben nun

$$i = a e^{\iota\nu t} ,$$

dann folgt aus (23):

$$w' + \iota\nu (p' - P) = \frac{l E(r)}{i} . \tag{24}$$

Nun ist nach (1′):

$$i = V \cdot 2\pi r \cdot M(r) = \frac{V \cdot 2\pi r}{\iota\nu} \frac{\partial M(r)}{\partial t} ,$$

oder nach (2):

$$i = \frac{V^2 2\pi}{\iota\nu\mu} \left(\varrho \frac{\partial E}{\partial\varrho} \right)_{\varrho = r} ; \tag{25}$$

also: $$w' + \iota\nu(p' - P) = \frac{\iota l\mu\nu}{2\pi V^2}\left(\frac{E}{\varrho\frac{\partial E}{\partial\varrho}}\right)_{\varrho=r},$$

oder nach (7) und (9):

$$= \frac{\iota l\mu\nu}{2\pi V^2}\left(\frac{J_0(y)}{y\cdot J_0'(y)}\right) \text{für } y = r\sqrt{-\iota\alpha}. \quad (26)$$

Das heisst: w ist der reelle, $\nu(p' - P)$ der imaginäre Antheil der rechten Seite.

Aus der Reihenentwicklung (10) folgt:

$$\left.\begin{aligned} J_0(y) &= 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{576} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n!)^2}, \\ \text{wo } x &= -\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\iota\alpha\varrho^2}{4} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$y\cdot J_0'(y) = 2x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{144} + \cdots\right)$$

$$\frac{J_0(y)}{y\cdot J_0'(y)} = \frac{1}{2x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{48}\cdots\right).$$

Also aus (26), wenn wieder das Zeichen β_1 aus (14) eingeführt wird:

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{l}{\lambda\pi r^2}\left(1 + \frac{\beta_1{}^2}{12} + \cdots\right) \\ p' &= P + \frac{l\mu}{4\pi V^2}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{\beta_1{}^2}{48} + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Diese Entwicklungen sind für kleine Werthe von

$$\beta_1 = \frac{\alpha r^2}{4} = \frac{\lambda\mu\nu r^2}{4V^2}$$

brauchbar. Für verschwindende Werthe dieser Grösse geben sie:

$$w' = \frac{l}{\lambda\pi r^2}$$

$$p' = P + \frac{l}{4\pi V^2}\frac{\mu}{2}$$

und dies sind thatsächlich Widerstand w und Selbstinductionscoefficient p des Drahtes für stationären Strom. — Vgl. Kap. IV, S. 296, wo W_{m1} die Energie des vom Draht erfüllten Raumes, also

$$W_{m1} = {}^1\!/_2 (p' - P) i^2,$$

und ferner $2h$ die Drahtlänge l ist; endlich μ_1 die Permeabilität des Drahtes bezeichnet.

Für grosse Werthe von y erhält man aus (13) genähert:

$$J_0'(y) = \iota J_0(y),$$

und folglich für grosse Werthe von β_1 aus (26), da nach (7a) $\frac{1}{y} = \frac{1+\iota}{r\sqrt{2\alpha}}$ zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{l}{\lambda \pi r^2} \sqrt{\frac{\beta_1}{2}} = \frac{l}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot \delta_1} \\ p' &= P + \frac{l\mu}{4\pi V^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\beta_1}} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

wo δ_1 die durch (16a) definirte Grösse bezeichnet. Für unbegrenzt wachsende Wechselzahl wächst daher w' über jede Grenze; genauer: es wird unendlich gross gegenüber dem Widerstand w für stationären Strom; p' aber geht gegen den festen Grenzwerth P. Dies entspricht dem oben gefundenen: die Strömung beschränkt sich auf eine verschwindend dünne Oberflächenschicht; man erhält den Widerstand, also die Joule'sche Wärme, richtig, indem man die Schicht, innerhalb welcher die Strömung auf $\frac{1}{e}$ des Randwerths absinkt, als gleichförmig durchströmt annimmt; — das magnetische Feld beschränkt sich auf den äusseren Raum; seine Energie hat als Grenzwerth: ${}^1\!/_2 P i^2$.

Der Coefficient P ist in Kapitel IV, Gleichung (63) und (64) für zwei specielle Fälle gefunden: für zwei parallele Drähte von dem gegen r grossen Abstand a und der gegen a grossen Länge h ist

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{\mu_2}{4\pi V^2} 4 \lg \frac{a-r}{r},$$

und für einen Kreis von dem gegen r grossen Radius R ist

$$P = \frac{\mu_2}{4\pi V^2} 4\pi R \left[\lg\left(\frac{8R}{r}\right) - 2\right],$$

wo μ_2 jedesmal die Permeabilität des den Draht umgebenden Mediums bezeichnet. Im einen, wie im andern Fall ändert sich p' sehr wenig mit der Wechselzahl, wenn der Draht aus Kupfer besteht; es kann sich hingegen sehr stark ändern, wenn der Draht aus Eisen besteht.

§ 2. Die zweite Grundgleichung.

Die zweite der Verallgemeinerungen, auf welche oben (S. 351) hingewiesen wurde, betrifft die Gleichung

$$\int A_N dL = V \int_O M_l dl \qquad \text{(H)}$$

oder

$$A = V \cdot P(M). \qquad \text{(H')}$$

Durch diese Gleichung und die Gleichung (E):

$$\Gamma(\mu M) = -\Gamma(I)$$

ist das magnetische Feld M bestimmt, sobald überall die Strömung A und die Magnetisirung I gegeben ist (s. S. 249). Nun kann aber die Gleichung (H) nur gelten für eine Strömung, welche der Bedingung

$$\Gamma(A) = 0$$

genügt, d. h. für „geschlossene“, oder, wie wir sie genannt haben, für „quasistationäre“ Ströme. Der Frage: „wie ist das magnetische Feld ungeschlossener Ströme zu bestimmen?“ können wir die Fassung geben: „welcher Grösse ist $V \cdot P(M)$ gleich, wenn $\Gamma(A)$ von Null verschieden ist?“ Es muss $V \cdot P(M)$ ein Vector X sein, welcher allgemein der Bedingung $\Gamma(X) = 0$ genügt, und welcher für stationäre Zustände in A übergeht. In Zeichen: wir können schreiben

$$X_l = A_l + \frac{\partial}{\partial t} Y_l,$$

wo
$$-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(Y) = \Gamma(\Lambda).$$

Nun ist allgemein [s. Kap. II, Gleichung (1′)]:
$$-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\varepsilon E) = \Gamma(\Lambda);$$

also muss
$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(Y) = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\varepsilon E)$$

sein. Die einfachste Annahme, welche eine mögliche Verallgemeinerung von (H) liefert, ist daher:
$$Y = \varepsilon E.$$

Dies ist Maxwell's Annahme; sie liefert die zweite unserer Grundgleichungen. Dieselbe lautet in allgemeinster Form:
$$\int\limits_L \left(\Lambda_N + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N)\right) dL = V \int\limits_{\mathcal{O}} M_l\, dl, \tag{K}$$

wo l die, bezüglich N positive, Randcurve der Fläche L bezeichnet.

Im folgenden soll allgemein, wenn A und B zwei Vectoren sind, das Zeichen $A + B$ die Resultante bedeuten, d. h. einen Vector C, welcher durch die Gleichung $C_l = A_l + B_l$ definirt ist. Bezeichnen wir dann noch durch $\dot{E}$ den „Anstieg" von E (vgl. $\dot{M}$ S. 353), so lautet (K) in Differentialform:
$$\Lambda + \varepsilon \dot{E} = V \cdot P(M). \tag{K′}$$

Ausgeführt für Cartesische Coordinaten, bedeutet dies:
$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_x + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_x) &= V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\\
\Lambda_y + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_y) &= V\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right)\\
\Lambda_z + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_z) &= V\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{K″}$$

wo durchweg

$$A_l = \lambda(E_l - K_l).$$

Die Gleichung: $\Gamma(A) + \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\varepsilon E) = 0$, in Folge deren der Ansatz (K) möglich wurde, gilt allgemein, in Isolatoren sowohl wie in Leitern. Wir dürfen daher — und wir werden mit Maxwell — auch den Gleichungen (K) allgemeine Gültigkeit züschreiben in allen isotropen ruhenden Körpern.

Die Maxwell'sche Hypothese, welche von der speciellen Gleichung (H) zu der allgemeinen Gleichung (K) führt, ist im vorstehenden auf ihren formal einfachsten Ausdruck gebracht. Sie gewinnt einen anschaulichen Inhalt, sobald wir uns die im § 2 des zweiten Kapitels (S. 131) vorgetragene Auffassung zu eigen machen. Stellen wir uns vor, in jedem Körper zerfielen primär fortdauernd elektrische Kraftlinien, und zwar im Betrage

$$A_N = \lambda\,(E_N - K_N)$$

für die Zeiteinheit und die zu N normale Flächeneinheit, und es käme der thatsächliche Kraftlinienbetrag secundär in jedem Moment zu Stande als Resultat dieses spontanen Zerfalls und gleichzeitiger Energiezufuhr von aussen. Dann ist für die obige Zeit und Fläche:

thatsächliche Zunahme der Kraftlinien

= neu entstehende — zerfallende

oder: $$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N) = \text{neu entstehende} - A_N$$

oder:

$$\text{neu entstehende Kraftlinien} = A_N + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N)\,.$$

Im stationären Zustand hat demnach A_N zwei Bedeutungen; es giebt sowohl den Betrag 1) der zerfallenden, wie 2) der neu entstehenden Kraftlinien an. Diesem Betrage ist das mit V multiplicirte Linienintegral von M um die Fläche erfahrungsmässig gleich.

Wenn man diesen Erfahrungssatz auszudehnen sucht auf den allgemeinen Fall nicht-stationärer Zustände, so hat man

zunächst zur Wahl, das Linienintegral einer der beiden Grössen unter 1) oder 2) gleich zu setzen, welche jetzt verschiedene Werthe besitzen. Aber der Ansatz 1) erweist sich als unmöglich, da der Betrag der zerfallenden Kraftlinien oder der Strömung, über eine geschlossene Fläche summirt, nicht mehr allgemein Null ist. Es bleibt als möglicher Ansatz nur der zweite, welcher den Betrag der neu entstehenden Kraftlinien allgemein als Werth des Integrals vorschreibt. Dies ist aber der Maxwell'sche Ansatz. — Durch die hier vorgetragene Auffassung tritt der hypothetische Inhalt von (K) zugleich in die vollkommenste Analogie zu dem thatsächlichen Inhalt von (J). Denn (K) bedeutet in dieser Anschauung:

$$V\int_{O} M_l dl = \left\{ \begin{array}{l} \text{Zahl der in der Zeiteinheit durch } l \text{ neu hin-} \\ \text{durchtretenden elektrischen Kraftlinien,} \end{array} \right.$$

während (J) thatsächlich bedeutet:

$$-V\int_{O} E_s ds = \left\{ \begin{array}{l} \text{Zahl der in der Zeiteinheit durch } s \text{ neu hin-} \\ \text{durchtretenden magnetischen Kraftlinien.} \end{array} \right.$$

In einem Fall überträgt sich diese vollkommene Analogie aus der blossen Vorstellung auf die Thatsachen und die sie darstellenden Gleichungen: wenn es sich um Isolatoren handelt. Dann ist $\Lambda = 0$; die „neu hindurchtretenden elektrischen Kraftlinien" sind identisch mit der thatsächlichen und beobachtbaren Vermehrung der Kraftlinien, und die Gleichungen werden:

$$-V\int_{O} E_s ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_{S} \mu M_N dS \qquad \text{(J)}$$

$$+V\int_{O} M_l dl = \frac{\partial}{\partial t}\int_{L} \varepsilon E_N dL. \qquad \text{(K}_1\text{)}$$

Der Inhalt der Gleichung (K) lässt sich am einfachsten so aussprechen:

Die Aenderung der elektrischen Polarisation in der Zeiteinheit ist gleichwerthig einer elektrischen Strömung von gleichem numerischem Betrage.

Dieser Satz ist indirect in weitestem Umfange bestätigt durch die in Kapitel VII zu besprechenden Versuche. Eine directe Bestätigung fand er zuerst durch Versuche von Röntgen (Sitzungsber. der Berliner Akademie 1885, S. 195), — und dann in einfacherer Form und grösserem Massstabe durch Versuche von Hertz (Ausbreitung der elektrischen Kraft S. 102).

§ 3. Die Maxwell'schen Gleichungen. — Deduction der Gesetze der stationären Felder.

Zu den Grundgleichungen (J) und (K) fügen wir noch die dritte wesentliche Annahme hinzu,

dass die Ausdrücke in (B) und (F) stets — d. h. auch für beliebig veränderliche Felder — den Werth der elektrischen, bezw. magnetischen Energie angeben.

Unsere Voraussetzungen sind also von jetzt an: ein Raum τ, welcher von beliebigen ruhenden isotropen Körpern erfüllt ist, besitzt elektromagnetische Energie vom Betrage

$$W = W_e + W_m,$$

wo

$$W_e = {}^1\!/_2 \int \varepsilon E^2 d\tau \qquad \text{(B)}$$

$$W_m = {}^1\!/_2 \int \mu M^2 d\tau \qquad \text{(F)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mu M_N dS = - V \int_{\bigcirc} E_s ds \qquad \text{(J)}$$

$$\int \left(A_N + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N)\right) dL = V \int_{\bigcirc} M_l dl, \quad A_N = \lambda(E_N - K_N). \qquad \text{(K)}$$

Hier bedeuten E und M zwei variable Vectoren, V eine universelle Constante, λ, ε, μ, K gegebene Körperconstanten, und zwar λ, ε, μ positive Zahlgrössen, K einen in Leitern gegebenen Vector, welcher überall, wo der Leiter homogen ist, verschwindet. (Die Benennungen für alle diese Grössen sind früher angegeben.)

Unser Gleichungssystem fällt im Wesen, wenn auch nicht genau der Form nach, zusammen mit dem Gleichungssystem, in welchem Maxwell seine elektromagnetische Theorie zusammengefasst hat. Wir bezeichnen es als „die Maxwell'schen Gleichungen".

Wir sind zu denselben gelangt durch eine Reihe von Verallgemeinerungen, die wir schrittweise an den directen Ergebnissen der Beobachtungen anbrachten, — auf inductivem Wege. Von jetzt an wollen wir deductiv verfahren: wir sehen ab von aller Erfahrung und betrachten die Maxwell'schen Gleichungen als die ausschliesslichen Grundlagen unserer ferneren Untersuchungen. Aus ihnen werden die Erfahrungsthatsachen, auf die wir uns bisher stützten, folgen, — und es werden sich weitere Folgerungen ergeben, welche durch Beobachtung geprüft sind und mit den Ergebnissen der Beobachtung verglichen werden sollen. (In den wenigen Fällen, wo wir eine Thatsache herbeiziehen, welche nicht aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt, wird dies ausdrücklich erwähnt werden.)

Zunächst zeigen wir, dass die Grundlagen unserer bisherigen Betrachtungen in den Maxwell'schen Gleichungen enthalten sind.

Endlichkeit und Stetigkeit. — W muss eine endliche Grösse sein für jeden Raum τ. Daraus folgt, dass E und M durchweg endlich sein müssen, — und ferner, dass sich stets eine geschlossene Fläche S_0 construiren lassen muss derart, dass die Beiträge zu W, welche von dem Raum ausserhalb S_0 herrühren, unter jeder vorgeschriebenen Grenze bleiben. Es muss also sein, wenn r den Abstand von einem im endlichen gelegenen, übrigens willkürlichen Punkt bezeichnet,

$$\lim \int_r^\infty \varepsilon E^2 r^2 dr = 0 \text{ für } r = \infty$$

oder

$$\lim E^2 r^2 = \frac{a}{r^k},$$

wo a endlich und $k > 1$, oder

$$\lim E = \frac{a}{r^m},$$

wo $m > {}^3/_2$. Das gleiche folgt für lim M. — Wir haben früher, wie üblich, die Annahme benutzt, dass E und M für $r = \infty$ verschwinden sollen wie $\frac{1}{r^m}$, wo $m > 2$; es genügt aber für alle Folgerungen die Annahme $m > {}^3/_2$, wovon man sich leicht überzeugt. —

Die Gleichungen (J) und (K) sollen überall gelten; sie sollen also Beziehungen zwischen endlichen Grössen ausdrücken auch an denjenigen Stellen des Raumes, wo sich etwa die Feldgrössen sprungweise ändern. Sei S eine solche Unstetigkeitsfläche, N eine der Normalen von dS. Wir wählen für den Augenblick N als z-Axe. Dann folgt aus der Form (J″) der Gleichung (J), dass $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ und $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ auch an dS endlich sein, d. h. dass E_x und E_y auch beim Durchgang durch dS sich stetig ändern müssen. Das gleiche folgt aus (K″) für M_x und M_y. Befreit von der Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem, lauten diese Sätze:

Auch dort, wo beim Durchgang durch eine Fläche S etwa die constanten und variablen Feldgrössen sich sprungweise ändern, gehen doch die tangentialen Componenten der beiden Feldintensitäten stets stetig über. In Zeichen: nach Grösse und Richtung ist stets

$$E_{S1} = E_{S2}, \quad M_{S1} = M_{S2}. \tag{30}$$

Wählen wir nochmals N als z-Axe, so folgt weiter aus (J″): E_x und E_y müssen beim Durchgang durch S sich stetig ändern nicht nur für einen Punkt der Fläche, sondern für jeden Punkt des zu z normalen Flächenelements dS. Das heisst u. A.: auch $\frac{\partial E_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ müssen stetig sein. Daraus aber folgt nach der dritten der Gleichungen (J″): $\frac{\partial}{\partial t}(\mu M_z)$ ist stetig. In der gleichen Weise folgt aus der dritten der Gleichungen

(K''): $A_z + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_z)$ muss stetig sein. Das heisst, ohne Rücksicht auf ein bestimmtes Coordinatensystem:

Auch an Unstetigkeitsflächen S gelten für die Normalcomponenten der beiden Polarisationen und der Strömung die Bedingungen:

$$\frac{\partial(\mu M_N)}{\partial t} \text{ und } A_N + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N) \text{ stetig.}$$

Oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mu_1 M_{N_1} + \mu_2 M_{N_2}) &= \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_N(\mu M) = 0 \\ (A_{N_1} + A_{N_2}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1 E_{N_1} + \varepsilon_2 E_{N_2}) &= \Gamma_N(A) + \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_N(\varepsilon E) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Die Gleichungen (31) folgten aus den Gleichungen (30), indem zu beiden Seiten der Fläche S die Gleichungen (J) und (K) als gültig angenommen wurden. Sie enthalten also keine von (30) unabhängigen Stetigkeitsbedingungen für die Unbekannten dieser Gleichungen.

Elektrische und magnetische Mengen; elektrische Strömung. — Wir wenden die Gleichungen (J) und (K) auf geschlossene Flächen S, bezw. L an; dann verschwinden die Integrale der rechten Seiten, und es kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int \mu M_N\, dS &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon E_N\, dS &= \int A_N\, dS \end{aligned}\right\} \text{ für jede geschlossene Fläche } S. \quad (32)$$

Oder

$$\int \mu M_N\, dS = \Sigma m \quad (32\text{a})$$

$$\int \varepsilon E_N\, dS = \Sigma e, \quad (32\text{b})$$

wo

$$-\frac{\partial \Sigma e}{\partial t} = \int A_N\, dS, \quad (32\text{c})$$

mit folgender Bedeutung der neu eingeführten Zeichen:

Σm ist für jede geschlossene Fläche S eine unveränderliche Grösse; sie heisst die von S eingeschlossene magnetische Menge.

Σe ist eine unveränderliche Grösse für jede Fläche S, an welcher durchweg $\lambda = 0$ ist, d. h. welche in „Isolatoren" verläuft. Sie heisst allgemein die von S eingeschlossene elektrische Menge. Für eine beliebige geschlossene Fläche S ist ihre zeitliche Aenderung in der gleichen Weise durch den Vector A bestimmt, in welcher die zeitliche Aenderung des materiellen Inhalts von S durch dessen Strömung bestimmt sein würde. A heisst daher die elektrische Strömung.

Die Gleichungen (32a), (32b), (32c) sind bezw. identisch mit den früheren Gleichungen (E), (A), und (1) in Kapitel II. — Die Gleichungen (32) lauten in Differentialform:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma(\mu M) = 0 \\ &\Gamma(A) + \frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma(\varepsilon E) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Gleichungen (33) kann man, bezogen auf Cartesische Coordinaten, erhalten, indem man die drei Gleichungen (J''), bezw. (K'') der Reihe nach, nach x, y und z differenzirt und addirt; sie lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\mu M_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu M_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu M_z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma_\tau(\mu M) = 0 \\ &\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right) \\ &\qquad = \Gamma_\tau(A) + \frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma_\tau(\varepsilon E) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{33a}$$

Die auf eine Unstetigkeitsfläche S bezügliche Form von (33) haben wir bereits unter (31) gefunden. —

Eindeutige Bestimmtheit des elektromagnetischen Feldes. — Das Feld E, M ist zu jeder Zeit bestimmt, wenn es in einem beliebigen Moment willkürlich gegeben ist. Dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen (J'')

(K''): Für den Moment t können die sechs Grössen $E_x \ldots M_z$ willkürlich gewählt werden; die Gleichungen bestimmen dann lediglich die sechs Grössen $\frac{\partial E_x}{\partial t} \cdots \frac{\partial M_z}{\partial t}$, d. h. also: sie bestimmen zusammen mit den gegebenen Werthen die sechs Grössen $E_x \ldots M_z$ für den Moment $t + dt$. Aus diesen Werthen folgen die Werthe für den nächsten Moment und so fort. (Vgl. auch unten S. 405 f.)

Stationäre Felder. — Es sei speciell für $t = 0$ das Feld (E_0, M_0) so gegeben, dass durchweg

$$P(E_0) = 0 \quad \text{und} \quad V \cdot P(M_0) = \lambda (E_0 - K)$$

ist. Dann bleibt dieses Feld unverändert bestehen.

Beweis: der Ansatz $E = E_0$ und $M = M_0$ genügt erstens den Anfangsbedingungen. Er ergiebt ferner

$$\dot{M} = 0, \quad P(E) = 0$$

und

$$\dot{E} = 0, \quad V \cdot P(M) = A$$

und befriedigt somit die Gleichungen (J') und (K'). — Also: ein Feld, für welches im ganzen Raum gilt

$$P(E) = 0 \text{ und } V \cdot P(M) = A,$$

ist stationär.

Andrerseits folgt aus (J') und (K') sofort: wenn das Feld stationär, also $\dot{M} = \dot{E} = 0$ sein soll, so muss

$$P(E) = 0 \text{ und } V \cdot P(M) = A$$

sein.

Wir haben also in diesen beiden Gleichungen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des stationären Zustandes.

Sie sind identisch mit unseren früheren Gleichungen

$$\int\limits_{\bigcirc} E_l \, dl = 0 \tag{C}$$

und

$$V \int\limits_{\bigcirc} M_l \, dl = \int A_N \, dL. \tag{H}$$

Aus (C) folgt (s. Kap. I, S. 44): E ist vollständig bestimmt, sobald noch überall eine Function $\Gamma(\alpha E)$ bekannt ist, wo α eine gegebene positive Grösse bezeichnet. (Dass E ausserdem in unendlicher Entfernung der Bedingung genüge, welche für jedes Feld gilt, wird hier und im folgenden stets stillschweigend vorausgesetzt.) —

Und weiter: E ist für einen begrenzten Raum τ bestimmt, wenn in τ überall $\Gamma(\alpha E)$ bekannt ist, und ferner entweder E_n an der gesammten Oberfläche S von τ, oder E_S und zugleich $\int_{S'} \varepsilon E_n dS'$ für jedes zusammenhängende Stück S' von S. [Der Beweis folgt leicht aus dem Satz g) S. 48.]

Nun folgt aus (H): $\Gamma(A) = 0$, d. h.

$$\Gamma(\lambda E) = \Gamma(\lambda K).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist in Leitern eine gegebene Grösse. An der Grenzfläche gegen Isolatoren verwandelt sich die Gleichung in

$$E_n = K_n.$$

Somit ist E für das Innere der Leiter nach dem vorstehenden eindeutig bestimmt. — In Isolatoren nimmt die Gleichung $\Gamma(\lambda E) = \Gamma(\lambda K)$ die Form $0 = 0$ an. Dort aber sind die Grössen

$$\varrho = \Gamma(\varepsilon E) \text{ im Innern}$$

und

$$e = \int \varepsilon E_N dS \text{ für jede Leiteroberfläche}$$

als gegeben zu betrachten; denn dies sind nach (32) unveränderlich an den materiellen Theilen haftende Grössen. Ferner ist an den Leiteroberflächen E_S gegeben, da es im Leiter als bekannt vorauszusetzen ist und an S keinen Sprung erleidet. Somit ist auch im Isolator das Feld bestimmt.

Das heisst: das stationäre elektrische Feld ist völlig bestimmt durch die Körperconstanten und die willkürlich wählbare „Elektricitätsvertheilung“ ϱ, e.

Ist aus diesen Daten E, also auch A, gefunden, so folgt M eindeutig aus (H), sofern noch überall eine Function $\Gamma(\beta M)$

bekannt ist, wo β eine positive Constante bezeichnet. Nun sind aber die $\Gamma(\mu M)$ nach (32) unveränderliche Grössen; also ist M eindeutig bestimmt.

Die Bedeutung der elektrischen und magnetischen Mengen ist demnach: sie haften an der Materie, und sie bestimmen, zusammen mit den Körperconstanten, ein stationäres elektromagnetisches Feld vollkommen.

Statische Felder. — Es seien nun die Anfangsbedingungen (C) und (H) erfüllt, welche das Feld zu einem stationären machen; ausserdem aber sei noch für jede in einem Leiter verlaufende, geschlossene Curve

$$\oint K_l dl = 0 .$$

Dann wird wegen (C) allgemein $\oint \frac{A_l}{\lambda} dl = 0$; zugleich ist wegen (H) aber $\Gamma(A) = 0$, und aus diesen Gleichungen folgt: $A = 0$ überall, oder

$$E_l = K_l .$$

Dies ist die frühere Gleichung (D′); sie sagt aus, dass in den Leitern das elektrische Feld überall vorgeschriebene Grösse und Richtung hat, und überall, wo der Leiter homogen ist, verschwindet. — Weiter folgt aus (H):

$$\oint M_l dl = 0 \text{ für jede geschlossene Curve,}$$

unsere frühere Gleichung (G). In diesem Fall ist das magnetische Feld durch die magnetische Vertheilung $\Gamma(\mu M)$ allein bestimmt.

Das elektrische und das magnetische Feld sind völlig unabhängig von einander; (C) und (D′) bilden die Grundgleichungen des statischen elektrischen, (G) die Grundgleichung des statischen magnetischen Feldes. Jedes derselben heisst mit Recht ein statisches Feld, weil unter unseren Voraussetzungen, wie wir alsbald sehen werden (S. 398f.), keine Energieumsetzungen stattfinden.

Wir haben soeben sämmtliche Grundgleichungen für stationäre Felder aus den jetzigen allgemeinen Grundgleichungen (J) und (K) wiedergefunden. Aus ihnen folgt der Inhalt der Kapitel I bis IV. Wir schliessen die stationären Felder von unseren ferneren Betrachtungen aus.

Es sei nun für den Moment $t = 0$ das Feld E_0, M_0 ganz beliebig gegeben. Dann zerlegen wir es in zwei Felder E_0', M_0' und E_0'', M_0'', von denen das erste den Gleichungen (C) und (H) genügt und dieselbe elektrische und magnetische Vertheilung besitzt, wie das gegebene Feld E_0, M_0. D. h. wir setzen:

$$P(E_0') = 0; \quad \Gamma(\varepsilon E_0') = \begin{cases} \varrho_e \\ \sigma_e \end{cases} \text{im Dielektricum;}$$

$$\int \varepsilon E'_{0N} dS = e \text{ für jede Leiteroberfläche;}$$

$$V \cdot P(M_0') = \lambda(E_0' - K); \quad \Gamma(\mu M_0') = \begin{cases} \varrho_m \\ \sigma_m \end{cases}$$

wo die $\varrho_e, \sigma_e, e, \varrho_m, \sigma_m$ gegebene Grössen bezeichnen. Durch diese Bedingungen ist das Feld E_0', M_0' völlig bestimmt, und es ist zugleich stationär.

Es zerfällt also zu jeder Zeit das Feld in die beiden Felder E', M' und E'', M'', von denen das erste den Gleichungen $\dot{E}' = 0$, $\dot{M}' = 0$ und zugleich den obigen Gleichungen für E_0' und M_0' genügt.

Indem wir diese Gleichungen von den für das Gesammtfeld E, M gültigen Gleichungen [(J), (K) nebst Anfangsbedingungen] subtrahiren, erhalten wir für das zweite Theilfeld E'', M'':

$$\mu \dot{M}'' = - V \cdot P(E''),$$

$$\lambda E'' + \varepsilon \dot{E}'' = V \cdot P(M''),$$

$$\Gamma(\varepsilon E'') = 0 \text{ im Dielektricum,}$$

$$\int \varepsilon E_N'' dS = 0 \text{ für jede Leiteroberfläche,}$$

$$\Gamma(\mu M'') = 0 \text{ überall.}$$

D. h. sofern wir uns nur mit den veränderlichen Antheilen elektromagnetischer Felder beschäftigen, dürfen wir ohne Minderung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

1) die inneren elektromotorischen Intensitäten (K),

2) die magnetischen Dichten (ϱ_m, σ_m),

3) die elektrischen Dichten im Dielektricum (ϱ_e, σ_e),

4) die gesammten Elektricitätsmengen für einen Leiter (e)

durchweg Null sind.

§ 4. Die Maxwell'schen Gleichungen und die ältere Elektrodynamik.

Aus dem Gebiet der nicht-stationären Zustände haben wir einige specielle Fälle behandelt. Die Gleichung (J), auf die Curve s eines linearen Leiters angewandt, giebt unmittelbar das Inductionsgesetz in derjenigen Form, in welcher es die Grundgleichung des Kapitel V bildete. Bei der Verwerthung dieser Gleichung wurde das magnetische Feld, soweit es von veränderlichen linearen Strömen abhing, stets aus den momentanen Werthen der Stromstärken so berechnet, als ob diese Ströme stationär wären. Entsprechend wurde die elektrische Energie aus der elektrischen Vertheilung so berechnet, als ob diese stationär wäre. Ferner wurde vorausgesetzt, dass in jedem Moment der Strom in der ganzen Ausdehnung des linearen Leiters den gleichen Werth besitze, — und stillschweigend, dass die Strömung gleichmässig über den Querschnitt verbreitet sei.

Im ersten § des Kapitel VI fanden wir, unter welcher Bedingung diese letzte Annahme zulässig ist; wir fanden das allgemeine Gesetz, nach welchem sich die Strömung über den Querschnitt eines drahtförmigen Leiters vertheilt. Als Grundlagen dienten hier die allgemeine Form der Gleichung (J) und die Gleichung (H); beide wurden angewandt auf das Innere des homogenen Leiters. Den strengen Ansatz hätten, nach der Maxwell'schen Theorie, die Gleichungen (J) und (K) gebildet; die Vernachlässigung, welche wir begingen, bestand also darin, dass wir

$$\lambda E_l + \varepsilon \frac{\partial E_l}{\partial t} \text{ durch } \lambda E_l$$

ersetzt haben; und dies geschah für Felder, welche sich proportional mit $\sin \nu t$ änderten. Wir haben also $\frac{\nu \varepsilon}{\lambda}$ gegen 1 vernachlässigt, wo ε die Dielektricitätsconstante des Leiters bezeichnet. Das ε der Metalle ist nicht bekannt; es giebt keine Beobachtung, auf deren Ergebnisse diese Grösse einen merkbaren Einfluss gehabt hätte. Es kann demnach zweifelhaft erscheinen, ob dem Begriff „Dielektricitätsconstante von Metallen" überhaupt eine physikalische Bedeutung zukommt (vgl. hierüber Schluss von Kapitel VII). Führt man ihn ein, so sagt der Versuch aus: selbst für die schnellsten Schwingungen, mit welchen man operiren konnte, ist $\frac{\nu \varepsilon}{\lambda}$ stets eine verschwindend kleine Zahl gewesen. Vorgreifend bemerken wir, dass die grössten hier in Betracht kommenden Werthe von ν etwa von der Grössenordnung $\frac{10^{10}}{\mathrm{sec}}$ sind. Andrerseits ist [vgl. Kap. II, Gleichung (26)] $\frac{4\pi\varepsilon_0}{\lambda_1} = \frac{1}{9{,}57 \cdot 10^{15}}\mathrm{sec}$. Setzen wir also $\frac{\lambda}{\lambda_1} = 10$, was einem mittleren Werth für Metalle entspricht, so ist für dieses ν rund

$$\frac{\nu \varepsilon_0}{\lambda} = 10^{-8}.$$

Die Dielektricitätsconstante der Metalle kann also immerhin sehr gross sein gegen diejenige der Luft; die Versuche zeigen lediglich, dass $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ klein sein muss gegenüber hundert Millionen. Praktisch aber folgt aus dem gesagten, dass wir, sofern es sich um Metalle handelt, den Thatsachen gleichermassen gerecht werden, wenn wir in den Maxwell'schen Gleichungen dem ε einen beliebigen Werth von der Grössenordnung von ε_0 beilegen, oder wenn wir das Glied $\varepsilon \dot{E}$ fortlassen, also (K) durch (H) ersetzen. Wir haben daher in Kapitel VI, § 1 die Stromvertheilung in einem Metalldraht richtig berechnet;

richtig gefunden sind dort also auch die Joule'sche Wärme, und die magnetische Energie im Drahtinnern.

Ebenso würde für jede andere Form metallischer Leiter eine Lösung der Gleichungen (H) und (J) stets eine mögliche Stromvertheilung darstellen. Das elektrische und magnetische Feld im äusseren Raum aber, welches dieser Strömung durch die Gleichungen (H) und (J) zugeordnet ist, entspricht nicht allgemein den Maxwell'schen Gleichungen, und wir dürfen es demnach nicht allgemein als das wirkliche Feld betrachten. Ebenso ist diejenige Grösse, welche wir als die elektrische Energie betrachtet haben, — die Energie nämlich, welche aus der in jedem Augenblick vorhandenen Elektricitätsvertheilung genau so berechnet wird, als ob diese Vertheilung stationär wäre, — nicht allgemein die wirkliche elektrische Energie.

Wir wollen versuchen, ein Urtheil zu gewinnen über die Tragweite des begangenen Fehlers.

Die Beziehungen zwischen Strömung, magnetischem Feld und elektrischem Feld, welche wir (bis Kapitel VI, § 1 einschliesslich) für ruhende Körper mit Ausschluss permanenter Magnete als gültig annahmen, lassen sich in folgendem „Ansatz der alten Theorie“ zusammenfassen:

$$\left.\begin{array}{lll}(\mathrm{H}) & V\cdot P(M)=\Lambda, & \Gamma(\mu M)=0 \qquad (34)\\ (\mathrm{J}) & -V\cdot P(E)=\mu\dot{M}, & \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\varepsilon E)=-\Gamma(\Lambda) \quad (35)\end{array}\right\}\quad(\mathfrak{A})$$

Die Gleichung (H) enthält nur dann keinen inneren Widerspruch, wenn $\Gamma(\Lambda)=0$ ist. In der That war auch nur für diesen Fall, — den Fall der „quasistationären“ Ströme, — die vor-Maxwell'sche Elektrodynamik zu einer allgemein als richtig anerkannten Theorie gelangt, welche, nicht der Form, wohl aber dem Inhalt nach, durch die vier obigen Gleichungen dargestellt wird. (Vgl. unten S. 388.) Die Erweiterung der Theorie für „ungeschlossene“ Ströme wurde auf verschiedenen Wegen gesucht. Wenn aber ein nahezu geschlossener Stromkreis lediglich durch einen Condensator unterbrochen war, so liessen sich ohne Widerspruch mit der Erfahrung die obigen Gleichungen anwenden, wenn in (H) die Strömungslinien will-

kürlich durch den Condensator hindurch zu geschlossenen ergänzt gedacht wurden. Die A der Gleichung (H) haben dann nicht genau die gleiche Bedeutung, wie diejenigen der Gleichung (35); die letzteren bezeichnen ausschliesslich die wirkliche Strömung im Leiter. — Wir wollen, um Wiederholungen zu vermeiden, sofort diesen allgemeineren Fall der „nahezu geschlossenen“ Ströme betrachten. Den specielleren Fall der wirklich geschlossenen Ströme erhalten wir dann, indem wir in unseren Resultaten

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\varepsilon E) = 0$$

setzen.

Wir setzen also voraus, dass unsere Gleichungen, und damit auch die Maxwell'schen, im metallischen Leiter durch ein bestimmtes Werthesystem der M und E und damit auch der A befriedigt werden; (dabei können dem ε im Leiter beliebige Werthe von der Grössenordnung der ε der Isolatoren beigelegt werden). Das Feld im ganzen Raum und die Energie, welche der Ansatz ($\mathfrak{A}$) diesem A zuordnet, wollen wir untersuchen.

Im folgenden werden wir wiederholt den Satz benutzen, dass ein Vector A eindeutig bestimmt ist, wenn überall die Werthe von $P(A)$ und $\Gamma(\alpha A)$ (wo α eine gegebene positive Grösse) vorgeschrieben sind, und, was stets stillschweigend vorausgesetzt wird, im unendlichen Ar^2 endlich ist. Den Beweis s. S. 249.

Das Feld M ist eindeutig bestimmt durch (H) und (34), da A als bekannt vorausgesetzt wird. Ist M aber bekannt, so bestimmen (J) und (35) das Feld E bis auf ein unveränderliches Theilfeld E_0, welches einer ruhenden Elektricitätsvertheilung entspricht. Man setze nämlich

$$\left.\begin{array}{c} E_l = E_{1l} + E_{2l} \\ P(E_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\varepsilon E_1) = -\Gamma(A) \\ -V\cdot P(E_2) = \mu\dot{M}, \quad \Gamma(\varepsilon E_2) = 0. \end{array}\right\} \quad (36)$$

Die Gleichungen (J) und (35) werden dann befriedigt. E_2 ist

eindeutig bestimmt; E_1 aber ist wie ein statisches Feld zu berechnen aus einer Dichte ϱ, welche bis auf einen stationären Antheil ϱ_0 gegeben ist; denn $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\Gamma(A)$ hat vorgeschriebene Werthe.

Die Berechnung der Felder M und E kann zurückgeführt werden auf die Auffindung eines Vectors A und einer Zahlgrösse φ: Das Feld M muss sich wegen (34) in folgender Form schreiben lassen:

$$\mu M = P(A). \tag{37}$$

Durch diese Gleichung ist der Vector A noch nicht bestimmt (vgl. Kap. III, S. 226). Er wird aber eindeutig bestimmt, sobald wir noch fordern

$$\Gamma(\varepsilon A) = 0. \tag{38}$$

Aus demselben Vector A berechnet sich dann E_2; nach (36) und (37) ist

$$-V \cdot P(E_2) = P(\dot{A}) \text{ oder } P(VE_2 + \dot{A}) = 0$$

und nach (36) und (38) ist

$$\Gamma[\varepsilon(VE_2 + \dot{A})] = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen aber folgt:

$$VE_2 + \dot{A} = 0$$

oder

$$VE_2 = -\dot{A}. \tag{39}$$

Das Feld E_1 endlich muss sich nach (36) in der Form darstellen lassen:

$$E_{1l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \tag{40}$$

Als magnetische Energie betrachteten wir die Grösse

$$W_m = \tfrac{1}{2}\int \mu M^2 d\tau, \tag{41}$$

als elektrische Energie aber nicht die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\tau = \tfrac{1}{2}\int \varepsilon E_1^{\,2} d\tau + \tfrac{1}{2}\int \varepsilon E_2^{\,2} d\tau,$$

sondern [vgl., auch für den Beweis der vorstehenden Gleichung, S. 307 f.]

$$W_e = {}^1/_2 \int \varepsilon E_1{}^2 d\tau . \tag{42}$$

Hierfür kann nach (40) geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} W_e &= {}^1/_2 \int \varphi \varrho \, d\tau \\ \text{wo} \quad \varrho &= \Gamma(\varepsilon E_1), \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \Gamma(A) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Wenn die Gesammtheit der vorstehenden Gleichungen keinen inneren Widerspruch enthalten soll, so muss durch sie dem Energieprincip Genüge geleistet werden. Dass dies für eine endliche Anzahl von Elektricitätsmengen und „linearen" Strömen zutrifft, folgt aus den Entwicklungen des Kapitel V. Wir wollen es hier für den allgemeinen Fall einer beliebigen räumlichen Strom- und Elektricitätsvertheilung nochmals zeigen. Da alle Körper ruhen sollen, also mechanische Arbeit nicht geleistet wird, lautet die Energiegleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) + \Psi = 0, \\ \text{wo} \quad &\Psi = \int (E_x A_x + \cdot \cdot) \, d\tau \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Nun ist nach (41) und (37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_m}{\partial t} &= \int \left[\frac{\partial (\mu M_x)}{\partial t} M_x + \cdot \cdot \right] d\tau \\ &= \int \left[\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right) \right] M_x + \cdot \cdot \right] d\tau \\ &= \int \left[\frac{\partial A_x}{\partial t} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \cdot \cdot \right] d\tau , \end{aligned}$$

oder nach (39) und (H):

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = - \int \left(E_{2x} \cdot A_x + \cdot \cdot \right) d\tau . \tag{45}$$

Aus (42) folgt:

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = \int \left[\frac{\partial (\varepsilon E_{1x})}{\partial t} E_{1x} + \cdots \right] d\tau .$$

Aber nach (36) ist

$$\Gamma(\varepsilon \dot{E}_1 + A) = 0 \quad \text{und} \quad P(E_1) = 0 ,$$

also

$$\int \left[\left(\frac{\partial (\varepsilon E_{1x})}{\partial t} + A_x \right) E_{1x} + \cdots \right] d\tau = 0 .$$

Folglich

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = - \int (E_{1x} A_x + \cdots) \, d\tau . \tag{46}$$

Aus (45) und (46) aber ergiebt sich durch Addition die zu beweisende Gleichung (44).

Diese Entwicklung zeigt deutlich, dass dem Energieprincip nicht genügt würde, wenn wir, unter Wahrung des Ansatzes (𝔄), die elektrische Energie aus dem Gesammtfeld E als

$$W_e = {}^1/_2 \int \varepsilon E^2 d\tau$$

berechnen wollten.

Die vor-Maxwell'sche Elektrodynamik also lässt sich folgendermassen charakterisiren: sie musste, als erfahrungsmässig feststehend, annehmen, dass neben dem „elektrostatischen“ Felde E_1 (herrührend von der Elektricitätsvertheilung), noch ein „elektrodynamisches“ Feld E_2 (herrührend von variablen Strömen) bestehen könne. Sie nahm aber an, dass der Energievorrath des Feldes ausschliesslich durch den ersteren Antheil bestimmt würde. Darin lag, dass, wenn man in einem gewissen Gebiet das elektrische Feld nach Grösse und Richtung kenne, dies noch nicht ausreiche, um die physikalischen Consequenzen zu beurtheilen, — dass man hierzu vielmehr auch die Ursachen, die Entstehungsart des Feldes kennen müsse. Die vor-Maxwell'sche Elektrodynamik negirte also die Einheitlichkeit des elektrischen Feldes. Sie

that das freilich unausgesprochener Massen; erst Hertz hat diesen organischen Fehler blossgelegt.*)

Hertz setzt die Verhältnisse voraus, welche den typischen Fall der älteren Theorie bilden: alle Ströme sind geschlossen. und die verschiedenen Körper im Felde unterscheiden sich weder in ihrem elektrostatischen noch in ihrem magnetischen Verhalten von der atmosphärischen Luft. In unseren Bezeichnungen heisst das:

$$\Gamma(A) = 0, \quad \varepsilon = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.} \tag{47}$$

Der Ansatz (𝔄) wird:

$$\left.\begin{array}{llll} (\mathrm{H}) & V \cdot P(M) = A, & \Gamma(M) = 0 & (34') \\ (\mathrm{J}) & -V \cdot P(E) = \mu \dot{M}, & \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(E) = 0 & (35') \end{array}\right\} \quad (\mathfrak{A}')$$

Die Functionen A_x, A_y, A_z und φ, welche zur Darstellung der Lösung dienen, sind für diesen Fall bereits in Kapitel IV, bezw. Kapitel I gefunden. Sie sind für den Punkt $p\ (x, y, z)$, wenn r den Abstand zwischen p und $d\tau$ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu}{V}\int \frac{A_x}{4\pi r}\, d\tau \\ A_y &= \frac{\mu}{V}\int \frac{A_y}{4\pi r}\, d\tau \\ A_z &= \frac{\mu}{V}\int \frac{A_z}{4\pi r}\, d\tau \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\varrho\, d\tau}{4\pi r}, \tag{49}$$

wo die ϱ jetzt unveränderliche Grössen bedeuten, also $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ist. Aus diesen Functionen berechnet man nach (40), (39), (37):

*) Hertz, Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. Wied. Ann. 23, S. 84 (1884).

$$\left.\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{V}\frac{\partial A_x}{\partial t}\\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{V}\frac{\partial A_y}{\partial t}\\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial A_z}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu M_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \mu M_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \mu M_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Dass durch dieses Werthesystem dem Ansatz ($\mathfrak{A}'$) genügt wird, ist leicht zu verificiren: Der Vector $\frac{A}{\mu}$ ist identisch mit dem Vector Π des Kapitel IV, Gleichungen (18) und (19); er genügt also den Gleichungen

$$\Gamma(A) = 0\,, \quad \Delta A_x = -\frac{\mu}{V} A_x \text{ etc.}$$

und die Gleichungen (H) und (34′) sind erfüllt (s. S. 251 f.). Weiter folgt:

$$-V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu M_x) \text{ etc., d. h. (J).}$$

Endlich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(E) &= -\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi - \frac{1}{V}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Gamma(A)\\ &= 0 + 0\,, \quad \text{d. h. (35′).}\end{aligned}$$

Die magnetische Energie wird [s. Kap. IV, Gleichung (60)]:

$$W_m = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu}{4\pi V^2}\int\!\!\int \frac{A_x A_x' + A_y A_y' + A_z A_z'}{r}\, d\tau \cdot d\tau'. \qquad (52)$$

Der angenommene Werth der elektrischen Energie wird nach (43) und (49):

$$W_e = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\!\!\int\frac{\varrho\cdot\varrho'}{r}\,d\tau\cdot d\tau'. \tag{53}$$

Die Gleichungen (48) bis (53) enthalten thatsächlich die vollständige ältere Elektrodynamik. Sie schliessen sich auch in der Form der älteren Theorie an; denn sie behandeln elektrische Strömung und Elektricitätsvertheilung als die fundamentalen Grössen, und stellen die Feldstärken dar mit Hülfe des „Vectorpotentials" der ersteren, und des gewöhnlichen („scalaren") Potentials der zweiten. (Um vollkommene Identität der Ausdrücke zu erhalten, muss man in unseren Gleichungen den Grössen $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ und V diejenigen Werthe beilegen, welche das besondere von dem betreffenden Autor gewählte Masssystem definiren; s. Kap. IV, S. 279 f.). —

Mit dem Werthesystem der Gleichungen (48) bis (51) vergleichen wir ein anderes, welches den Maxwell'schen Forderungen, d. h. in unserem Fall den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{llll} (K) & V\cdot P(M) = A + \varepsilon\dot{E}; & \Gamma(M) = 0 & (34') \\ (J) & -V\cdot P(E) = \mu\dot{M}; & \dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma(E) = 0 & (35') \end{array}\right\} (\mathfrak{M}')$$

genügt.

Wir setzen

$$\left.\begin{array}{l} b_{1x} = \dfrac{\mu}{V}\displaystyle\int\frac{A_x}{4\pi r}\,d\tau,\quad b_{1y} = \dfrac{\mu}{V}\displaystyle\int\frac{A_y}{4\pi r}\,d\tau,\quad b_{1z} = \dfrac{\mu}{V}\displaystyle\int\frac{A_z}{4\pi r}\,d\tau \\ b_{2x} = \displaystyle\int\frac{b_{1x}}{4\pi r}\,d\tau,\quad b_{2y} = \displaystyle\int\frac{b_{1y}}{4\pi r}\,d\tau,\quad b_{2z} = \displaystyle\int\frac{b_{1z}}{4\pi r}\,d\tau \\ b_{3x} = \displaystyle\int\frac{b_{2x}}{4\pi r}\,d\tau \quad \text{u. s. w.} \\ B_x = b_{1x} - \dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{\partial^2 b_{2x}}{\partial t^2} + \dfrac{1}{\omega^4}\dfrac{\partial^4 b_{3x}}{\partial t^4} - \dfrac{1}{\omega^6}\dfrac{\partial^6 b_{4x}}{\partial t^6} + \cdots \text{in infin.,} \\ \text{wo } \omega^2 = \dfrac{V^2}{\varepsilon\mu} \end{array}\right\} \tag{54}$$

nebst entsprechenden Werthen für B_y und B_z.

Hieraus folgt (s. S. 251 f.)

$$\Gamma(b_1) = 0\,, \quad \Delta b_{1x} = -\frac{\mu}{V} A_x$$

$$\Gamma(b_2) = 0\,, \quad \Delta b_{2x} = - b_{1x}$$

u. s. w.

und daher weiter, sofern die unendlichen Reihen convergiren:

$$\Gamma(B) = 0 \tag{55}$$

und

$$\Delta B_x = -\frac{\mu}{V} A_x + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 b_{1x}}{\partial t^2} - \frac{1}{\omega^4}\frac{\partial^4 b_{2x}}{\partial t^4} + \cdot - \cdots$$

Andrerseits:

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 b_{1x}}{\partial t^2} - \frac{1}{\omega^4}\frac{\partial^4 b_{2x}}{\partial t^4} + \cdot - \cdots$$

Also:

$$\Delta B_x + \frac{\mu}{V} A_x = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}\,, \text{ etc.} \tag{56}$$

Führen wir in der Lösung des Ansatzes ($\mathfrak{A}'$) an Stelle des Vectors A den Vector B ein, so erhalten wir eine Lösung von ($\mathfrak{M}'$).

In der That: setzen wir wieder

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\varrho\, d\tau}{4\pi r}\,, \quad \text{wo } \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{49}$$

und weiter:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{V}\frac{\partial B_x}{\partial t} \text{ etc.} \tag{57}$$

$$\mu M_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \text{ etc.,} \tag{58}$$

so werden die Gleichungen (J), (34′), (35′) ebenso erfüllt, wie durch die frühere Lösung. Weiter aber folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_x) = -\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}\,,$$

also nach (56):

$$= - A_x - \frac{V}{\mu}\Delta B_x$$

und unter Benutzung von (55):

$$A_x + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_x) = \frac{V}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\right],$$

$$= V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) \text{ etc., d. h. (K).}$$

Also ergiebt sich: wenn ein **mögliches** quasistationäres Strömungssystem A — d. h. ein solches, welches den Maxwell'schen Gleichungen genügt — gefunden ist, so lässt sich das durch die Maxwell'schen Gleichungen ($\mathfrak{M}'$) dieser Strömung zugeordnete elektromagnetische Feld darstellen in der durch (49), (54), (57), (58) gegebenen Form, — vorausgesetzt, dass die hier auftretenden unendlichen Reihen convergiren.

Denken wir uns zwei geometrisch ähnliche Leitersysteme gegeben, mit räumlich und zeitlich ähnlich verlaufenden Strömen. Dann ist in den Reihen das Verhältniss q_n des $(n+1)$ten zum $n$ten Glied:

$$-\frac{1}{\omega^2}\frac{L_1{}^2}{T_1{}^2} \text{ bezw. } -\frac{1}{\omega^2}\frac{L_2{}^2}{T_2{}^2},$$

wo L_1 und L_2 entsprechende Längen, T_1 und T_2 entsprechende Zeiten sind. Jedes q_n kann also beliebig klein gemacht werden, indem man die Abmessungen der Leiter und die Schnelligkeit der Stromschwankungen genügend klein wählt. Bis zu gewissen Werthen dieser Grössen müssen die Reihen convergiren, — und bis zu gewissen Werthen müssen sie sehr schnell convergiren. Man kann ferner erwarten, dass die Grenzen der L und $\frac{1}{T}$, in welchen schnelle Convergenz erfolgt, recht weit gesteckt sind; denn ω ist nach Kapitel IV, Gleichung (32): $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, die Geschwindigkeit des Lichts.

Brechen wir die Reihen beim **ersten** Glied ab, so wird

$$B = b_1 = A$$

und wir kommen somit auf diejenige Lösung als **erste**

Näherung zurück, welche dem Gleichungssystem ($\mathfrak{A}'$) der älteren Elektrodynamik streng genügt. —

Nehmen wir an, die Strömungscomponenten seien einfach harmonische Functionen der Zeit, also von der Form

$$A_x = a \sin(\nu t + b) \text{ etc.} \tag{59}$$

Dann lassen sich die unendlichen Reihen in (54) ausrechnen; es wird

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu}{V}\int A_x \frac{\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}\, d\tau \\ B_y &= \frac{\mu}{V}\int A_y \frac{\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}\, d\tau \\ B_z &= \frac{\mu}{V}\int A_z \frac{\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}\, d\tau \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Wir wollen zeigen, dass die mittels dieser B_x.. nach (49), (57), (58) berechneten E_x.. M_x.. thatsächlich dem Gleichungssystem ($\mathfrak{M}'$) genügen. Dies ist nach dem vorstehenden gezeigt, sobald wir bewiesen haben, dass der Vector B der Gleichungen (60) den Gleichungen (55) und (56) genügt.

Um diese Eigenschaften des Vectors B abzuleiten, denken wir um den Punkt $p(x, y, z)$, für welchen B berechnet werden soll, eine Kugelfläche K mit dem sehr kleinen Radius R beschrieben; der Innenraum heisse τ_1, der Aussenraum τ_2, die entsprechendeu Antheile von B_x.. seien B_{1x} und B_{2x}... Die Integranden in (60) und ihre Differentialquotienten sind endlich und stetig in τ_2. Also wird

$$\Gamma(B_2) = \frac{\mu}{V}\int_{\tau_2} \left[A_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}\right) + \cdots\right] d\tau,$$

oder wenn $p'(x', y', z')$ einen variablen Punkt in τ_2 bezeichnet,

$$= -\frac{\mu}{V}\int\limits_{\tau_2}\left[A_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}\right)+\cdots\right]d\tau,$$

oder, da $\Gamma(A) = 0$,

$$\Gamma(B_2) = \frac{\mu}{V}\int\limits_K A_R\,\frac{\cos\frac{\nu R}{\omega}}{4\pi R}\,dK.$$

Dieses Integral verschwindet, sobald R verschwindend klein wird. Zugleich wird dann $\cos\frac{\nu r}{\omega} = 1$ in τ_1, also

$$B_{1x} = \frac{\mu}{V}\int\limits_{\tau_1}\frac{A_x}{4\pi r}\,d\tau$$

von der Form der Raumpotentiale des Kapitel I, § 3. Demnach werden B_{1x} . . nebst ihren ersten Differentialquotienten verschwindend klein, also auch $\Gamma(B_1)$. Somit folgt

$$\Gamma(B) = 0\,,\ \text{d. h. (55).}$$

Weiter ist

$$\Delta B_x = \Delta B_{1x} + \Delta B_{2x}.$$

Hierin ist

$$\Delta B_{2x} = \frac{\mu}{V}\int\limits_{\tau_2}A_x\cdot\Delta F(r)\,d\tau\,,\quad \text{wo } F(r) = \frac{\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}.$$

Um $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \cdots$ auszurechnen, wenden wir die Gleichung

$$\int\limits_\tau \Delta F\cdot d\tau = \int\limits_S\frac{\partial F}{\partial N}\,dS$$

an auf ein Element einer Kugelschale mit dem Mittelpunkt p'; dasselbe habe die Dicke dr und die Basis $r^2 do$. Wir erhalten dann, da unser F nur von r abhängt:

$$\Delta F\cdot r^2 do\,dr = \left(\frac{\partial F}{\partial r}r^2 do\right)_{r+dr} - \left(\frac{\partial F}{\partial r}r^2 do\right)_r$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot F) \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Also wird für unsere Function F:

$$\Delta F = -\frac{\nu^2}{\omega^2} F.$$

Demnach

$$\Delta B_{2x} = -\frac{\nu^2}{\omega^2} B_{2x},$$

oder für verschwindendes R auch

$$\Delta B_{2x} = -\frac{\nu^2}{\omega^2} B_x.$$

Für verschwindendes R wird aber andererseits:

$$\Delta B_{1x} = \Delta\left[\frac{\mu}{V}\int\limits_{\tau_1}\frac{A_x}{4\pi r}\,d\tau\right] = -\frac{\mu}{V} A_x.$$

Demnach:

$$\Delta B_x = -\frac{\nu^2}{\omega^2} B_x - \frac{\mu}{V} A_x \text{ etc.}$$

Aber nach (59) und (60) ist:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = -\nu^2 B_x;$$

also

$$\Delta B_x = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - \frac{\mu}{V} A_x, \text{ d. h. (56).}$$

Hiermit ist der verlangte Beweis erbracht.

Für eine Strömung also, welche durch einfach-harmonische Functionen der Zeit dargestellt wird, folgt: das Feld E, M leitet sich nach dem Maxwell'schen Ansatz in der gleichen Weise aus dem Vectorpotential B der Gleichungen (60) ab, in welcher es sich nach der älteren Theorie aus dem Vectorpotential A der Gleichungen (48) ableitete. B aber unterscheidet sich folgendermassen von A: ein Stromelement in p' liefert zum Vectorpotential A eines Punktes p in der Ent-

fernung $pp' = r$ einen Beitrag, welcher einfach wie $\frac{1}{r}$ abnimmt. In B aber ist dieser Factor $\frac{1}{r}$ noch mit dem periodischen Factor $\cos\frac{\nu r}{\omega}$ multiplicirt. Der Einfluss des Stromelements ist, — wenn wir einen Ausdruck der Elasticitätslehre gebrauchen wollen, — im Raum rings um p' vertheilt nach kugelförmigen „stehenden Wellen" von abnehmender Amplitude. Der Unterschied macht sich aber erst von solchen Entfernungen r an geltend, für welche $\frac{\nu r}{\omega}$ einen merklichen Werth besitzt. Finden etwa 10^6 Stromwechsel in der Secunde statt, so ist $\frac{\omega}{\nu} = \frac{3\cdot 10^{10}}{\pi 10^6}$ cm = ca. 100 Meter, und mit dieser Grösse muss r vergleichbar geworden sein, bevor die Abweichung zwischen A und B merkbar wird.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt, wie wir in § 5 (S. 398) zeigen werden, ganz allgemein

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\int (E_x A_x + E_y A_y + E_z A_z)\, d\tau\,.$$

Sind nun die Voraussetzungen (47) unserer letzten Untersuchungen erfüllt:

$$\Gamma(A) = 0\,,\qquad \varepsilon = \text{const.},\qquad \mu = \text{const.},$$

und ist E in der Form (57) dargestellt:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{V}\frac{\partial B_x}{\partial t}\,,$$

so wird durch partielle Integration

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \frac{1}{V}\int\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}A_x + \frac{\partial B_y}{\partial t}A_y + \frac{\partial B_z}{\partial t}A_z\right)d\tau\,. \qquad (62)$$

Der wechselseitige Inductionscoefficient p_{12} zweier linearer Strombahnen s_1 und s_2 konnte dadurch definirt werden, dass bei ruhender Materie

$$p_{12}\left(i_1 \frac{\partial i_2}{\partial t} + i_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}\right)$$

der Beitrag ist, welchen die gleichzeitige Existenz der Ströme i_1 in s_1 und i_2 in s_2 zur Gesammtänderung der Energie des Feldes lieferte. In der vor-Maxwell'schen Theorie hing von den Stromstärken veränderlicher geschlossener Ströme nur der Werth der magnetischen Energie ab; in der Maxwell'schen Theorie ändert sich mit ihnen auch die elektrische Energie.

Es mögen nun u. A. zwei periodische lineare Ströme vorhanden sein:

$$i_1 = a_1 \sin(\nu t + b_1) \text{ in der Bahn } s_1$$
$$i_2 = a_2 \sin(\nu t + b_2) \;\;„\;\;„\;\;„\;\; s_2 .$$

Der Beitrag zu $\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m)$, welcher durch die gleichzeitige Existenz von i_1 und i_2 bedingt ist, ist dann nach (60) und (62)

$$p_{12}\left(i_1 \frac{\partial i_2}{\partial t} + i_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}\right),$$

wo

$$p_{12} = \frac{\mu}{V^2}\iint \frac{\cos(ds_1\, ds_2)\cos\frac{\nu r}{\omega}}{4\pi r}\, ds_1\, ds_2 . \tag{63}$$

Dieser „wechselseitige Inductionscoefficient" unterscheidet sich also von dem Werth, den die ältere Theorie liefert [Kap. IV, Gleichung (15)], sobald die Entfernungen r zwischen den Elementen von s_1 und s_2 nicht verschwindend klein sind gegenüber $\frac{\omega}{\nu}$.

Wir wollen noch einen einfachen Fall betrachten, für welchen der Vergleich der beiden Theorien ohne Rechnung durchgeführt werden kann: Als Stromträger sei ein auf einen Ring gewundenes, in sich zurücklaufendes Solenoid gegeben; der Strom nehme während einer gewissen Zeit mit gleichförmiger Schnelligkeit ab. Wenn der Strom constant wäre, so würden (vgl. Kap. IV, S. 260) die magnetischen Kraftlinien im Innern des Ringkörpers in Kreislinien um die

Ringaxe verlaufen; im Aussenraum wäre kein magnetisches Feld vorhanden. Wir nehmen an, dass auch jetzt das magnetische Feld M in gleicher Weise vertheilt, und in jedem Moment der gerade bestehenden Stromstärke proportional ist. (Diese Annahme wird sich alsbald als richtig erweisen.) Diesem variablen magnetischen Felde entspricht nach (J) ein elektrisches Feld E, dessen Kraftlinien in durch die Rotationsaxe gelegten Ebenen verlaufen und im wesentlichen den Ringkörper umzingeln. Da M sich gleichförmig ändert, so ist E constant. Die elektrische Polarisation fügt also in (K) kein Glied zur Strömung hinzu, aus welcher allein wir bisher M berechnet hatten. Unser System der E, M ist mit den Maxwell'schen Gleichungen in Uebereinstimmung. — Nun befinde sich in der Nachbarschaft ein zweites ringförmiges Solenoid, ebenfalls mit gleichförmig veränderlichem Strom. Auch diesem kommt ein variables magnetisches Feld im Innern des Ringkörpers zu, und ein constantes elektrisches Feld, welches sich in den Aussenraum erstreckt. Sind beide Ströme gleichzeitig vorhanden, so durchdringen sich die magnetischen Felder nicht, wohl aber die elektrischen. Die gesammte magnetische Energie ist einfach gleich der Summe der Werthe, welche den beiden einzelnen Strömen entsprechen; — die gesammte elektrische Energie aber enthält einen Term, welcher von der gegenseitigen Lage der beiden Solenoide abhängt. Es bestehen daher mechanische Kräfte zwischen den beiden Ringen. Und andererseits: wenn ein Ring gegen den andern bewegt wird, so ändert sich die Zahl der durch ihn hindurchtretenden elektrischen Kraftlinien; es entstehen folglich magnetische Kraftlinien längs der Ringlinie, und es werden somit elektromotorische Kräfte in dem umgebenden Solenoid erzeugt. Diese mechanischen und elektromotorischen Kräfte kennt die ältere Theorie nicht. (s. Hertz a. a. O.)

§. 5. Der Poynting'sche Satz.

Wir multipliciren die Gleichungen (J'') der Reihe nach mit M_x, M_y, M_z, die Gleichungen (K'') der Reihe nach mit E_x, E_y, E_z, addiren die sechs so entstehenden Gleichungen,

multipliciren mit $d\tau$ und integriren über einen beliebigen Raum τ. Schreiben wir dann wieder wie früher

$$\Psi = \int (A_x E_x + \cdot \cdot) \, d\tau \tag{64}$$

und setzen noch

$$\Omega = \int V \left[\frac{\partial}{\partial x} (M_y E_z - M_z E_y) + \frac{\partial}{\partial y} (M_z E_x - M_x E_z) + \frac{\partial}{\partial z} (M_x E_y - M_y E_x) \right] d\tau , \tag{65}$$

so kommt

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \Psi + \Omega . \tag{66}$$

Wir bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_x &= V(E_y M_z - E_z M_y) \\ \Sigma_y &= V(E_z M_x - E_x M_z) \\ \Sigma_z &= V(E_x M_y - E_y M_x) \end{aligned} \right\} \tag{67}$$

Dies sind [vgl. Kap. III, Gleichungen (68)] die rechtwinkligen Componenten eines Vectors Σ von der Grösse

$$\left. \begin{aligned} &\Sigma = V E M \sin (E M) \\ &\text{und der Richtung} \perp (\widehat{EM}). \end{aligned} \right\} \tag{67a}$$

Die Componente Σ_n von Σ nach der Normale n einer Fläche S ist, wenn E_S und M_S die zu S tangentialen Componenten von E und M bezeichnen:

$$\Sigma_n = \pm V E_S M_S \sin (E_S M_S), \text{ je nachdem } n \perp \begin{cases} \widehat{E_S M_S} \\ \widehat{M_S E_S} \end{cases} \tag{67b}$$

Wenn an der Fläche S die Feldgrössen sich sprungweise ändern, so bleiben doch nach (30) E_S und M_S stets stetig, also ist auch Σ_n immer stetig. Daher wird ohne jede Beschränkung aus (65) durch partielle Integration:

$$\Omega = - \int \Gamma(\Sigma) \, d\tau = \int \Sigma_n \, dS , \tag{68}$$

wo, wie stets, S die Oberfläche von τ und n deren innere Normale bezeichnet.

Es werde nun zunächst unter τ der unendliche Raum verstanden; dann verschwindet nach den Eigenschaften von E und M (s. S. 372) das Flächenintegral, und es wird aus (66):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\Psi.$$

Es muss also nach dem Energieprincip

$$\Psi = \int_{\infty} (A_x E_x + \cdot\cdot) d\tau$$

die gesammte in der Zeiteinheit in nicht-elektromagnetischer Form frei werdende Energie darstellen. Dies bestätigt die Erfahrung.

Unser Ausdruck für Ψ zerlegt weiter formal diese Energie, indem sie jedem Volumelement $d\tau$ einen bestimmten Beitrag

$$d\Psi = AE\cos(AE)d\tau = \left(\frac{A^2}{\lambda} + AK\cos(AK)\right)d\tau \qquad (69)$$

zuweist. Dass aber gerade dieser Energiebetrag in diesem Element thatsächlich abgegeben werde, folgt nicht mit Nothwendigkeit aus unseren Voraussetzungen. Die Erfahrung ergiebt in dieser Hinsicht folgendes: es wird Energie nur abgegeben, wo A von Null verschieden ist, d. h. in Leitern; — die abgegebene Energie ist stets positiv und hat für die Volumeinheit den Werth $\frac{A^2}{\lambda}$ (und die Form von Wärme), wo der Leiter homogen ist; — zu diesem stets positiven Betrag gesellt sich ein zweiter Antheil, welcher sein Vorzeichen mit der Stromrichtung wechselt (und sowohl chemischer wie thermischer Natur sein kann), wo der Leiter inhomogen ist; — der gesammte umkehrbare Energiebetrag für eine vollständige Stromschleife ist in Uebereinstimmung mit dem Werthe $\int AK\cos(AK)d\tau$. — D. h. zusammengefasst (vgl. Kap. II, S. 125 und 166): in dem vollen Umfange, in welchem die Grössen der Gleichung (69) überhaupt einer unabhängigen (nicht auf

dieser Gleichung selbst basirenden) Messung zugänglich sind, entspricht die durch (69) gegebene mathematische Zerlegung von Ψ den Thatsachen.

Im Besondern: wenn an keiner Stelle des Raumes elektrische Strömung existirt, so findet auch keinerlei Energieumsetzung statt: das Feld ist statisch. —

Es sei jetzt τ ein endlicher Raum mit der Oberfläche S. Dann folgt aus (66) und (68): die Vermehrung der elektromagnetischen Energie des Raumes τ in der Zeiteinheit zerfällt in zwei Theile. Den ersten Antheil bildet die verbrauchte chemisch-thermische Energie: $-\Psi$. Hierzu kommt aber ein zweiter Antheil, welcher sich darstellen lässt als eine über die Oberfläche S erstreckte Summe, und zwar liefert das Flächenelement dS den Beitrag $\Sigma_n dS$. Wir erhalten also diesen zweiten Antheil richtig, wenn wir annehmen, dass die Energie durch die Oberfläche einströmt, und zwar in der Zeiteinheit durch dS im Betrage $\Sigma_n dS$; — oder, dass überall eine Energieströmung stattfindet in der Richtung von Σ und im Betrage Σ, berechnet für die Zeiteinheit und die zu Σ normale Flächeneinheit. Der Vector Σ soll die „elektromagnetische Strahlung" heissen. Die Richtung der Strahlung ist diejenige der gemeinsamen Normalen von E und M (und zwar $\perp \widehat{EM}$), und die Grösse der Strahlung ist das Product aus V und der Fläche des von E und M gebildeten Parallelogramms.

Die Gleichungen (66), (67), (68) sind von Poynting abgeleitet und so, wie soeben geschehen, gedeutet worden. Die Deutung ist eine mögliche, keine nothwendige. Sie setzt zunächst voraus, dass die elektromagnetische Energie des Raumes τ durch die Summe der beiden Integrale

$$W_e = {}^1\!/_2 \int \varepsilon E^2 d\tau \quad \text{und} \quad W_m = {}^1\!/_2 \int \mu M^2 d\tau$$

gegeben ist. Dass dieser Satz für einen begrenzten Raum τ der experimentellen Prüfung nicht zugänglich ist, wurde bereits früher (S. 130) hervorgehoben. Sie zerlegt ferner Ω in der Weise physikalisch in die Beiträge der Elemente dS, wie dies die Gleichung (68) mathematisch thut. Auch diese

Zerlegung kann nicht experimentell verificirt werden; denn die Gleichung hat einen Sinn nur für geschlossene Flächen S, sie kann daher auch nur über die Divergenz $\Gamma(\Sigma)$, nicht über den Vector Σ selbst etwas lehren. Mit andern Worten: der von Poynting angenommenen Energie-Strömung Σ darf eine in geschlossenen Bahnen verlaufende, im übrigen aber ganz willkürliche Strömung superponirt werden; — der resultirende Vector Σ_1 würde ebenfalls der Gleichung (68) genügen, und dürfte ebensowohl wie Σ als Mass der Energieströmung betrachtet werden. — Die Poynting'sche Deutung bleibt also willkürlich, solange es nicht etwa gelingt, ein von unserer Gleichung unabhängiges Mass der Energiebewegung zu finden.

Ihr Werth liegt in folgendem: sie gewährt eine Anschauung, welche eine grosse Zahl von Einzelbeobachtungen zu einem Bilde vereinigt, und sie hat als Wegweiser gedient für neue und fruchtbare Forschung. An dieser Stelle haben wir zunächst einige uns bereits bekannte Erscheinungen im Licht der Poynting'schen Hypothese nochmals zu betrachten.

Es sei erstens ein stationäres Feld gegeben. Dann ist für jedes Volumelement: $W =$ const. und folglich $\Psi = \Omega$. Für jedes Volumelement eines Isolators ist ferner $\Psi = 0$, also auch $\Omega = 0$; durch die Isolatoren also strömt die Energie lediglich hindurch; sie kann daher nur von Leitertheilen zu Leitertheilen strömen. Weiter: an der Oberfläche jedes vollständigen (rings von Isolatoren umgebenen) Leiters ist $A_n = 0$; im Innern ist $\Gamma(A) = 0$ und $P(E) = 0$; und daraus folgt (vgl. Kap. II, S. 147), dass schon für den Raum τ eines einzelnen vollständigen Leiters gilt:

$$\Psi = \int_\tau (A_x E_x + \cdot\cdot)\, d\tau = 0\,.$$

Also ist auch für den gleichen Raum: $\Omega = 0$; es findet also Energieaustausch nur statt zwischen den Theilen desselben zusammenhängenden Leiters. Im einzelnen ferner:

$$d\Psi = (A_x E_x + \cdot\cdot)\, d\tau$$

kann negative Werthe nur an solchen Stellen haben, wo

Grössen K existiren, der Leiter inhomogen ist, — in den sogenannten „galvanischen Elementen“. Es muss dies auch dort nicht nothwendig der Fall sein. Wo es zutrifft, da ist auch $d\Omega$ negativ, dort wandert also Energie aus. In alle anderen Stellen des Stromkreises, insbesondere also in alle homogenen Leitertheile, wandert sie ein.

Fig. 44.

Betrachten wir nun genauer die Einwanderung in ein Stück eines geradlinigen Drahtes vom Radius r. Wir schneiden aus ihm einen Cylinder von der Länge l und dem Radius ϱ heraus. A und ebenso $E=\frac{A}{\lambda}$ ist überall parallel der Axe und von constanter Grösse. M verläuft in Kreislinien um die Axe und zwar im Sinne einer positiven Drehung um E; seine Grösse ist [s. Kap. IV, S. 262]:

$$M=\frac{A}{2V}\varrho\cdot$$

Folglich ist auf den Basisflächen des Cylinders $E_S=0$, also auch $\Sigma_n=0$. Auf der Mantelfläche aber ist nach (67b) (vgl. wegen des Vorzeichens Fig. 44):

$$\Sigma_n=\Sigma=V\cdot EM=\frac{A^2}{\lambda}\frac{\varrho}{2}\cdot$$

Dies ergiebt für den ganzen Cylinder die Einströmung

$$\Omega=l\cdot 2\pi\varrho\cdot\Sigma=\frac{A^2}{\lambda}\cdot l\pi\varrho^2=\frac{A^2}{\lambda}\cdot\tau=EA\tau\,,$$

und dies ist in der That die in dem Cylinder auftretende Joule'sche Wärme. Giebt man dem ϱ nach einander alle Werthe von r bis 0, so folgt: die Energie tritt normal durch die Drahtoberfläche ein und wird, indem sie gegen die Axe vordringt, schrittweise in Joule'sche Wärme umgesetzt.

Als das Medium, in welchem sich die elektromagnetische Energie ausbreitet, erscheint hier wesentlich die den Leiter umgebende Luft; der leitende Draht hat hingegen die Function, die Energie als elektromagnetische zu vernichten, sie in andere Formen überzuführen. —

Es finde jetzt in dem Draht eine periodisch veränderliche Strömung statt, die aber ebenfalls symmetrisch um die Drahtaxe und dieser parallel sei. Dann gilt für den soeben betrachteten Cylinder die Gleichung (66):

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial W_e}{\partial t} + \Psi = \Omega,$$

wo

$$W_m = \tfrac{1}{2}\, l \int_0^\varrho \mu M^2 2\pi\varrho d\varrho\,, \quad W_e = \tfrac{1}{2}\, l \int_0^\varrho \varepsilon E^2\, 2\pi\varrho d\varrho$$

$$\Psi = l \int_0^\varrho \lambda E^2 2\pi\varrho d\varrho\,, \qquad \Omega = l 2\pi\varrho V\cdot(EM)_\varrho$$

Nach dem Seite 380 gesagten dürfen wir $\frac{\partial W_e}{\partial t}$ neben Ψ stets vernachlässigen, und erhalten

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} + \Psi = \Omega.$$

Die einströmende Energie wird jetzt nicht mehr vollständig als Joule'sche Wärme consumirt, sondern zum Theil in der Form magnetischer Energie aufgespeichert. Aber dies geschieht nur vorübergehend. Wir entnehmen dem Inhalt des § 1: E und M haben nicht die gleiche Phase; das Product EM hat daher wechselndes Vorzeichen, und es findet also nicht während der ganzen Dauer der Periode ein Einströmen, sondern zeitweise auch ein Ausströmen der Energie statt. Nach Ablauf einer Periode besitzt W_m wieder seinen Anfangswerth, und die algebraische Summe der eingeströmten Energie ist in Wärme übergegangen. Weiter aber: dieser Vorgang erstreckt sich nicht gleichmässig über den ganzen Drahtquerschnitt; er beschränkt sich auf eine um so dünnere Oberflächenschicht, je schneller die Stromwechsel erfolgen. —

Wir betrachten ferner die Entladung eines Condensators von der Capacität c durch einen Leiterkreis vom Widerstand w und dem Selbstinductionscoefficienten p. Hierbei setzt sich die elektrische Energie endgültig in Joule'sche

Wärme um, nachdem sie im allgemeinen die Zwischenform magnetischer Energie durchlaufen hat (vgl. Kap. V, S. 331 f.). Der Vorgang wird aber besonders einfach, wenn $\frac{p}{cw^2}$ eine sehr kleine Zahl ist; er besteht dann wesentlich aus einer directen Umwandlung der elektrischen Energie in Joule'sche Wärme; der Strom und die Feldintensität sind dabei in ihrem zeitlichen Verlauf durch einen Ausdruck

$$a e^{-\frac{t}{cw}}$$

dargestellt. Das Feld sinkt überall gleichmässig zu Null ab, indem es sich selbst ähnlich bleibt. Die allgemeine Gleichung (K')

$$V \cdot P(M) = A + \varepsilon \dot{E}$$

ergiebt in unserem Fall

im Draht: $$V \cdot P(M) = \lambda E$$

im Dielektricum: $$V \cdot P(M) = \varepsilon \dot{E} = -\frac{\varepsilon}{cw} E;$$

die Rotation von M fällt also im Draht mit der Richtung von E zusammen (wie im stationären Zustand), in der Luft hat sie die zu E entgegengesetzte Richtung. Da in der Nähe des Drahtes die Drahtaxe Symmetrieaxe des magnetischen Feldes ist, so bedeutet dies, wie oben, eine Einwanderung der Energie gegen die Drahtaxe hin. Es besitze nun auch das Feld im Condensator eine Symmetrieaxe; derselbe bestehe etwa aus zwei parallelen kreisförmigen Platten. Dann wandert (vgl. Figur 45) die Energie von der Mittelnormale her, parallel zu den Platten und gleichförmig nach allen Seiten

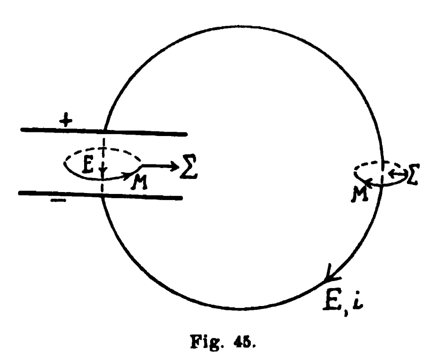


Fig. 45.

aus dem Condensator aus. Indem sie den gemeinsamen Normalen von E und M folgt, erreicht sie die Drahtoberfläche. —

Endlich wenden wir uns nochmals zu dem in Kapitel II § 2 behandelten Fall des erlöschenden elektrischen Feldes. Es mögen der Einfachheit wegen die Grössen K überall $= 0$ angenommen werden. Ist dann in einem Moment $t = 0$:

$$P(E_0) = 0 \quad \text{und} \quad P(M_0) = 0\,,$$

so bleibt $M = M_0$ für alle Zeit, und es wird

$$E = E_0 e^{-\frac{t}{T}}\,, \quad \text{wo } T = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Denn diese Werthe genügen den Anfangsbedingungen und ergeben

$$\dot{M} = 0\,, \qquad P(E) = e^{-\frac{t}{T}} \cdot P(E_0) = 0$$
$$\lambda E + \varepsilon \dot{E} = 0, \quad P(M) = 0\,,$$

wodurch die Gleichungen (J), (K) erfüllt sind.

Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen aber folgt weiter: für jedes einzelne Volumelement

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = 0\,;$$

ebenso aus der dritten $-\dfrac{\partial W_e}{\partial t} = \Psi$;

aus der zweiten und vierten $\Omega = 0$.

In Worten: kein Volumelement erhält Energie von aussen zugeführt; seine etwaige (von permanenten Magneten herrührende) magnetische Energie bleibt unverändert; seine elektrische Energie setzt sich an Ort und Stelle in Joule'sche Wärme um. Der Vorgang erscheint also auch in der Poynting'schen Auffassung als das, was er für die Maxwell'sche Theorie ist: als der begrifflich einfachste Vorgang, der in einem elektromagnetischen Felde möglich ist. —

[Ohne Werth ist die Poynting'sche Vorstellung für die Behandlung statischer Felder. Handelt es sich a) um das

Feld ruhender Elektricität oder b) um das Feld ruhender Magnete, so ist a) $M = 0$ oder b) $E = 0$, und jede dieser Voraussetzungen ergiebt $\Sigma = 0$; die Energie ist nicht in Bewegung. — Superponiren sich aber diese beiden statischen Felder, so ist zwar $P(E) = 0$ und $P(M) = 0$, und folglich auch $\Omega = 0$ für jedes Volumtheilchen, aber es ist Σ im Allgemeinen von Null verschieden. Man hätte sich also nach Poynting vorzustellen, dass die Energie in Bewegung ist, aber freilich durchweg in geschlossenen Bahnen, so dass also der Energieinhalt jedes Raumelements trotz der Bewegung unverändert bleibt. Diese Auffassung erscheint gewaltsam; als natürlich würde hier nur eine Darstellung gelten können, welche die Energieströmung überall gleich Null ergiebt.]

Eindeutige Bestimmtheit eines begrenzten Feldes. — In engstem Zusammenhang mit der Poynting'schen Gleichung stehen die beiden folgenden Sätze:

1) in einem Raum τ sei a) die innere elektromotorische Intensität $K = 0$ durchweg;

b) zur Zeit $t = 0$: $E = 0$, $M = 0$ durchweg;

c) an der Oberfläche S zu jeder Zeit entweder $E_S = 0$ oder $M_S = 0$. Dann ist in τ durchweg und zu jeder späteren Zeit $E = 0$ und $M = 0$.

Beweis: nach a) ist $\Psi = \int \lambda E^2 d\tau$, und nach c) ist $\Omega = 0$. Also wird die Gleichung (66):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \tfrac{1}{2}(\mu M^2 + \varepsilon E^2)d\tau + \int \lambda E^2 d\tau = 0\cdot$$

Daraus folgt durch Integration von 0 bis t und unter Berücksichtigung von b):

$$\left[\int \tfrac{1}{2}(\mu M^2 + \varepsilon E^2)d\tau\right]_t + \int_0^t dt \int \lambda E^2 d\tau = 0 \qquad (70)$$

für jeden Werth von t; also, da die $\mu, \varepsilon, \lambda$ positive Grössen sind: $E = 0$ und $M = 0$ für jeden Punkt in τ und für jedes t.

2) für einen Raum τ sei E und M zur Zeit $t = 0$ gegeben, und an der Oberfläche S sei zu jeder Zeit E_S oder M_S

gegeben. Dann ist E und M für jeden Punkt in τ zu jeder späteren Zeit bestimmt.

Beweis: wenn es zwei Felder E', M' und E'', M'' gäbe, welche den Bedingungen unter 2) und zugleich den Gleichungen (J) (K) genügten, so würde für das Differenzfeld $E_t = E_t' - E_t''$, $M_t = M_t' - M_t''$ die Gleichung (70) gelten, also überall und stets $E = 0$, $M = 0$ sein.

Daraus ergiebt sich praktisch: wenn wir ein Feld E, M gefunden haben, welches die Maxwell'schen Gleichungen befriedigt, und aus unserer Lösung die Anfangswerthe E_0 und M_0 für einen bestimmten Raum τ, und die Grenzwerthe E_S [oder statt dessen M_S] an seiner Oberfläche entnehmen, so haben wir damit die Aufgabe gelöst, das Feld E, M zu finden, welches diesen Anfangswerthen E_0, M_0 in τ, und diesen Grenzwerthen E_S [bezw. M_S] entspricht.

Begrifflich aber folgt dieses: damit das elektromagnetische Feld überall und jederzeit bestimmt sei, muss es überall zu einer Zeit bekannt sein. — Zerfällt aber der ganze Raum in τ_1 und τ_2, und interessirt uns nur das Feld in τ_1, so wird uns alle Kenntniss der Vorgänge in τ_2 vollkommen ersetzt durch die Kenntniss gewisser Grössen an der Trennungsfläche. Das heisst: das Feld in τ_2 kann das Feld in τ_1 nur beeinflussen, indem es zunächst das Feld zwischen τ_1 und τ_2 beeinflusst; das elektromagnetische Feld breitet sich continuirlich durch den Raum aus. Von den Gesetzen dieser Ausbreitung handelt das nächste Kapitel.

Kapitel VII.

Die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes.

§ 1. Ausbreitung im homogenen Medium.

Wir betrachten zunächst ein unbegrenztes homogenes Medium; d. h. wir setzen voraus, dass λ, ε und μ unabhängig von den Coordinaten seien, und $K = 0$, also $\Lambda = \lambda E$.

Wir erhalten aus der ersten der Gleichungen (K''):

$$\lambda\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = V\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)$$

oder, da μ constant,

$$= V\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(\mu M_z)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial(\mu M_y)}{\partial t}\right]$$

also nach (J'')

$$= V^2\left[\Delta E_x - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(E)\right].$$

Ebenso: aus der ersten der Gleichungen (J'') folgt

$$\lambda\mu \frac{\partial M_x}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 M_x}{\partial t^2} = -V\left(\lambda + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)$$

oder, da λ und ε constant,

$$= -V\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda E_z + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda E_y + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial t}\right)\right]$$

also nach (K″)

$$= V^2\left[\Delta M_x - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(M)\right].$$

Wenn wir also, wie früher, schreiben:

$$\frac{V^2}{\varepsilon\mu} = \omega^2, \quad \frac{\varepsilon}{\lambda} = T, \tag{1}$$

so gelten für die x-Componenten die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \omega^2\left[\Delta E_x - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(E)\right] \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial M_x}{\partial t} &= \omega^2\left[\Delta M_x - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(M)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und entsprechend für die y- und z-Componenten. Nun folgt, da $\lambda, \varepsilon, \mu$ Constanten sind, aus (K″):

$$\lambda\Gamma(E) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(E) = 0$$

und aus (J″):

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(M) = 0,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\,\Gamma(E) &= \varrho_{eo}\, e^{-\frac{t}{T}} \\ \mu\Gamma(M) &= \varrho_{mo} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wo ϱ_{eo} und ϱ_{mo} die zur Zeit $t = 0$ geltenden Werthe von $\varepsilon\Gamma(E)$ und $\mu\Gamma(M)$, d. h. die Dichte der elektrischen und magnetischen Vertheilung zur Zeit $t = 0$ bezeichnen. Die magnetische Vertheilung also verharrt. Ebenso die elektrische Vertheilung in einem Isolator ($T = \infty$); in einem homogenen Leiter klingt sie in durchweg gleichmässigem Abfall zu Null ab, und bleibt dann Null für alle Zeit.

Man setze nun:

$$\left.\begin{array}{ll} E_l = E_{1l} + E_{2l} & M_l = M_{1l} + M_{2l} \\ E_{2l} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial l} & M_{2l} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial l} \\ \varphi = e^{-\frac{t}{T}} \displaystyle\int \frac{\varrho_{eo}}{4\pi\varepsilon r}\, d\tau & \psi = \displaystyle\int \frac{\varrho_{mo}}{4\pi\mu r}\, d\tau \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dann ist erstens:

$$\frac{\partial E_{2x}}{\partial t} + \frac{E_{2x}}{T} = 0, \qquad \frac{\partial M_{2x}}{\partial t} = 0,$$

und zweitens:

$$\Delta E_{2x} = -\frac{\partial}{\partial x} \Delta\varphi \qquad \Delta M_{2x} = -\frac{\partial}{\partial x} \Delta\psi$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho_{eo}}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{t}{T}}\right) \qquad = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho_{mo}}{\mu}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(E) \text{ nach (3)} \qquad = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(M) \text{ nach (3).}$$

Also folgt aus (2) für die Theilfelder E_1 und M_1:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 E_{1x}}{\partial t^2} + \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial E_{1x}}{\partial t} = \omega^2\, \Delta E_{1x} \text{ etc.} \\ \dfrac{\partial^2 M_{1x}}{\partial t^2} + \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial M_{1x}}{\partial t} = \omega^2\, \Delta M_{1x} \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diesem Theilfeld superponirt sich ein zweites, welches nach (4) durch die Anfangswerthe in einfacher Weise bestimmt ist. M_2 ist das statische Feld der Vertheilung ϱ_{mo}. In einem Isolator ist E_2 ebenso das statische Feld der Vertheilung ϱ_{eo}; in einem Leiter ist, da nach (3)

$$\varrho_{eo}\, e^{-\frac{t}{T}} = \varepsilon\, \Gamma(E) = \varrho_e,$$

E_2 ein Feld, welches aus der verklingenden Vertheilung ϱ_e

genau so abgeleitet ist, als wenn diese Vertheilung stationär wäre. Das Feld E_1, M_1 aber ist durch Gleichungen (5) bestimmt, welche aus (2) entstehen, wenn man die elektrische und magnetische Dichte dauernd gleich Null annimmt. Die vorstehenden Sätze wiederholen einen in Kapitel VI, S. 379 abgeleiteten Satz und ergänzen ihn in Bezug auf das Innere homogener Leiter.

Wir dürfen und wollen in der Folge das Theilfeld E_2, M_2 ausser Betracht lassen. Dann gelten also für unser Feld E, M die Gleichungen (J), (K) mit den Werthen: λ, ε, μ constant, $K = 0$, und mit dem Zusatz:

$$\Gamma(E) = 0, \quad \Gamma(M) = 0 \tag{6}$$

und daraus folgt für alle sechs Componenten $E_x\, E_y\, E_z\, M_x\, M_y\, M_z$ eine Differentialgleichung von derselben Form:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial X}{\partial t} = \omega^2 \Delta X. \tag{7}$$

Aus (7) folgt unmittelbar: zu einer beliebigen Zeit $t = 0$ können im ganzen Raum X und $\frac{\partial X}{\partial t}$ willkürlich vorgeschrieben werden; dann ist dadurch überall $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ bestimmt. Oder: für $t = 0$ und $t = dt$ kann X überall willkürlich gewählt werden, — nur endlich und stetig in Raum und Zeit muss es sein, und im unendlichen verschwinden, — dann ergeben sich aus (7) die Werthe für $t = 2dt$. Aus den Werthen für dt und $2dt$ folgen ebenso die Werthe für $3dt$ und so fort. Das heisst: durch willkürlich gegebene Anfangswerthe von X und $\frac{\partial X}{\partial t}$ ist X für alle Zeit bestimmt. — Willkürlich sind diese Anfangswerthe gegenüber der Gleichung (7). Aber unsere Ausgangsgleichungen (J''), (K'') zeigen, dass für die sämmtlichen 6 Componenten nicht 12, sondern nur 6 Systeme von Anfangswerthen frei gewählt werden können. Sobald alle Anfangswerthe X gewählt sind, folgen aus (J''), (K'') bereits die Anfangswerthe $\frac{\partial X}{\partial t}$. Die Gleichungen (6) geben dann noch zwei Bedingungen für die 6 Systeme der Anfangswerthe X. —

Anfangswerthe für die 12 Grössen X und $\frac{\partial X}{\partial t}$ der Gleichung (7), welche den Gleichungen (J″), (K″) und (6) genügen, sollen „mögliche Anfangswerthe" heissen. Wir wollen zeigen, dass jedes System von Lösungen der Gleichungen (7), welches möglichen Anfangswerthen entspricht, auch dauernd den Gleichungen (J″), (K″) und (6) genügt.

Es mögen also für $t = 0$ willkürliche Werthe der $E_x \ldots M_z$ vorgeschrieben sein, so jedoch, dass

$$\Gamma(E)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma(M)_0 = 0\,.$$

Dann hat man aus den Gleichungen (K″) und (J″) die Werthe von $\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial M_x}{\partial t}\right)_0 \cdots$ zu entnehmen. Sie sind auf diese Weise so bestimmt, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(E)\right)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(M)\right)_0 = 0$$

wird. Es seien nun Lösungen $E_x \ldots M_z$ der Gleichung (7) gefunden, welche für $t = 0$ die vorgeschriebenen Werthe E_{x0} $\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)_0$ u. s. w. liefern. Da (7) linear und homogen ist mit constanten Coefficienten, so sind dann auch die Differentialquotienten der $E_x \ldots M_z$ nach x, y, z, t, sowie beliebige lineare Functionen derselben Lösungen von (7). Also sind zunächst Lösungen: $\Gamma(E)$ und $\Gamma(M)$. Da aber für $t = 0$: $\Gamma(E) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(E) = 0$, da weiter durch diese Bedingungen die Lösung von (7) völlig bestimmt und eine Lösung jedenfalls $\Gamma(E) \equiv 0$ ist, so ist $\Gamma(E) = 0$ für alle Zeit. Dasselbe folgt für $\Gamma(M)$. D. h. die Gleichungen (6) sind für alle Zeit erfüllt. — Ferner ist eine Lösung von (7) die Function

$$\alpha = V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) - \left(\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} + \lambda E_x\right).$$

Da für $t = 0$ die Gleichungen (K″) erfüllt waren, so ist $\alpha = 0$ für $t = 0$. Da für $t = 0$ die Gleichungen (J″) und (6) erfüllt waren, so ist für $t = 0$:

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) = V^2 \left[\Delta E_x - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(E)\right] = V^2 \Delta E_x .$$

Da andrerseits E_x der Gleichung (7) genügt, so ist allgemein:

$$\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \lambda E_x\right) = V^2 \Delta E_x .$$

Also ist für $t = 0$ auch $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$. Aus den drei Bedingungen für α: „α ist eine Lösung von (7); für $t = 0$ ist $\alpha = 0$ und $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$“ folgt wieder: $\alpha \equiv 0$. Das heisst aber: die erste der Gleichungen (K″) ist für alle Zeit erfüllt; das gleiche folgt für die zweite und dritte, und für die drei Gleichungen (J″).

Wir stellen nun die Frage: In einem unendlich ausgedehnten homogenen Medium sind in einem bestimmten Moment in einem beliebigen endlichen Gebiet willkürliche (aber endliche und stetige) Werthe der Feldgrössen gegeben; welches sind die Werthe der Feldgrössen im ganzen Raum zu allen späteren Zeiten? Oder: wie breiten sich willkürlich gegebene elektromagnetische Störungen in einem homogenen Medium aus?

Die Aufgabe lässt sich nach dem soeben bewiesenen so formuliren: es wird eine durchweg stetige, im unendlichen verschwindende Function $X_{p,t}$ des Ortes p und der Zeit t gesucht, welche 1) der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial X}{\partial t} = \omega^2 \Delta X, \tag{7}$$

und 2) für $t = 0$ liefert:

$$X_p = f_1(p), \quad \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_p = f_2(p), \tag{8}$$

wo f_1 und f_2 stetige und ausserhalb eines bestimmten endlichen Gebiets verschwindende, im übrigen aber vollkommen willkürliche und von einander unabhängige Functionen der Coordinaten von p sind.

Die Lösung ist von **Birkeland***) gefunden; sie lautet:

$$X_{p,t} = e^{-\frac{t}{2T}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{32\pi T^2 \omega^3} \Big[\int\limits_{\tau} \left(\frac{f_1(p')}{2T} + f_2(p') \right) \mathfrak{M}(r,t)\, d\tau \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\tau} f_1(p') \cdot \mathfrak{M}(r,t)\, d\tau \Big] \\ + \frac{1}{4\pi\omega^2 t} \int\limits_{S} \left(\frac{f_1(p')}{2T} + f_2(p') \right) dS \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\omega^2 t} \int\limits_{S} f_1(p')\, dS \right) \end{array} \right\} \tag{9}$$

Hier bedeutet τ das Volumen, S die Oberfläche einer Kugel K mit dem Mittelpunkt p und dem Radius ωt; p' einen variablen Punkt im Integrationsgebiet; $\mathfrak{M}(r, t)$ die Function

$$\mathfrak{M}(r,t) = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{4\omega T} \right)^{2n} \frac{[(\omega t)^2 - r^2]^n}{(n!)^2 (n+1)}, \tag{10}$$

wo $r = \overline{pp'}$. Wir verificiren zunächst diese Lösung, indem wir zeigen, dass sie allen Bedingungen genügt.

Für endliche Werthe von r und t ist $\mathfrak{M}$ endliche und stetige Function dieser Grössen, also auch X endliche und stetige Function von Ort und Zeit. Für unendliche Werthe von t verschwindet X überall wegen des Factors $e^{-\frac{t}{2T}}$; für endliche Werthe von t und unendlich entfernte Punkte p liegt das ganze Gebiet, in welchem f_1 und f_2 von Null verschiedene Werthe haben, ausserhalb der Kugel K, es wird daher jedes Element der Integrale und somit auch X gleich Null. Die Endlichkeits- und Stetigkeitsbedingungen sind also erfüllt.

Für $t = 0$ zieht sich die Kugel K in den Punkt p zusammen. Es verschwinden daher die Volumintegrale und es wird, da $S = 4\pi(\omega t)^2$,

$$X_{p,t} = \lim_{t=0} \left[e^{-\frac{t}{2T}} \left[t \cdot \left(\frac{f_1(p)}{2T} + f_2(p) \right) + f_1(p) \right] \right] = f_1(p).$$

*) Archives de Genève, t. 34, S. 1 (1895).

$$\frac{\partial}{\partial t} X_{p,t} = \lim_{t=0} \left[e^{-\frac{t}{2T}} \left(-\frac{1}{2T} \right) \left| t \left(\frac{f_1(p)}{2T} + f_2(p) \right) + f_1(p) \right| + \frac{f_1(p)}{2T} + f_2(p) \right]$$
$$= f_2(p) .$$

Die Anfangsbedingungen (8) sind also erfüllt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Differentialgleichung (7) befriedigt wird. Wir schreiben:

$$X_{p,t} = \frac{e^{-\frac{t}{2T}}}{4\pi\omega^2} \left(Y + \frac{\partial Z}{\partial t} \right), \quad \text{wo} \tag{11a}$$

$$Y = \frac{1}{8\,T^2\omega} \int_\tau F(p')\, \mathfrak{M}(r,t)\, d\tau + \frac{1}{t} \int_S F(p')\, dS \equiv Y_\tau + Y_S \tag{11b}$$

und wo Z aus Y entsteht, indem die Function

$$F(p') = \frac{f_1(p')}{2T} + f_2(p')$$

durch die Function $f_1(p')$ ersetzt wird.

Wir wollen zunächst zeigen, dass

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta Y = \frac{Y}{4T^2} \tag{12}$$

ist. In Y_τ hängt sowohl die Function $\mathfrak{M}$, wie die Integrationsgrenze von t ab. In letzterer Beziehung ist zu bemerken: wenn t um dt zunimmt, so wächst τ um eine Kugelschale, deren Dicke $\omega\, dt$ und deren Fläche S ist, also das Raumintegral um

$$\omega\, dt \int_S F(p') \cdot \mathfrak{M}(r,t)\, dS;$$

auf S ist aber: $r = \omega t$ und somit $\mathfrak{M} = 1$. Also:

$$\frac{\partial Y_\tau}{\partial t} = \frac{1}{8\,T^2\omega} \left| \int_\tau F \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\, d\tau + \omega \int_S F \cdot dS \right| .$$

Beachtet man, dass für $r = \omega t$ wird: $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{t}{16\,T^2}$, so folgt

in gleicher Weise weiter:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{1}{8T^2\omega}\left[\int\limits_\tau F\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial t^2}d\tau + \frac{\omega t}{16\,T^2}\int\limits_S F\cdot dS + \omega\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S F\cdot dS\right]. \quad (13)$$

Um $\varDelta Y_\tau$ zu berechnen, bezeichnen wir für den Augenblick die Coordinaten von p durch (x, y, z), diejenigen von p' durch $(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)$. Dann ist

$$\varDelta Y_\tau = \frac{\partial^2 Y_\tau}{\partial x^2} + \cdot\cdot \quad \text{und} \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2;$$

es ist F nur von $x+\xi\,..$, $\mathfrak{M}$ nur von ξ, η, ζ abhängig, und die Integrationsgrenze ist durch feste Werthe von ξ, η, ζ gegeben. Also folgt:

$$8T^2\omega\cdot\varDelta Y_\tau = \int\limits_\tau\left(\frac{\partial^2 F(x+\xi,..)}{\partial x^2} + \cdot\cdot\right)\mathfrak{M}(\xi,\eta,\zeta)\,d\tau$$

$$= \int\limits_\tau\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \cdot\cdot\right)\mathfrak{M}\cdot d\tau.$$

Nun ist aber nach dem Green'schen Satz [vgl. (11) S. 27]

$$-\int\limits_\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau$$

$$= \int\limits_S U\frac{\partial U}{\partial n}dS + \int\limits_\tau U\cdot\varDelta V d\tau = \int\limits_S V\frac{\partial U}{\partial n}dS + \int\limits_\tau V\cdot\varDelta U d\tau,$$

wo n die i n n e r e Normale von S bezeichnet. Also folgt:

$$8T^2\omega\cdot\varDelta Y_\tau = \int\limits_\tau F\left(\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\xi^2} + \cdot\cdot\right)d\tau + \int\limits_S\frac{\partial F}{\partial r}\mathfrak{M}\,dS - \int\limits_S F\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial r}dS.$$

Hier ist in den Oberflächenintegralen wieder $\mathfrak{M} = 1$, und

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial r}\right)_{r=\omega t} = -\frac{r}{16\omega^2 T^2} = -\frac{t}{16\omega T^2}.$$

Im Volumintegral ist

$$\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\xi^2} + \cdot\cdot = \frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial r},$$

[vgl. Kap. VI, (61)], also

$$\left.\begin{aligned}\Delta Y_\tau = \frac{1}{8T^2\omega}\Bigg[&\int_\tau F\left(\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial r}\right) d\tau \\ &+ \int_S \frac{\partial F}{\partial r} dS + \frac{t}{16T^2\omega}\int_S F \cdot dS\Bigg]\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

In $Y_S = \frac{1}{t}\int_S F(p')\, dS$ ist S eine Kugelfläche vom Radius $r = \omega t$. Also können wir schreiben

$$Y_S = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial r}\int_\tau F(x + \xi, ..)\, d\tau.$$

Aus diesem Ausdruck aber folgt wie oben:

$$\Delta Y_S = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial r}\int_\tau \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \cdot\cdot\right) d\tau$$

$$\Delta Y_S = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial r}\int_S \frac{\partial F}{\partial r} dS. \tag{15}$$

Setzen wir $dS = r^2\, do = (\omega t)^2 do$, so wird

$$Y_S = \omega^2 t \int F \cdot do$$

und in dem Integral ist jetzt nur noch F, aber nicht mehr die Grenze, von r und dadurch von t abhängig. Es wird

$$\frac{\partial Y_S}{\partial t} = \omega^2 \int F \cdot do + \omega^3 t \int \frac{\partial F}{\partial r} do$$

$$\frac{\partial^2 Y_S}{\partial t^2} = 2\omega^3 \int \frac{\partial F}{\partial r} do + \omega^4 t \int \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} do; \tag{16}$$

für (15) aber können wir schreiben:

$$\Delta Y_S = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int \frac{\partial F}{\partial r} do\right)$$

$$= \frac{2r}{t}\int \frac{\partial F}{\partial r} do + \frac{r^2}{t}\int \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} do$$

$$= 2\omega \int \frac{\partial F}{\partial r} do + \omega^2 t \int \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} do .$$

Also nach (16):

$$\frac{\partial^2 Y_S}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta Y_S .$$

Daher ist

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta Y = \frac{\partial^2 Y_\tau}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta Y_\tau .$$

Also nach (13) und (14):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta Y = \frac{1}{8T^2\omega}\Bigg[\int_\tau F \cdot \left\{\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} - \omega^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial r}\right)\right\} d\tau \\ + \omega \frac{\partial}{\partial t}\int_S F \cdot dS - \omega^2 \int_S \frac{\partial F}{\partial r} dS \Bigg| \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Gleichung (10) können wir aber schreiben:

$$\mathfrak{M} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n!)^2(n+1)}, \qquad x = \frac{(\omega t)^2 - r^2}{(4\omega T)^2} . \tag{18}$$

Folglich ist

$$4T^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \frac{t^2}{16T^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2}$$

$$4T^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial r} = -\frac{r}{2\omega^2}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}$$

$$4T^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\omega^2}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \frac{r^2}{16\omega^4 T^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2} .$$

Also

$$4T^2\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} - \omega^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial r}\right)\right] = 2\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + x\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2} \tag{19}$$

Andrerseits ist nach (18)

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial}{\partial x}[J_0(y)] , \tag{18a}$$

wo $x = -\left(\frac{y}{2}\right)^2$ und das Functionszeichen J_0 die gleiche Bedeutung haben, wie in Kapitel VI, Gleichung (27). Es ist aber [s. Kap. VI, (8)]

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial J_0}{\partial y} + J_0 = 0$$

oder

$$-x\frac{\partial^2 J_0}{\partial x^2} - \frac{\partial J_0}{\partial x} + J_0 = 0,$$

und daher:

$$-x\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \mathfrak{M} = 0.$$

Also folgt aus (19):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} - \omega^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial r}\right) = \frac{\mathfrak{M}}{4T^2}. \tag{20}$$

Ferner erhalten wir wie S. 416

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S F\cdot dS = \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega^2 t^2\int F\cdot do\right]$$

$$= 2\omega^2 t\int F\cdot do + \omega^2 t^2\cdot\omega\int\frac{\partial F}{\partial r}\,do,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S F\cdot dS = \frac{2}{t}\int\limits_S F\cdot dS + \omega\int\limits_S\frac{\partial F}{\partial r}\,dS\,. \tag{21}$$

Führt man (20) und (21) in (17) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \omega^2\Delta Y = \frac{1}{8T^2\omega}\left[\frac{1}{4T^2}\int\limits_\tau F\cdot\mathfrak{M}\cdot d\tau + \frac{2\omega}{t}\int\limits_S F\cdot dS\right],$$

oder nach (11b):

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \omega^2\Delta Y = \frac{1}{4T^2}Y, \text{ d. h. die Gleichung (12).}$$

Dieselbe Gleichung folgt ebenso für die Function Z, also auch für $Y + \frac{\partial Z}{\partial t}$, also ist nach (11a):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e^{\frac{t}{2T}} X\right) = \left(\omega^2 \Delta X + \frac{1}{4T^2} X\right) e^{\frac{t}{2T}},$$

oder

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial X}{\partial t} = \omega^2 \Delta X.$$

Dies ist die zu beweisende Gleichung (7). —

Nachdem somit die Lösung (9) verificirt ist, gehen wir zur Discussion derselben über: X zerfällt in einen ersten Theil X_r, welcher durch Raumintegrale, und einen zweiten X_S, welcher durch Flächenintegrale bestimmt ist. Zu dem Werthe von X_S im Punkte p liefern die Anfangswerthe von X und $\frac{\partial X}{\partial t}$ in allen denjenigen Punkten Beiträge, welche auf der Oberfläche S einer Kugel K liegen, die mit dem Radius ωt um p als Mittelpunkt beschrieben wird, — zu dem Werthe von X_r tragen die Anfangswerthe aller Punkte im Innern von K bei.

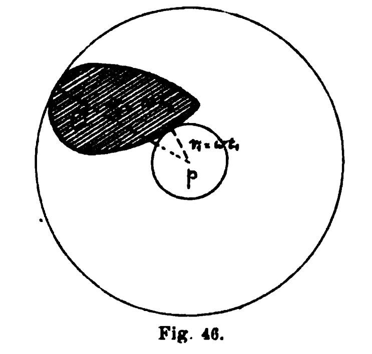


Fig. 46.

Nennen wir also das ursprüngliche Störungsgebiet O, so ist X_S von Null verschieden, solange die Fläche S das Gebiet O schneidet; X_r ist von Null verschieden, solange S Theile von O umfasst. Sei daher (Fig. 46) $r_1 = \omega t_1$ der kleinste, $r_2 = \omega t_2$ der grösste der Abstände r des Punktes p von den verschiedenen Punkten p' in O. Dann zerfällt der Vorgang in p in drei Perioden: 1) Solange $t < t_1$ ist, sind sowohl X_S wie X_r gleich Null. 2) Während $t_1 < t < t_2$ ist, sind sowohl X_S wie X_r von Null verschieden. 3) Sobald $t > t_2$ geworden ist, ist wieder $X_S = 0$, X_r aber behält dauernd endliche Werthe, welche nur für unendliches t wieder gegen den Werth Null convergiren. — Der Punkt p wird also in dem genau angebbaren Moment $t_1 = \frac{r_1}{\omega}$ von der Störung ergriffen; aber die

Störung in p hat kein genau angebbares Ende; sie klingt allmählich zu Null ab.

Errichten wir (Fig. 47) in allen Punkten der Oberfläche S_0 von O nach aussen und nach innen gerichtete Normalen N_a bezw. N_i von der gleichen Länge ωt, und legen durch die Endpunkte die zu S_0 parallelen Flächen S_a und S_i. Dann schreiten beide Flächen parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit ω vor. Ein Punkt p befindet sich in der ersten Periode, solange keine der beiden Flächen ihn einschliesst:

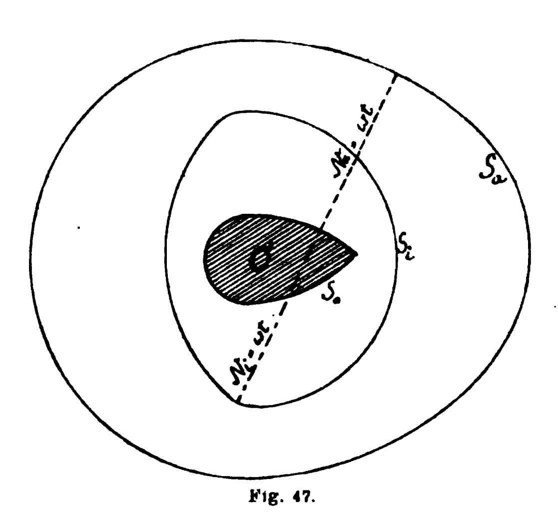


Fig. 47.

— in der zweiten Periode, wenn er von der Fläche S_a überschritten ist, von S_i aber noch nicht, — in der dritten Periode, sobald er von beiden Flächen eingeschlossen ist.

Also können wir sagen: von dem Störungsgebiet O schreitet die Störung normal zur Oberfläche mit der constanten Geschwindigkeit ω vor, und ergreift so immer weitere Gebiete in parallelen Schichten. Die vordringende Welle hat eine scharf begrenzte Front; auf ihrer Rückseite aber läuft sie in eine allmählich verschwindende Kräuselung aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist: $\omega = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Also (s. S. 278) für

atmosphärische Luft: $\omega_0 = 3.10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, und für ein beliebiges Medium: $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}}$, oder, abgesehen von der Gruppe der ferromagnetischen Körper, praktisch: $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}$.

Einfachere Verhältnisse ergeben sich unter bestimmten Voraussetzungen:

a) es sei T unendlich. Dann verschwindet X_τ und aus (9) wird:

$$X_{p,t} = \frac{1}{4\pi\omega^2 t}\int\limits_S f_2(p')\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi\omega^2 t}\int\limits_S f_1(p')\,dS\right). \qquad (9\text{a})$$

Es ist aber

$$\frac{1}{4\pi(\omega t)^2}\int\limits_S f(p')\,dS$$

nichts anderes, als der Mittelwerth $[f]$ aller f-Werthe auf der Kugelfläche S; also, wenn wir noch ihrer Bedeutung entsprechend

$$[f_1] = [X]_0 \quad \text{und} \quad [f_2] = \left[\frac{\partial X}{\partial t}\right]_0$$

schreiben:

$$X_{p,t} = t\left[\frac{\partial X}{\partial t}\right]_0 + \frac{\partial}{\partial t}\{t[X]_0\}. \qquad (9'\text{a})$$

Die Störung in p ist jetzt nur solange vorhanden, wie die Kugelfläche S das ursprüngliche Störungsgebiet O durchschneidet, und sie ist in der durch (9'a) gegebenen Weise durch die Mittelwerthe der ursprünglichen Störung auf der Schnittfläche bestimmt. Front und Rücken der von O sich ausbreitenden Welle sind jetzt scharf begrenzt.

Unter der gleichen Voraussetzung $T = \infty$ wird aus (7)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta X. \qquad (7\text{a})$$

(9a) ist die von Poisson gefundene Lösung von (7a).

Die Differentialgleichung (7a) nebst der Bedingung (6):

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

gilt für die Componenten X, Y, Z der elastischen Verschiebung in einem isotropen incompressiblen Medium. Hier ist $\omega^2 = \frac{e}{\varrho}$, wo e den Elasticitätscoefficienten für scheerende Deformation, ϱ die Dichte bedeutet. Andrerseits ist $T = \infty$ für einen Isolator. Also ergiebt sich: in einem Isolator breiten sich elektromagnetische Störungen nach demselben Gesetz aus, wie mechanische Deformationen in einem incompressiblen elastischen Körper. Die Uebereinstimmung wird eine numerische, wenn die Anfangswerthe numerisch gleich sind und $\frac{V^2}{\varepsilon\mu} = \frac{e}{\varrho}$ ist.

b) Es handle sich um ein beliebiges Medium. Wir wollen aber nur solche Zeiten t und nur solche Punkte p betrachten, für welche die Abstände $\overline{pp'}$ von allen Punkten des Störungsgebietes O sehr klein sind gegen ωt. Dann ist $X_S = 0$, und in X_r darf die Integration über den unendlichen Raum erstreckt werden; — beides gilt ja bereits, sobald nur alle Abstände kleiner als ωt sind. Also wird aus (9):

$$X_{p,t} = \frac{e^{-\frac{t}{2T}}}{32\pi T^2\omega^3} \int_\infty \left[\left(\frac{f_1}{2T} + f_2\right)\mathfrak{M} + f_1 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\right] d\tau$$

und hier ist in $\mathfrak{M}$ weiter $\frac{r}{\omega t}$ eine kleine Grösse. Es werde ferner t so gewählt, dass $\frac{t}{T}$ sehr gross ist. Dann ist [(18) und (18a)] in der Function

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial}{\partial x}[J_0(y)], \quad \text{wo} \; -\left(\frac{y}{2}\right)^2 = x = \frac{(\omega t)^2 - r^2}{(4\omega T)^2},$$

x eine sehr grosse Zahl, und in erster Näherung $= \frac{t^2}{16 T^2}$.

Dann aber gilt genähert [s. Kap. VI, Gleichung (13)]:

$$\mathfrak{M} = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi} \cdot x^{3/4}},$$

und folglich

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \cdot \frac{t}{8T^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{t}{8T^2} = \frac{\mathfrak{M}}{2T}.$$

Also

$$X_{p,t} = \frac{1}{32\pi T^2 \omega^3} \int_{\infty} \left(\frac{f_1}{T} + f_2 \right) \frac{e^{-\frac{t}{2T}} e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi} \cdot x^{3/4}} \, d\tau .$$

Weiter

$$e^{-\frac{t}{2T}} \cdot e^{2\sqrt{x}} = e^{-\frac{t}{2T} + \frac{1}{2T}\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{\omega^2}}}$$

also genähert

$$= e^{-\frac{r^2}{4T\omega^2 t}},$$

und endlich:

$$X_{p,t} = \frac{1}{(4\pi \, T\omega^2 t)^{3/2}} \int_{\infty} [f_1(p') + T \cdot f_2(p')] \, e^{-\frac{r^2}{4T\omega^2 t}} \cdot d\tau . \quad (9b)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Ausbreitung ist ganz verschieden von der unter a) besprochenen. Zu dem Werthe von X an allen Orten und zu allen Zeiten tragen die Anfangswerthe aller Raumtheile bei, — nur in verschiedenem Masse. Den Factor

$$g = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-\frac{r^2}{\eta}}}{\eta^{3/2}}, \quad \text{wo } \eta = 4T\omega^2 t,$$

können wir als das „Gewicht“ bezeichnen, mit welchem sich die Anfangsstörung des Punktes p' geltend macht. Dasselbe nimmt für einen fest gegebenen Zeitpunkt ab mit zunehmender Entfernung $r = \overline{pp'}$. Für einen fest gegebenen Punkt p hat g ein Maximum, wenn

$$t = t_m = \frac{r^2}{6T\omega^2}$$

ist, und dieser Maximalwerth ist proportional mit $\frac{1}{r^3}$. Je grösser also der Abstand pp' ist, um so geringer ist der Maximalbeitrag, den p' zur Störung in p liefert, und um so später trifft er ein. Die Zeit aber, nach welcher er eintrifft, ist proportional nicht mit r, sondern mit r^2. Von einer bestimmten Ausbreitungsgeschwindigkeit kann also in keinem Sinne gesprochen werden. — Es sei noch $T \cdot f_2(p')$ durchweg verschwindend klein gegen $f_1(p')$. Sind dann in zwei verschiedenen Medien die gleichen Anfangsstörungen gegeben, so durchlaufen sie dieselbe Folge von Zuständen. Der Zustand beider Medien ist der gleiche in je zwei Zeitpunkten t_1 und t_2, für welche η den gleichen Werth hat, d. h. wenn

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{T_2 \omega_2^2}{T_1 \omega_1^2} = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_2 \mu_2}.$$

Ein bestimmter Zustand tritt also um so später ein, je grösser das elektrische Leitungsvermögen (und die Permeabilität) ist.

Alles dies gilt für einen beliebigen Körper nur in dem Zeit- und Raumbereich, für welchen $\frac{t}{T}$ gross und $\frac{r}{\omega t}$ klein ist. — Man hat nun vielfach einen Körper in die Elektrodynamik eingeführt, von dem man voraussetzte, dass $T = \frac{\varepsilon}{\lambda} = 0$, aber $T\omega^2 = \frac{V^2}{\mu\lambda}$ endlich, also ω unendlich wäre. Derselbe würde das Gegenstück zum vollkommenen Isolator bilden; wir wollen ihn einen „vollkommenen Leiter“ nennen. Für einen solchen Körper erhielte man durch dieselben Umformungen, welche wir soeben ausgeführt haben, für jede Zeit und jeden Ort aus (9):

$$X_{p,t} = \frac{1}{(4\pi T\omega^2 t)^{3/2}} \int_\infty f_1(p')\, e^{-\frac{r^2}{4T\omega^2 t}}\, d\tau. \qquad (9'\text{b})$$

Zugleich ginge die Differentialgleichung (7) über in

$$\frac{\partial X}{\partial t} = T\omega^2 \cdot \Delta X. \qquad (7\text{b})$$

(9′b) ist die von Fourier gefundene Lösung von (7b).

Diese Gleichung gilt für die Ausbreitung der Temperatur in einem isotropen, athermanen, wärmeleitenden Körper. Hier ist

$$T\omega^2 = \frac{k}{\rho c},$$

wo k das Wärmeleitungsvermögen, ρ die Dichte, c die specifische Wärme bezeichnet.

Nun giebt es keinen Körper, für welchen nachweisbar die elektrische Relaxationszeit T Null wäre, — keinen „vollkommenen Leiter" schlechthin, — also auch keinen Körper, in welchem sich elektromagnetische Störungen allgemein in der gleichen Weise ausbreiteten, wie die Störungen des Temperaturgleichgewichts in einem athermanen Körper. Wohl aber verhält sich jeder Leiter wie ein „vollkommener" auf einem zeitlich und räumlich begrenzten Gebiet. Er verhält sich so, nachdem zunächst eine gegenüber der Relaxationszeit grosse Zeit verflossen ist, und dann in dem stetig sich vergrössernden Raum, für welchen $\frac{r}{\omega t}$ klein ist. In diesem Zeit- und Raumgebiet herrscht Uebereinstimmung zwischen der Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes und der Wärmeleitung. Die Uebereinstimmung ist eine numerische, sofern $T \cdot f_2(p')$ allgemein gegen $f_1(p')$ vernachlässigt werden darf, die Anfangswerthe f_1 durchweg die gleichen sind, und $\frac{V^2}{\lambda\mu} = \frac{k}{\rho c}$ ist. Dem grösseren elektrischen Leitungsvermögen entspricht also cet. par. ein kleineres Wärmeleitungsvermögen. — Wir fügen zwei Zahlenbeispiele an: Für das Meerwasser ist in runden Zahlen

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = 4.10^{-8}, \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 80, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = 1;$$

also, da [vgl. Kap. II, (26) und Kap. IV, (32)]

$$\frac{\varepsilon_0}{\lambda_1} = \text{ca.} \frac{1}{4\pi \cdot 10^{16}} \text{ sec} \quad \text{und} \quad \omega_0 = 3.10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}:$$

$$T = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \text{ca.}\, 2 \cdot 10^{-10} \text{ sec}, \quad \text{und} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}} = \text{ca.} \frac{10^{10}}{3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Die Bedingung, dass $\frac{t}{T}$ gross sei, ist also schon nach unmessbar kleinen Zeiten erfüllt, und nach einer Secunde erstreckt sich der Gültigkeitsbereich unserer Gleichung (9b) schon auf einige tausend Kilometer von dem ursprünglichen Störungscentrum.

Für vollkommen reines Wasser ist

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = 4.10^{-12}, \quad \varepsilon \text{ und } \mu \text{ wie oben;}$$

also $T =$ ca. $2 \cdot 10^{-4}$ sec, ω wie oben. Nach einem Bruchtheil einer Secunde ist also auch hier unsere Gleichung anwendbar, und dann gilt sie in dem gleichen Raum wie oben.

§ 2. Ebene Wellen. — Reflexion und Brechung.

Im vorigen § ist die allgemeinste Aufgabe gelöst, welche für einen unbegrenzten homogenen Körper gestellt werden kann. Für einen begrenzten Körper liegt eine bestimmte Aufgabe erst vor, sobald ausser den Anfangswerthen gewisse Grössen (E_S oder M_S) an der Grenze vorgeschrieben sind. Solcher Aufgaben sind nur wenige, sehr specielle gelöst. Wir gehen daher zu einer andern Art der Behandlung über. Wir suchen particuläre Integrale unserer Differentialgleichungen (J) (K), d. h. Functionen der Coordinaten und der Zeit, welche den Gleichungen in einem gewissen Gebiet genügen. Aus einer solchen Lösung folgen dann die Anfangs- und Grenzwerthe, und sie ist andrerseits das vollständige Integral für diese Anfangs- und Grenzwerthe (nach dem S. 406 bewiesenen Satz).

Diese Art der Behandlung bedeutet einen Verzicht: wir lassen die Herkunft der elektromagnetischen Energie im zeitlichen und örtlichen Sinn ausser Spiel. — In ersterer Hinsicht ist zu bemerken: Da stets Leiter im Felde vorhanden sind, so nimmt die ursprünglich gegebene Energie unbegrenzt ab, sofern sie nicht durch Zufuhr von aussen ersetzt wird. Der Anfangszustand muss daher nach ge-

nügend langer Zeit unwesentlich werden. Insbesondere: das Feld im Raume τ muss, unabhängig vom Anfangszustand, periodisch werden, wenn periodische Werthe der E_S, M_S an der Grenze hinlänglich lange bestanden haben. — In Rücksicht der örtlichen Begrenzung ist das folgende wichtig: bestimmte Functionen, welche im allgemeinen den Gleichungen (J) (K) genügen, dürfen doch als Lösungen nur betrachtet werden in denjenigen endlichen Gebieten, in welchen sie nicht unendlich sind, und in denjenigen unendlich fernen Gebieten, in welchen sie Null sind. Die Oberfläche S muss alle Gebiete ausschliessen, in denen diese Bedingungen verletzt sind. Andrerseits: Quellen elektromagnetischer Energie sind in den Räumen, auf welche sich unsere Gleichungen beziehen, nicht vorhanden (da wir ja allgemein $K = 0$ gesetzt, d. h. die chemisch-thermische Energie ausgeschlossen haben). Alle Energie kommt unserm System von aussen, in der Form der elektromagnetischen Strahlung; wie diese Strahlung entsteht, darüber sagen unsere Gleichungen nichts. Ein Vorgang, durch welchen solche Strahlung entsteht, ist z. B. die plötzliche Vernichtung elektrostatischer Energie durch den Entladungsfunken; aber sie geht auch aus, wie wir sehen werden, von jedem Körper, welcher nach üblichem Sprachgebrauch „Licht“ oder „Wärme“ ausstrahlt. Unsere Gleichungen geben Rechenschaft von den beobachteten Erscheinungen überall ausserhalb der strahlenden Körper; wir erhalten aber für die Feldgrössen immer mehr steigende Werthe, je mehr wir uns dem strahlenden Körper nähern; wir können also formal annehmen, dass sie in diesen Körpern unendliche Werthe haben, — womit freilich nur der Verzicht auf eine mathematische Analyse ausgesprochen ist. Zusammengefasst: in jedem einzelnen Fall sind die Quellen der Strahlung nur in dem Gebiet zu suchen, wo unsere Lösungen der (J), (K) nicht gelten, insbesondere, wo sie unendliche Werthe oder im unendlichen endliche Werthe ergeben würden.

Im folgenden sollen wesentlich periodische Erscheinungen, und zwar in der Hauptsache solche untersucht werden, welche sich durch einfach harmonische Functionen der Zeit darstellen lassen.

Wir werden also annehmen, dass alle Feldcomponenten die Form

$$c \sin(\nu t + \gamma)$$

haben, wo Amplitude c und Phase γ Functionen der Coordinaten bedeuten. Dafür setzen wir an:

$$a e^{\iota \nu t}$$

wo ν reell, a aber im allgemeinen eine complexe Grösse ist, und nehmen im Endresultat von allen Werthen der Feldcomponenten den reellen (oder von allen den imaginären) Theil.

Der Ansatz hat zur Folge, dass allgemein $\frac{\partial}{\partial t}$ durch $\iota\nu$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ durch $-\nu^2$ ersetzt werden kann. So folgt aus (7) für alle Feldcomponenten $E_x \ldots M_z$:

$$\left(-\nu^2 + \iota\frac{\nu}{T}\right) X = \omega^2 \Delta X. \qquad (22)$$

Für einen Isolator folgt:

$$-\nu^2 X = \omega^2 \Delta X,$$

und wie ein Isolator verhält sich gegenüber unseren periodischen Störungen von der Periode $\frac{2\pi}{\nu}$ jeder Körper, für den νT eine sehr grosse Zahl ist.

Andrerseits: wie ein „vollkommener Leiter", d. h. wie ein Körper, für welchen $T = 0$ wäre, verhält sich jeder Leiter, für welchen νT eine sehr kleine Zahl ist. Für einen solchen gilt:

$$\frac{\iota\nu}{T} X = \omega^2 \Delta X.$$

Wir specialisiren weiter: die Feldcomponenten sollen zunächst, ausser von der Zeit, nur von der einen Coordinate x abhängen. Dann muss jede der Gleichung genügen:

$$\left(-\nu^2 + \iota\frac{\nu}{T}\right) X = \omega^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \qquad (23)$$

Ein Integral dieser Gleichung von der Form $f(x) \cdot e^{\iota\nu t}$ ist:

$$\left.\begin{aligned} X &= \text{const.}\ e^{\iota(\nu t - m x)} \\ \text{wenn}\quad \omega^2 m^2 &= \nu^2 - \frac{\iota\nu}{T} \end{aligned}\right\} \quad . \tag{24}$$

Die Beziehungen zwischen den Constanten haben wir den Gleichungen (6), (J″), (K″) zu entnehmen. (6) ergiebt unter unseren Bedingungen:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0\,,$$

also nach (24):

$$E_x = 0\,, \quad M_x = 0\,. \tag{25}$$

Hierdurch sind die ersten der Gleichungen (J″), (K″) identisch erfüllt; die übrigen ergeben:

$$\begin{array}{ll|ll} \mu \dfrac{\partial M_y}{\partial t} = & V \dfrac{\partial E_z}{\partial x} & \left(\lambda + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\right) E_y = - & V \dfrac{\partial M_z}{\partial x} \\ \mu \dfrac{\partial M_z}{\partial t} = - & V \dfrac{\partial E_y}{\partial x} & \left(\lambda + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\right) E_z = & V \dfrac{\partial M_y}{\partial x} \end{array}$$

oder

$$\left.\begin{array}{ll|ll} \mu\iota\nu \cdot M_y = - & V\iota m \cdot E_z & (\lambda + \varepsilon\iota\nu)\, E_y = & V\iota m \cdot M_z \\ \mu\iota\nu \cdot M_z = & V\iota m \cdot E_y & (\lambda + \varepsilon\iota\nu)\, E_z = - & V\iota m \cdot M_y \end{array}\right\} \tag{26}$$

Je zwei diagonal geordnete dieser Gleichungen geben, da $\frac{V^2}{\varepsilon\mu} = \omega^2$ und $\frac{\varepsilon}{\lambda} = T$, als Eliminationsresultat die zweite der Gleichungen (24). Unter Berücksichtigung des Ansatzes (24) also enthält (26) nur zwei unabhängige Gleichungen, welche Beziehungen zwischen den constanten Factoren von E_y und M_z einerseits, von E_z und M_y andrerseits ausdrücken, die beiden Gruppen aber unabhängig von einander lassen. Lösungen sind:

$$\left.\begin{array}{l|l} E_y = \dfrac{A}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{\iota(\nu t - m x)} & E_z = \dfrac{B}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{\iota(\nu t - m x)} \\ M_z = \dfrac{A}{\sqrt{\mu}} \dfrac{\omega m}{\nu}\, e^{\iota(\nu t - m x)} & M_y = - \dfrac{B}{\sqrt{\mu}} \dfrac{\omega m}{\nu}\, e^{\iota(\nu t - m x)} \end{array}\right\} \tag{27}$$

wo A und B willkürliche Constanten.

a) Der Körper sei zunächst ein **Isolator**, also $T = \infty$: dann kommt:

$$\omega^2 m^2 = \nu^2, \tag{24a}$$

also m reell. Unter m soll die **positive** Wurzel verstanden werden; wenn dann $A = a e^{i\alpha}$, $B = b e^{i\beta}$ gesetzt wird, und überall die imaginären Antheile genommen werden, so ergiebt sich:

$$E_x = 0, \quad M_x = 0 \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} E_y = \dfrac{a}{\sqrt{\varepsilon}} \sin(\nu t - mx + \alpha) & E_z = \dfrac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \sin(\nu t - mx + \beta) \\ M_z = \dfrac{a}{\sqrt{\mu}} \sin(\nu t - mx + \alpha) & M_y = -\dfrac{b}{\sqrt{\mu}} \sin(\nu t - mx + \beta) \end{array}\right\} \tag{27a}$$

Alle Feldgrössen sind nur Functionen des Arguments $(\nu t - mx)$; ein zur Zeit t bestehendes Werthesystem findet sich zur Zeit $(t + 1)$ wieder vor, lediglich um die Strecke $\frac{\nu}{m} = \omega$ im Sinn der wachsenden x verschoben. Das heisst: (27a) stellt eine mit der Geschwindigkeit $\omega = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ nach wachsenden x fortschreitende „ebene elektromagnetische Welle" dar. Die Strecke, auf welcher zur gleichen Zeit sich sämmtliche Werthe vorfinden, die „Wellenlänge", ist $\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi\omega}{\nu}$.

Nach (25) sind die **in** der Fortpflanzungsrichtung liegenden Feldcomponenten Null; die Welle ist „transversal."

Es ist ferner

$$E_y M_y + E_z M_z = 0;$$

das heisst: elektrische und magnetische Feldintensität sind normal zu einander (und zur Fortpflanzungsrichtung der Welle).

Weiter ist

$$dW_e = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,(E_y^2 + E_z^2)\,d\tau = \tfrac{1}{2}\,\mu\,(M_y^2 + M_z^2)\,d\tau = dW_m;$$

d. h. die Energie zerfällt überall und stets in **gleiche** Antheile elektrischer und magnetischer Energie.

Die Strahlung Σ hat [s. Kap. VI, (67)] die Richtung der x-Axe und den Werth

$$\Sigma_x = V(E_y M_x - E_x M_y)$$
$$= \omega\,[a^2 \sin^2(\nu t - mx + \alpha) + b^2 \sin^2(\nu t - mx + \beta)]\,.$$

Diese Grösse ist stets positiv, und die Strahlung erfolgt daher zu jeder Zeit und überall in der Richtung der wachsenden x, nach welcher die Phasen fortschreiten. Der zeitliche Mittelwerth der Strahlung ist

$$[\Sigma] = \omega\,\frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ also unabhängig von } x.$$

Die Welle kann angesehen werden als zusammengesetzt aus zwei völlig von einander unabhängigen Wellen, welche einerseits durch E_y, M_x, andrerseits durch E_x, M_y gebildet werden. Auch Energie und Strahlung der Gesammtwelle setzen sich additiv aus den Beiträgen dieser beiden Theilwellen zusammen.

Ist $a = 0$, oder $b = 0$, oder $\alpha - \beta = k\pi$ (k eine ganze Zahl), so hat E eine feste Richtung und ebenso M. Die Welle heisst dann „geradlinig polarisirt“. — Andernfalls durchläuft E für jedes festgegebene x während einer Periode $\frac{2\pi}{\nu}$ einmal die Windrose, und der Endpunkt des Vectors E beschreibt dabei eine Ellipse, wie sich ergiebt, indem man t zwischen E_y und E_x eliminirt. Das gleiche gilt für M, welches dabei stets normal zu E bleibt. Die Welle heisst dann „elliptisch polarisirt“.

b) Der Körper sei ein Leiter, also T endlich. Dann ergiebt sich ω aus (24) als complexe Grösse. Wir setzen

$$m = q - \iota p$$

und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 (q^2 - p^2) &= \nu^2 \\ \omega^2 \cdot 2pq &= \frac{\nu}{T} \end{aligned}\right\} \quad (24\text{b})$$

und daraus:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 p^2 &= \frac{\nu^2}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{\nu T}\right)^2}\right] = \frac{\nu}{2T}\left[-\nu T+\sqrt{(\nu T)^2+1}\right] \\ \omega^2 q^2 &= \frac{\nu^2}{2}\left[+1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{\nu T}\right)^2}\right] = \frac{\nu}{2T}\left[+\nu T+\sqrt{(\nu T)^2+1}\right] \end{aligned}\right\} \quad (24b)$$

Die Wurzeln müssen positiv genommen werden, damit p und q reell seien. Wir wollen ferner q positiv wählen; dann muss auch p positiv genommen werden.

Es folgt

$$\text{Mod}\left(\frac{\omega m}{\nu}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\nu^2}(p^2+q^2) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{\nu T}\right)^2}$$

und

$$\frac{\omega m}{\nu} = \sqrt[4]{1+\left(\frac{1}{\nu T}\right)^2} \cdot e^{-\iota\delta}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{p}{q};$$

ferner:

$$e^{\iota(\nu t - m x)} = e^{-px} e^{\iota(\nu t - q x)}.$$

Also aus (25), (27), wenn wieder $A = a e^{\iota\alpha}$, $B = b e^{\iota\beta}$ gesetzt und überall der imaginäre Antheil genommen wird:

$$E_x = 0, \quad M_x = 0, \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{-px} \sin(\nu t - qx + \alpha) \\ M_z &= \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sqrt[4]{1+\left(\frac{1}{\nu T}\right)^2} \cdot e^{-px} \sin(\nu t - qx + \alpha - \delta) \\ E_z &= \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{-px} \sin(\nu t - qx + \beta) \\ M_y &= -\frac{b}{\sqrt{\mu}} \sqrt[4]{1+\left(\frac{1}{\nu T}\right)^2} \cdot e^{-px} \sin(\nu t - qx + \beta - \delta) \end{aligned}\right\} \quad (27b)$$

wo p und q aus (24b) zu entnehmen sind und $\operatorname{tg}\delta = \frac{p}{q}$ ist, a, α, b, β aber willkürliche Constanten bezeichnen.

In diesen Gleichungen ist ausgesprochen: Die Feldgrössen schreiten wellenförmig nach $+x$ vor, aber mit abnehmender

Amplitude. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Phasen sich ausbreiten, ist $\frac{\nu}{q}$ (oder die „Wellenlänge" $\frac{2\pi}{q}$); der „Absorptionscoefficient" für die Feldvectoren ist p. Beide Grössen hängen nicht nur von den Constanten des Mediums, sondern auch von der Schwingungsdauer ab. Stets ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner, als ω. — Ist νT eine sehr grosse Zahl, so verhält sich der Körper nahezu wie ein Isolator: es wird in erster Näherung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{\nu}{q} = \omega$, und der Absorptionscoefficient $p = \frac{q}{2\nu T}$, d. h. merkliche Absorption findet erst statt auf einer mit νT vergleichbaren Zahl von Wellenlängen. — Ist νT eine sehr kleine Zahl, so wird genähert

$$p = q = \sqrt{\frac{\nu}{2T\omega^2}} = \sqrt{\frac{\nu\lambda\mu}{2V^2}},$$

d. h. die Amplitude der Schwingung sinkt auf einer Wellenlänge auf $\frac{1}{e^{2\pi}}$ ihres Betrages. Dies ist nach unserer Theorie die stärkste mögliche Absorption. Nach demselben Gesetz schreiten die Temperaturen fort in einer durch Wärmeleitung sich ausbreitenden Temperaturwelle. Zugleich ist aus den Werthen p und q die Dielektricitätsconstante verschwunden; der Körper verhält sich gegenüber dieser Schwingungszahl als „vollkommener Leiter".

Weiter ist auch hier die Welle „transversal", d. h. E und M liegen in der Wellenebene. Die Welle ist im allgemeinsten Fall wiederum „elliptisch", im besonderen Falle „geradlinig polarisirt". Der elektrische und der magnetische Vector sind aber in der Phase gegen einander verschoben; sie haben folglich kein constantes Grössenverhältniss und im allgemeinen auch keine constante Neigung gegen einander. Für die zeitlichen Mittelwerthe der Energie in einem beliebigen Punkte gilt:

$$[dW_m] = [dW_e] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\nu T}\right)^2};$$

die elektrische Energie ist stets kleiner als die magnetische und kann gegen diese verschwindend klein werden.

Die Strahlung findet normal zur Wellenebene statt, hat aber wechselnde Richtung wegen der Phasendifferenz zwischen E und M. Da jedoch das Product $\sin(\nu t + c)\sin(\nu t + c - \delta)$ den zeitlichen Mittelwerth $\frac{1}{2}\cos\delta$ besitzt, und $\cos\delta$ positiv ist, wie q, so folgt: die Gesammtstrahlung während einer vollen Periode hat stets die Richtung $(+x)$, in welcher die Phasen fortschreiten. Sie ist proportional mit e^{-2px}; für die Strahlung also ist $2p$ der „Absorptionscoefficient". —

Wir wollen jetzt untersuchen, ob bezw. in welcher Art sich ebene Wellen in einem Raum ausbreiten können, welcher von zwei verschiedenen, durch eine ebene Grenzfläche getrennten Medien erfüllt ist.

Zu diesem Zwecke gehen wir aus von einer Lösung der Gleichungen (6) (J″) (K″), welche etwas allgemeiner ist, als die bisher benutzte. Wir setzen an:

$$\omega^2 (r^2 + s^2) = \nu^2 - \frac{\iota\nu}{T} \tag{28}$$

$$(29p)\left\{\begin{aligned} E_y &= \frac{A}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\iota\vartheta} \\ M_x &= -\frac{A}{\sqrt{\mu}} \frac{\omega s}{\nu} e^{\iota\vartheta} \\ M_z &= \frac{A}{\sqrt{\mu}} \frac{\omega r}{\nu} e^{\iota\vartheta} \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} M_y &= \frac{C}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \frac{\iota}{\nu T}\right) e^{\iota\vartheta} \\ E_x &= \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\omega s}{\nu} e^{\iota\vartheta} \\ E_z &= -\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\omega r}{\nu} e^{\iota\vartheta} \end{aligned}\right\} (29s)$$

$$\vartheta = \nu t - (rx + sz).$$

Dass diese Ausdrücke thatsächlich eine Lösung bilden, ist leicht zu verificiren. Ist der Quotient $\frac{r}{s}$ reell, so entstehen sie aus (24) (25) (27) durch einfache Coordinatentransformation; sie stellen dann ebene Wellen dar, deren Normale in der xz-Ebene liegt. Ist hingegen $\frac{r}{s}$ nicht reell, so stellen

die Ausdrücke eine Ausbreitungsform dar, welche bisher nicht behandelt ist.

Die Ebene $x = 0$ trenne die beiden Medien. Die Gleichungen (28) und (29) gelten dann mit gewissen Werthen der Constanten für negative x, mit anderen Werthen für positive x. Alle Grössen, welche sich auf das Medium auf der Seite der negativen (positiven) x beziehen, sollen den Index 1 (2) erhalten. Für $x = 0$ müssen die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein [s. Kapitel VI, (30)]:

$$(30p) \qquad \left\{ \begin{array}{c|c} E_{y1} = E_{y2} & M_{y1} = M_{y2} \\ M_{z1} = M_{z2} & E_{z1} = E_{z2} \end{array} \right\} \qquad (30s)$$

Die Normale x der Grenzebene heisst „Einfallsloth"; die xz-Ebene, welche dieses und zugleich die Wellennormale enthält, heisst „Einfallsebene" einer jeden ebenen Welle, welche durch unsere Gleichungen dargestellt wird. Die Gleichungen (p) beziehen sich auf Wellen, in welchen die magnetische Feldintensität parallel zur Einfallsebene, die Gleichungen (s) auf Wellen, in welchen sie senkrecht zur Einfallsebene gerichtet ist. Zwischen den Wellen der einen und der anderen Art bestehen keine Beziehungen; mögliche Wellen beider Arten sind beliebig superponirbar, und ergeben den unter den gegebenen geometrischen Verhältnissen allgemeinsten Typus ebener Wellen.

Da die Gleichungen (30) für $x = 0$ und beliebige Werthe von t und z bestehen sollen, so folgt zunächst, dass ν und s für alle Wellen desselben Systems gleiche Werthe haben müssen. ν und s sollen gegebene positive reelle Grössen sein; dann folgen aus (28) je zwei zulässige Werthe für r_1 und r_2 gemäss den Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1^2\,(r_1^2 + s^2) = \nu^2 - \dfrac{\iota\nu}{T_1} \\[2ex] \omega_2^2\,(r_2^2 + s^2) = \nu^2 - \dfrac{\iota\nu}{T_2} \end{array} \right\} \qquad (31)$$

Wir bezeichnen mit $+ r_1$, $+ r_2$ die Werthe mit positivem reellem Antheil. Dann ergeben $+ r_1$ und $- r_2$ Wellen, in

welchen die Phase, und ebenso auch die Strahlung aus unendlicher Entfernung im ersten, bezw. zweiten Medium gegen die Grenze vorschreitet, $-r_1$ und $+r_2$ hingegen eine Strahlung von der Grenze aus in das erste, bezw. zweite Medium hinein. Würden wir in jedem Medium eine Welle, etwa vom Typus (p), annehmen, so erhielten wir zwei willkürliche Constanten A_1 und A_2 in den Ausdrücken (29p), und hätten mit diesen die zwei in A_1 und A_2 homogenen Gleichungen (30p) zu befriedigen. Das ist im allgemeinen nicht möglich. Wenn wir hingegen lediglich vorschreiben, dass sich keine Strahlungsquelle im zweiten Medium befinden soll, so scheidet nur die zu $-r_2$ gehörende Welle aus, und wir behalten drei Wellen: die „einfallende" $(+r_1)$, die „reflectirte" $(-r_1)$, und die „gebrochene" $(+r_2)$. Durch die Constanten A, C dieser drei Wellen können wir den Grenzbedingungen genügen.

Wir bezeichnen die Constanten

	A	C	ϑ
für die einfallende Welle durch:	1	1	ϑ
„ „ reflectirte „ „	R_p	R_s	ϑ_r
„ „ gebrochene „ „	D_p	D_s	ϑ_d

Im ersten Medium superponiren sich einfallende und reflectirte Welle, so dass z. B. wird

$$E_{y1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} e^{\iota\vartheta} + \frac{R_p}{\sqrt{\varepsilon_1}} e^{\iota\vartheta_r}; \qquad E_{y2} = \frac{D_p}{\sqrt{\varepsilon_2}} e^{\iota\vartheta_d} \text{ u. s. w.}$$

Für $x = 0$ wird $\vartheta = \vartheta_r = \vartheta_d$, und die Gleichungen (30) ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}(1 + R_p) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} D_p \\ \frac{\omega_1 r_1}{\sqrt{\mu_1}}(1 - R_p) &= \frac{\omega_2 r_2}{\sqrt{\mu_2}} D_p \end{aligned}\right\} \qquad (32\text{p})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-\frac{\iota}{\nu T_1}}{\sqrt{\mu_1}}(1+R_s) &= \frac{1-\frac{\iota}{\nu T_2}}{\sqrt{\mu_2}} D_s \\ \frac{\omega_1 r_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}(1-R_s) &= \frac{\omega_2 r_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} D_s \end{aligned}\right\} \quad (32s)$$

Die Gleichungen (31) enthalten das Gesetz für den Verlauf der Strahlung in den beiden Medien: das geometrische Reflexions- und Brechungsgesetz. Aus (32) folgen die Amplitudenverhältnisse der drei Wellen; d. h. die Intensitätsverhältnisse der Strahlung.

Im allgemeinen ergeben sich aus (31) für reelle ν und s complexe r_1 und r_2; d. h. in beiden Medien ist nicht nur die Phase, sondern auch die Amplitude der Feldcomponenten eine Function von x, dem Abstand von der Grenzebene. Ferner folgen aus (32) complexe R und D; d. h. für den gleichen Werth $x = 0$, — in der Grenzebene, — haben einfallende, reflectirte und gebrochene Welle verschiedene Phase. Wir wollen nur drei specielle Fälle vollständig durchführen:

a) Beide Medien seien Isolatoren, also T_1 und T_2 unendlich, und es sei ferner

$$s^2 < \frac{\nu^2}{\omega_1^2}$$

gewählt. Dann ist nach (31)

$$r_1 = +\sqrt{\frac{\nu^2}{\omega_1^2} - s^2} \qquad \text{reell.}$$

a$_1$) Es sei zugleich

$$s^2 < \frac{\nu^2}{\omega_2^2}.$$

(Das ist ohne weiteres der Fall, wenn $\omega_2 < \omega_1$; es enthält aber eine neue Bedingung, wenn $\omega_2 > \omega_1$.) Dann ist auch

$$r_2 = +\sqrt{\frac{\nu^2}{\omega_2^2} - s^2} \qquad \text{reell;}$$

und weiter folgen aus (32) die R und D als reelle Grössen. Nehmen wir also wiederum von allen Feldcomponenten die imaginären Antheile, so enthalten diejenigen

der einfallenden Welle den Factor: $\sin\vartheta\ = \sin[\nu t - (\ \ r_1 x + s z)]$

„ reflectirten „ „ „ $\sin\vartheta_r = \sin[\nu t - (-r_1 x + s z)]$

„ gebrochenen „ „ „ $\sin\vartheta_d = \sin[\nu t - (\ \ r_2 x + s z)]$

multiplicirt jedesmal mit einem Amplitudenfactor. Es lassen sich aber gemäss (31) und unseren speciellen Annahmen reelle Winkel φ, φ_r, φ_d definiren durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\varphi = \dfrac{\omega_1 r_1}{\nu} & \sin\varphi = \dfrac{\omega_1 s}{\nu} \\ \cos\varphi_r = -\dfrac{\omega_1 r_1}{\nu} & \sin\varphi_r = \dfrac{\omega_1 s}{\nu} \\ \cos\varphi_d = \dfrac{\omega_2 r_2}{\nu} & \sin\varphi_d = \dfrac{\omega_2 s}{\nu} \end{array}\right\} \qquad (31a)$$

und mit Benutzung dieser Zeichen wird:

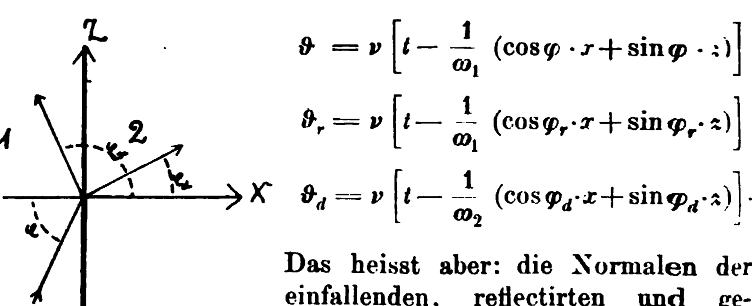


Fig. 48.

$$\vartheta = \nu\left[t - \frac{1}{\omega_1}(\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot z)\right]$$

$$\vartheta_r = \nu\left[t - \frac{1}{\omega_1}(\cos\varphi_r \cdot x + \sin\varphi_r \cdot z)\right]$$

$$\vartheta_d = \nu\left[t - \frac{1}{\omega_2}(\cos\varphi_d \cdot x + \sin\varphi_d \cdot z)\right].$$

Das heisst aber: die Normalen der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Welle liegen alle in der gleichen durch das Einfallsloth (x) gelegten Ebene (xz), und bilden mit demselben die durch (31 a) definirten Winkel φ, φ_r, φ_d (Fig. 48). Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \pi - \varphi_r = \varphi \\ \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_d} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \end{array}\right\} \qquad (31'a)$$

d. h. der „Reflexionswinkel" ist gleich dem Einfallswinkel; die Sinus von „Brechungs-" und „Einfallswinkel" stehen im Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω beider Medien. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ heisst „relativer Brechungsexponent" des zweiten gegen das erste Medium; „Brechungsexponent" schlechthin, wenn 1 das Vacuum ist. Schreiben wir nunmehr φ_1 für φ und $(\pi - \varphi_r)$, und φ_2 für φ_d, so lautet (32):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}(1 + R_p) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} D_p \\ \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\mu_1}}(1 - R_p) &= \frac{\cos\varphi_2}{\sqrt{\mu_2}} D_p \end{aligned}\right\} \qquad (32\,\text{p, a})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}(1 + R_s) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} D_s \\ \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}(1 - R_s) &= \frac{\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} D_s \end{aligned}\right\} \qquad (32\,\text{s, a})$$

Die beiden Gleichungsgruppen sind vollkommen symmetrisch gebildet; es sind lediglich ε und μ vertauscht. Trotzdem besitzen die Lösungen R_p, D_p und R_s, D_s wesentlich verschiedene Eigenschaften in Folge des Umstandes, dass für alle Isolatoren sich die μ-Werthe nur um kaum messbare Grössen unterscheiden. Setzen wir

$$\mu_1 = \mu_2,$$

so wird

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi_1\,(1 + R_p) &= \sin\varphi_2 \cdot D_p \\ \cos\varphi_1\,(1 - R_p) &= \cos\varphi_2 \cdot D_p \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 + R_s &= D_s \\ \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_1\,(1 - R_s) &= \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_2 \cdot D_s \end{aligned}\right\}.$$

Daraus:

$$\left.\begin{aligned} R_p &= -\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} & R_s &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)} \\ D_p &= \frac{2\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} & D_s &= \frac{2\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)\cdot\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

R_p kann niemals Null werden; R_s aber wird gleich Null, wenn

$$\varphi_1+\varphi_2=\frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \cos\varphi_1=\sin\varphi_2=\frac{\omega_2}{\omega_1}\sin\varphi_1,$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad (34)$$

ist. Wenn also eine Welle, in welcher die magnetische Intensität senkrecht zur Einfallsebene (und die elektrische Intensität folglich in der Einfallsebene) polarisirt ist, unter diesem Winkel φ_1 einfällt, so entsteht keine reflectirte Welle. — Eine beliebige Welle kann stets in eine p-Welle und eine s-Welle zerlegt werden; ist der Einfallswinkel arctg $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, so ist in der reflectirten Welle kein s-Antheil mehr enthalten; sie ist, bezüglich der magnetischen Intensität, vollkommen in der Einfallsebene polarisirt. Der Winkel arctg $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ heisst deshalb „Polarisationswinkel".

Die auf die Grenzfläche auffallende, bezw. von ihr ausgehende Strahlung ist in jeder der drei Wellen:

$$\pm\Sigma_x=\pm V(E_y M_x - M_y E_x).$$

Also verhält sich

$$\Sigma:\Sigma_r:\Sigma_d=\frac{\omega_1 r_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}:\frac{\omega_1 r_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}R^2:\frac{\omega_2 r_2}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}D^2;$$

oder, da

$$\frac{\omega_2 r_2}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\omega_1 r_1}=\frac{\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1},$$

im Fall (p):

$$\Sigma : \Sigma_r : \Sigma_d = 1 : \frac{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)} : \frac{\sin 2\varphi_1 \cdot \sin 2\varphi_2}{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{35p}$$

im Fall (s):

$$\Sigma : \Sigma_r : \Sigma_d = 1 : \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 + \varphi_2)} : \frac{\sin 2\varphi_1 \cdot \sin 2\varphi_2}{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{35s}$$

Es seien jetzt, wie bisher, beide Medien Isolatoren und $s^2 < \frac{\nu^2}{\omega_1^2}$; es sei aber $\omega_2 > \omega_1$ und

a₂) $$s^2 > \frac{\nu^2}{\omega_2^2}.$$

Dann ist r_1 reell wie zuvor, r_2 hingegen rein imaginär.

Daraus ergiebt sich bezüglich des ersten Mediums: Es lassen sich Winkel φ und φ_r wieder bestimmen durch die Gleichungen (31a), und es existiren folglich eine einfallende und eine reflectirte ebene Welle, deren Normalen gleiche Winkel mit dem Einfallsloth einschliessen. Aus den Gleichungen (32) aber folgt jetzt, wenn wir wieder $\mu_1 = \mu_2$ setzen:

$$\frac{1 - R_p}{1 + R_p} = \frac{r_2}{r_1} = \iota Q_p, \qquad \frac{1 - R_s}{1 + R_s} = \frac{\omega_2^2 \cdot r_2}{\omega_1^2 \cdot r_1} = \iota Q_s,$$

wo Q_p und Q_s reelle Zahlen sind. Daraus:

$$R_p = e^{-\iota\delta_p}, \qquad R_s = e^{-\iota\delta_s},$$

wo

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_p}{2} = Q_p, \qquad \operatorname{tg}\frac{\delta_s}{2} = Q_s. \tag{36}$$

Das bedeutet

für die einfallende Welle: $E_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \sin[\nu t - (r_1 x + s z)]$

„ „ reflectirte „ $E_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \sin[\nu t - (-r_1 x + s z + \delta_p)]$

u. s. w. Also die Amplitude der reflectirten Welle ist gleich derjenigen der einfallenden Welle; aber sie hat in der Grenz-

ebene eine um δ_p, bezw. δ_s verzögerte Phase. Die Phasenverzögerungen sind verschieden für die p-Welle und die s-Welle: die Phasendifferenz zwischen beiden wird also $\neq 0$ in der reflectirten Welle, wenn sie $= 0$ in der einfallenden war. D. h. aus einer einfallenden geradlinig polarisirten Strahlung geht im allgemeinen eine elliptisch polarisirte reflectirte hervor.

Bezüglich des zweiten Mediums folgt: Wir können schreiben

$$r_2 = -\iota\varrho, \quad \text{wo } \varrho = \sqrt{s^2 - \frac{\nu^2}{\omega_2{}^2}} \text{ reell ist.}$$

Daher haben alle Feldgrössen im zweiten Medium die Form:

$$\text{const.} \cdot \sin(\nu t - s z + \gamma)\, e^{-\varrho x}.$$

Die Phasen also breiten sich im zweiten Medium in der Richtung $+z$, d. h. parallel der Grenzebene, mit der Geschwindigkeit $\frac{\nu}{s}$ aus; die Amplituden dagegen nehmen normal zur Grenzebene ab. Von einer „ebenen Welle“ kann daher im zweiten Medium nicht gesprochen werden. Wohl aber breitet sich das Feld in das zweite Medium hinein aus, und dies kann bis zu grossen Tiefen stattfinden; denn ϱ kann beliebig klein sein. — Dem scheint zu widersprechen, dass sich die gesammte Strahlung der einfallenden Welle in der reflectirten Welle wiederfindet. Wir wollen deshalb die in das zweite Medium eindringende Strahlung bestimmen; es ist für $x = 0$ nach (29):

$$\frac{M_z}{E_y} = \frac{\omega_2}{\nu}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cdot r_2 = \iota P = e^{\iota\frac{\pi}{2}} \cdot P,$$

und ebenso

$$\frac{E_z}{M_y} = e^{\iota\frac{\pi}{2}} \cdot S,$$

wo P und S reelle Grössen sind. Wenn also E_y den Factor $\sin(\nu t + \alpha)$ enthält, so enthält M_z den Factor $\sin\left(\nu t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$,

und es ist daher der für eine Schwingungsdauer genommene Mittelwerth des Products $E_y M_x$ gleich Null. Das gleiche gilt für $E_x M_y$, und folglich auch für die eindringende Strahlung

$$\Sigma_x = V(E_y M_x - E_x M_y).$$

Die Energie pendelt lediglich durch die Grenzfläche hin und her; es bleibt nichts von ihr im zweiten Medium.

Der soeben unter a$_2$) analysirte Vorgang heisst „Totalreflexion“. Im Gegensatz hierzu wird die unter a$_1$) behandelte Erscheinung als „partielle Reflexion“ bezeichnet. —

b) Es möge, wie bisher, das erste Medium ein Isolator sein, und $s^2 < \frac{\nu^2}{\omega_1^2}$. Das zweite Medium aber sei jetzt ein Leiter. — Wir erhalten dann wieder aus (31):

$$r_1 = \frac{\nu}{\omega_1} \cos \varphi_1 ; \qquad s = \frac{\nu}{\omega_1} \sin \varphi_1 ,$$

wo $\varphi_1 = \varphi = \pi - \varphi_r$. D. h. im ersten Medium besteht wiederum eine einfallende und eine reflectirte ebene Welle, deren Normalen gleiche Winkel mit dem Einfallsloth bilden.

r_2 aber ergiebt sich aus (31) als complexe Grösse. Schreiben wir $r_2 = q - \iota p$, so sind q und p positiv, und die Feldgrössen werden im zweiten Medium proportional mit $\sin [\nu t - (qx + sz) + \gamma]\, e^{-px}$. Dieser Ausdruck zeigt eine Absorption der Strahlung im zweiten Medium an. Im einzelnen: Es existirt keine ebene Welle, vielmehr nehmen die Amplituden in der Richtung des Einfallsloths ab, während die Phasen sich in einer dazu geneigten Richtung ausbreiten. Da ferner $q^2 + s^2$ nicht constant ist, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Phasen abhängig von der Fortpflanzungsrichtung, und diese Richtung ist nicht durch einen constanten „Brechungsexponenten“ gegeben.

Es folgen weiter aus (32) complexe Werthe der Constanten R (und D), d. h. in der Grenzebene findet beim Uebergang von der einfallenden zur reflectirten (und gebrochenen) Welle

eine plötzliche Aenderung der Phase statt. Da R_p und R_s verschiedene Phasen besitzen, so entsteht aus einfallender geradlinig polarisirter Strahlung bei der Reflexion elliptisch polarisirte.

b_1) Ein specieller Fall soll weiter ausgeführt werden. Es seien $\nu T_2 = \frac{\nu \varepsilon_2}{\lambda_2}$ und ebenso $\frac{\nu \varepsilon_1}{\lambda_2}$ sehr kleine Grössen. Die letztere Grösse ist stets angebbar, und sie ist thatsächlich verschwindend klein für alle erreichbaren Schwingungszahlen, wenn das zweite Medium ein Metall ist. Das gleiche haben wir dann anzunehmen bezüglich der ersteren Grösse (vgl. Kap. VI, S. 380). Für die Reflexion an Metallen also erhalten wir aus (31):

$$r_2^2 + s^2 = -\frac{\iota \nu}{T_2 \omega_2^2}; \quad r_1^2 = \frac{\nu^2}{\omega_1^2} \cos^2 \varphi_1; \quad s^2 = \frac{\nu^2}{\omega_1^2} \sin^2 \varphi_1 .$$

Daraus

$$\frac{s^2}{r_2^2 + s^2} = \iota \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\nu \varepsilon_1}{\lambda_2} \sin^2 \varphi_1 ,$$

also, da $\mu_1 \lesseqgtr \mu_2$, eine verschwindend kleine Grösse. Wir dürfen daher setzen:

$$r_2^2 = -\frac{\iota \nu}{T_2 \omega_2^2}$$

und somit

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \iota \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\nu \varepsilon_1}{\lambda_2} \cos^2 \varphi_1 .$$

Mit diesem Werth aber folgt aus (32):

$$\frac{1 + R_p}{1 - R_p} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\iota} \cdot \cos \varphi_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\nu \varepsilon_1}{\lambda_2}} \equiv (1 + \iota) \eta_p .$$

Da $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ im ungünstigsten Fall einige tausende betragen kann, so ist η_p eine kleine Zahl. Ferner:

$$\frac{1 - R_s}{1 + R_s} = \iota \frac{r_2}{r_1} \frac{\nu \varepsilon_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{\iota}}{\cos \varphi_1} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\nu \varepsilon_1}{\lambda_2}} \equiv (1 + \iota) \eta_s ,$$

wo η_s ebenfalls eine sehr kleine Zahl bedeutet, solange nicht $\varphi_1 = 90^0$ wird. Aus

$$\frac{1+x}{1-x} = (1 + \iota)\,\eta\,, \qquad \eta \text{ klein}$$

folgt aber:

$$x = -(1 - 2\eta) + \iota 2\eta\,;$$

also ist sehr nahe:

$$\left.\begin{aligned} R_p &= -1 \\ R_s &= +1\,, \text{ ausser im Fall streifender Incidenz.} \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Durch diese Gleichungen ist ausgesprochen: die reflectirte Welle hat stets die gleiche Amplitude wie die auffallende, und ist stets geradlinig polarisirt, wenn die auffallende es war. Beides trifft also sehr nahe zu.

Schreiben wir ferner $r_2 = (1 - \iota)p\,,\; p = \sqrt{\frac{\nu}{2T_2\omega_2{}^2}}$, so werden die Feldgrössen im Metall proportional mit $\sin[\nu t - (sz + px)]\,e^{-px}$, und hier ist s sehr klein gegen p. Die Phasen also breiten sich sehr nahe senkrecht zur Grenzebene aus, welches auch der Einfallswinkel sein mag. Auch die Energie, welche sich allgemein normal zu E und zu M bewegt, strömt in dieser Richtung. Es ist nämlich im Fall (s): $\frac{E_x}{E_z} = -\frac{s}{r_2}$, also verschwindend klein; d. h. E ist sehr nahe parallel zur Grenzebene; von M aber gilt dies strenge. Im Fall (p) gilt das gleiche unter Vertauschung von E und M.

Bisher haben wir die einfallende und die reflectirte Welle gesondert betrachtet; wir wollen jetzt das Gesammtfeld ins Auge fassen, welches durch die Superposition dieser beiden Wellen im ersten Medium entsteht.

Es seien zunächst wieder die Voraussetzungen von b_1) erfüllt: das Medium 1 sei ein Isolator, das Medium 2 ein Metall. Dann wird im ersten Medium (den Index 1 lassen wir jetzt fort)

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{\iota\vartheta} - e^{\iota\vartheta_r}\right) \\ M_x &= -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\sin\varphi\left(e^{\iota\vartheta} - e^{\iota\vartheta_r}\right) \\ M_z &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos\varphi\left(e^{\iota\vartheta} + e^{\iota\vartheta_r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (p)$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(e^{\iota\vartheta} + e^{\iota\vartheta_r}\right) \\ E_x &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\varphi\left(e^{\iota\vartheta} + e^{\iota\vartheta_r}\right) \\ E_z &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\varphi\left(e^{\iota\vartheta} - e^{\iota\vartheta_r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (s)$$

wo

$$\begin{aligned} \vartheta &= \nu t - sz - rx \\ \vartheta_r &= \nu t - sz + rx. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt für beide Specialfälle, also auch für einen beliebigen Polarisationszustand: in der Grenzebene ($x = 0$) ist die tangentiale Componente von E stets Null.

Indem wir ferner, etwa für den Fall (p), die imaginären Antheile nehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\sin rx \cdot \cos(\nu t - sz) \\ M_x &= \frac{2}{\sqrt{\mu}}\sin\varphi \cdot \sin rx \cdot \cos(\nu t - sz) \\ M_z &= \frac{2}{\sqrt{\mu}}\cos\varphi \cdot \cos rx \cdot \sin(\nu t - sz). \end{aligned}$$

Falle zunächst die Strahlung normal auf die Grenzfläche: dann ist $\varphi = 0$, und folglich $M_x = 0$ überall. Es wird ferner

$E = 0$ in allen Ebenen, für welche $rx = 2k\frac{\pi}{2}$

$M = 0$ " " " " " $rx = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$,

wo k eine ganze Zahl. D. h. sowohl für die elektrische wie für die magnetische Feldintensität besteht eine „stehende Welle“. Die Knoten der einen fallen mit den Bäuchen der andern zusammen. Der Knotenabstand ist $\frac{\pi}{r} = \frac{\pi\omega}{\nu}$. In der Grenzebene selbst liegt ein Knoten der elektrischen Intensität.

Ist hingegen $\varphi \neq 0$, so gilt das gesagte zwar noch für E; M aber ist nirgends Null. Fällt insbesondere die Welle unter 45^0 auf die Grenzebene, so wird

$$M_x = c \cdot \sin rx \cdot \cos(\nu t - sx)$$

$$M_z = c \cdot \cos rx \cdot \sin(\nu t - sx)$$

und daher der zeitliche Mittelwerth von M^2

$$[M^2] = [M_x^2] + [M_z^2] = \frac{c^2}{2} \text{ unabhängig von } x.$$

Es existirt eine stehende Welle nur für die elektrische Energie; die magnetische Energie ist, im zeitlichen Mittel, gleichförmig durch den Raum verbreitet. — Dies gilt im Falle (p), d. h. wenn die magnetische Feldintensität in der Einfallsebene polarisirt ist. Für den Fall (s), wo die elektrische Feldintensität in der Einfallsebene liegt, erhalten wir umgekehrt eine stehende Welle bezüglich der magnetischen Energie, aber gleichförmige Vertheilung der elektrischen Energie. —

Es sei jetzt das zweite Medium ein beliebiger Körper, während das erste wieder ein Isolator sein soll. Wir betrachten den Fall der normalen Incidenz und wollen die Energie des thatsächlichen, durch einfallende und reflectirte Welle gebildeten Feldes an der Grenzfläche vergleichen mit der Energie, welche der einfallenden Welle für sich entspricht. Für $s = 0$ und $x = 0$ wird, wenn etwa $y \parallel E$, $z \parallel M$ angenommen wird, das Gesammtfeld:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(1 + R)\, e^{i\nu t}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(1 - R)\, e^{i\nu t},$$

während die einfallende Welle dargestellt ist durch:

$$E_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\iota \nu t}$$

$$M_e = \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{\iota \nu t}.$$

Daher wird im zeitlichen Mittelwerth für das Gesammtfeld:

$$[\varepsilon E^2 + \mu M^2] = \tfrac{1}{2} \operatorname{Mod} (1 + R)^2 + \tfrac{1}{2} \operatorname{Mod} (1 - R)^2$$
$$= 1 + \operatorname{Mod} R^2,$$

während für das Feld der einfallenden Welle

$$[\varepsilon E_e{}^2 + \mu M_e{}^2] = 1$$

ist. Die Gleichungen (31), (32) aber ergeben für $s = 0$:

$$\left(\frac{1 + R}{1 - R}\right)^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\iota}{\nu T_2}}.$$

Sei nun a) das zweite Medium entweder ein Metall, sodass νT_2 sehr klein wird, oder ein Isolator, für welchen $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ sehr gross ist; dann wird jedesmal der Modul der rechten Seite sehr klein und folglich sehr nahe: Mod $R = 1$. In diesem Fall ist die thatsächliche Energie an der Grenzfläche im ersten Medium nahe doppelt so gross, als es der einfallenden Welle allein entsprechen würde.

Sei b) das zweite Medium entweder ein Isolator oder doch νT_2 gross, und sei ferner $\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1}$ wenig von 1 verschieden: dann wird die rechte Seite nahezu 1, und folglich Mod R sehr klein. In diesem Fall ist die Gesammtenergie im ersten Medium nicht wesentlich grösser, als die der einfallenden Welle.

Es mag noch bemerkt werden, dass an der Grenzfläche $[\Sigma_e] = \omega \cdot \frac{1}{2}$ die mittlere Strahlung in der einfallenden,

$[\Sigma_r] = \omega \frac{\text{Mod}\, R^2}{2}$ die mittlere Strahlung in der reflectirten Welle ist. Die mittlere Energie der Volumeinheit ist also

$$\tfrac{1}{2}\,[\varepsilon E^2 + \mu M^2] = \frac{[\Sigma] + [\Sigma_r]}{\omega}.$$

§ 3. Ausbreitung an cylindrischen Leitern.

Wir wollen jetzt die elektromagnetische Strahlung untersuchen, welche entlang geradlinig gestreckten Leitern von constantem Querschnitt — Cylindern im weiteren Sinn des Wortes — stattfindet. Diese Untersuchung besitzt grosse praktische Bedeutung, insofern sie den Fall der Telegraphendrähte und Kabel umfasst; sie ist aber für uns vor allem deshalb wichtig, weil zur quantitativen Prüfung der Maxwell'schen Theorie fast ausschliesslich Anordnungen dieser Art benutzt sind. In beiden Fällen handelt es sich darum, elektromagnetische Energie auf möglichst grosse Entfernungen möglichst ungeschwächt fortzuleiten; die zwei parallelen Leiter leisten dies dadurch, dass das Feld in ihnen und ihrer nächsten Nachbarschaft concentrirt wird, ähnlich wie wir dies für stationäre Felder bereits kennen gelernt haben.

Die thatsächlich benutzten Anordnungen sind hauptsächlich: a) ein drahtförmiger Leiter, parallel zu einem eben begrenzten, nach der Tiefe unendlich ausgedehnten Leiter (oberirdischer Telegraph); b) zwei coaxiale Cylinder, der äussere unendlich ausgedehnt (Kabel); c) zwei parallele gleiche Drähte (Laboratoriumsversuche).

Selbst für den einfachsten dieser Fälle, b), ist die mathematische Behandlung verwickelt, die vollständige Durchführung der Analyse ausgeschlossen. Wir wollen deshalb von einfacheren Anordnungen ausgehen.

Zunächst sei ein unendlicher Isolator und ein unendlicher Leiter gegeben, welche in einer Ebene, $x = 0$, aneinander grenzen. In beiden Medien soll eine Strahlung vorausgesetzt werden, welche normal zu y fortschreitet, von y unabhängig und periodisch nach t ist, wie in § 2, — mit folgendem Unter-

schied jedoch: **bisher** waren die Feldgrössen von Null verschieden für $x = -\infty$, dort also war die Strahlungsquelle vorauszusetzen (vgl. S. 427). Physikalisch heisst das: die Quelle befand sich in so grossem normalem Abstand von der Grenzebene, dass die Wellen in der Nähe der Grenze und für die in Betracht gezogene Ausdehnung als eben angesehen werden konnten. — **Jetzt** soll eine Strahlung betrachtet werden, deren Quelle in grosser (unendlicher), **parallel zur Grenzfläche gemessener**, Entfernung anzunehmen ist. D. h. die Feldgrössen dürfen unzulässige Werthe besitzen für $z = -\infty$; für **jedes endliche** z aber sollen sie **nur zulässige** Werthe haben, also Null sein für $x = +\infty$; desgleichen für $z = +\infty$.

Von den beiden, in § 2 durch die Indices (p) und (s) unterschiedenen, Specialfällen, in welche auch jetzt die allgemeine Aufgabe zerfällt, behandeln wir nur denjenigen, für welchen die Strömung im Leiter eine Componente nach der Richtung der Strahlung besitzt [Fall (s)].

Wir suchen also Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen von der Form:

$$M_x, \quad M_z, \quad E_y = 0$$
$$E_x, \quad E_z, \quad M_y = f(x) e^{\iota(\nu t + s z)},$$

d. h. Lösungen der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \iota\nu\varepsilon)\, E_x &= - V \iota s M_y \\ (\lambda + \iota\nu\varepsilon)\, E_z &= V \frac{\partial M_y}{\partial x} \\ \iota\nu\mu\, M_y &= V\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \iota s E_x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Auf der Seite der negativen x befinde sich der Isolator (Luft), auf der Seite der positiven x der Leiter (ein Metall). Alle Constanten, welche sich auf den Isolator beziehen, sollen den Index 0 erhalten, die für den Leiter geltenden ohne Index bleiben; dann ist $\lambda_0 = 0$, und $\nu\varepsilon$ ist gegen λ zu vernachlässigen. Wir setzen an:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \text{für } x < 0 & \text{für } x > 0 & \\ M_y = a_0 e^{-\iota r_0 x} \cdot F & M_y = a e^{\iota r x} \cdot F & \\ E_z = -\frac{V r_0}{\nu \varepsilon_0} a_0 e^{-\iota r_0 x} \cdot F & E_z = \iota \frac{V r}{\lambda} a e^{\iota r x} \cdot F & F = e^{\iota(\nu t + s z)} \\ E_x = -\frac{V s}{\nu \varepsilon_0} a_0 e^{-\iota r_0 x} \cdot F & E_x = -\iota \frac{V s}{\lambda} a e^{\iota r x} \cdot F & \end{array}\right\} \quad (38a)$$

Diese Ausdrücke genügen den Differentialgleichungen, wenn

$$s^2 + r_0{}^2 = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2; \qquad s^2 + r^2 = -\iota \frac{\lambda \mu \nu}{V^2} \quad (39)$$

ist. Sie genügen aber der Bedingung, für $z = \pm \infty$ und für $x = -\infty$, bezw. $x = +\infty$ zu verschwinden, nur dann, wenn s, r_0, r Grössen mit positivem imaginärem Antheil bezeichnen. Dies sei also hiermit festgesetzt. Die Stetigkeitsbedingungen für M_y und E_z an der Grenze fordern:

$$\left.\begin{array}{r} a = a_0 \\ -\frac{r_0}{\nu \varepsilon_0} a_0 = \iota \frac{r}{\lambda} a \end{array}\right\} \quad (40)$$

Solange die physikalischen Voraussetzungen zwei Wellen in dem einen Medium zuliessen, konnte s willkürlich gewählt werden. So verfuhren wir im § 2; wir nahmen s als reell und $< \frac{\nu}{\omega_0}$ an, und legten damit den „Einfallswinkel" willkürlich fest. Jetzt aber ist durch die 4 Gleichungen (39) und (40) ausser den Grössen $\frac{a}{a_0}$, r_0, r auch s bestimmt. Die Berechnung der Grösse s, d. h. der Ausbreitung parallel zur Grenzfläche, bildet in den folgenden Untersuchungen den wichtigsten Theil der Aufgabe.

Wir wollen schreiben

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\lambda \mu \nu}{V^2} = \alpha, \qquad \frac{\nu \varepsilon_0}{\lambda} = q \\ \text{und daher} \quad \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2 = \frac{\nu^2}{\omega_0{}^2} = \alpha q \frac{\mu_0}{\mu} \end{array}\right\} \quad (41)$$

Dann wird

$$s^2 + r_0{}^2 = aq\frac{\mu_0}{\mu}; \qquad s^2 + r^2 = -\iota a \tag{39a}$$

$$a = a_0; \qquad r_0 = -\iota q r. \tag{40a}$$

Es folgt:

$$\left.\begin{aligned} r^2\,(1+q^2) &= -a\left(\iota + \frac{\mu_0}{\mu} q\right) \\ s^2\,(1+q^2) &= aq\left(\frac{\mu_0}{\mu} - \iota q\right) \\ r_0{}^2(1+q^2) &= aq^2\left(\iota + \frac{\mu_0}{\mu} q\right) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Das Leitungsvermögen der reinen Metalle ist, wenn λ_1 dasjenige des Quecksilbers bezeichnet, im Mittel $\lambda = 10\,\lambda_1$. Mit dieser Zahl und den Werthen in Kapitel IV, (32) und (34) berechnet sich

für $\nu =$	$q =$	$a =$
$\pi \cdot 10^2$ sec^{-1}	$^1/_4 \cdot 10^{-15}$	$4 \cdot 10^{-1}\,\frac{\mu}{\mu_0}$ cm^{-2}
$\pi \cdot 10^5$ "	$^1/_4 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{+2}$ " "
$\pi \cdot 10^8$ "	$^1/_4 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{+5}$ " "
$\pi \cdot 10^{11}$ "	$^1/_4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{+8}$ " "

Die Zahlen der ersten Zeile entsprechen etwa den Wechselzahlen der Technik; — die der zweiten Zeile den schnellsten vor Hertz in der physikalischen Forschung angewandten Schwingungszahlen; — die der dritten Zeile den Hertz'schen Fundamentalversuchen; — die der letzten Zeile den äussersten bisher mit elektrischen Hülfsmitteln erreichten Werthen. Wir benutzen zunächst, dass q stets eine praktisch gegen 1 verschwindende Grösse ist. Es ist daher mit stets ausreichender Genauigkeit:

$$\left.\begin{aligned} r &= (\iota - 1)\sqrt{\frac{a}{2}} = -\sqrt{a}\cdot e^{-\iota\frac{\pi}{4}} \\ s &= -\sqrt{aq\frac{\mu_0}{\mu}\left(1 - \iota\frac{q}{2}\frac{\mu}{\mu_0}\right)} = -\sqrt{aq\frac{\mu_0}{\mu}} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$r_0 = (\iota + 1) q \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = q \sqrt{\alpha} \cdot e^{\iota \frac{\pi}{4}} \tag{43}$$

Diese Werthe entsprechen den Vorzeichenbedingungen und erfüllen (40a).

Die reellen Antheile in (38a) werden demnach

in der Luft:

$$\left.\begin{aligned}
M_y &= \frac{c}{\sqrt{\mu_0}} \cdot e^{b_0} \cdot \cos(\nu t + k_0) \\
E_z &= -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sqrt{q \frac{\mu}{\mu_0}} \cdot e^{b_0} \cdot \cos\left(\nu t + k_0 + \frac{\pi}{4}\right) \\
E_x &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot e^{b_0} \cdot \cos(\nu t + k_0) \\
b_0 &= -\frac{q}{2} \sqrt{\alpha q \frac{\mu}{\mu_0}} \cdot z + q \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x = -\frac{q}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{\nu}{\omega_0} \cdot z + q \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x \\
k_0 &= -\sqrt{\alpha q \frac{\mu_0}{\mu}} \cdot z - q \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x = -\frac{\nu}{\omega_0} \cdot z - q \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

im Metall:

$$\left.\begin{aligned}
M_y &= \frac{c}{\sqrt{\mu_0}} \cdot e^{b} \cdot \cos(\nu t + k) \\
E_z &= -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sqrt{q \frac{\mu}{\mu_0}} \cdot e^{b} \cdot \cos\left(\nu t + k + \frac{\pi}{4}\right) \\
E_x &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot q \cdot e^{b} \cdot \cos\left(\nu t + k + \frac{\pi}{2}\right) \\
b &= -\frac{q}{2} \sqrt{\alpha q \frac{\mu}{\mu_0}} \cdot z - \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x = -\frac{q}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{\nu}{\omega_0} \cdot z - \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x \\
k &= -\sqrt{\alpha q \frac{\mu_0}{\mu}} \cdot z - \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x = -\frac{\nu}{\omega_0} \cdot z - \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot x
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Diese Gleichungen sagen aus: in keinem der beiden Medien besteht im eigentlichen Sinn eine „ebene Welle“; es besteht jedesmal ein System von Ebenen gleicher Phase und ein

System von Ebenen gleicher Amplitude, aber beide fallen nicht (bezw. nicht genau) zusammen.

Parallel zur Grenzebene geschätzt schreiten in beiden Medien die Phasen sehr nahe mit der Geschwindigkeit ω_0 fort; gleichzeitig findet in dieser Richtung eine sehr langsame Abnahme der Amplituden statt; auf der Strecke $2\pi \frac{\omega_0}{\nu}$, einer Wellenlänge, sinken sie nämlich nur von 1 auf $e^{-\pi q \frac{\mu}{\mu_0}}$.

In der Luft ist diese Richtung sehr nahezu diejenige, in welcher die Phasen sich thatsächlich ausbreiten; denn in k_0 ist der Factor von x verschwindend gegen den Factor von z. — Die Amplituden aber nehmen wesentlich in der Richtung normal zur Grenze ab; denn in b_0 ist der Factor von z verschwindend gegen den Factor von x. Aber auch in dieser Richtung nehmen sie äusserst langsam ab. Die Tabelle S. 452 ergiebt unter anderem

für $\nu = \pi \cdot 10^2 \ \mathrm{sec}^{-1}$	$q \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \text{ca.}\ 10^{-16} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$= \pi \cdot 10^{11}$ „	$= \text{ca.}\ 4 \cdot 10^{-8}$ „ „

Im Fall eines nicht ferromagnetischen Leiters also sinkt die Amplitude bei der Wechselzahl 100 erst in einem Abstand von 10^{16} cm von der Metallplatte auf $\frac{1}{e}$ ihres Betrages, — und selbst bei der Wechselzahl 10^{11} erst in einem Abstand von 2,5 m. Handelt es sich um weiches Eisen, so können diese Entfernungen sich etwa bis auf $^1/_{50}$ verringern. — Hiermit ist das magnetische Feld in der Luft vollständig beschrieben: für das elektrische Feld kommt noch die Richtung in Frage. Das Verhältniss der Amplituden von E_z und E_x ist nur $\sqrt{q \frac{\mu}{\mu_0}}$; d. h. die elektrischen Kraftlinien stehen in der Luft fast genau senkrecht auf der Grenzfläche. — Die Strahlung also, welche normal zu M und E gerichtet ist, erfolgt merklich parallel zur Grenzebene.

Im Metall schreiten die Phasen sehr nahe normal zur Grenze fort, und auch die Amplituden nehmen in dieser Rich-

tung ab; denn sowohl in k wie in b ist der Factor von z verschwindend gegen den Factor von x. — Die Amplitudenabnahme kann je nach der Schwingungszahl mit mässiger oder mit ausserordentlich grosser Geschwindigkeit erfolgen; es ist für

$$\nu = \pi \cdot 10^8 \sec^{-1} \quad \Big| \quad \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \text{ca. } 0{,}5 \quad \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} \text{ cm}^{-1}$$

$$= \pi \cdot 10^{11} \quad " \quad \Big| \quad = \text{ca. } 15000 \quad " \quad "$$

In nicht-ferromagnetischen Metallen also sinken die Amplituden auf $\frac{1}{e}$ ihres Oberflächenwerthes im ersten Fall bei einer Tiefe von 2 cm, im zweiten Fall bei einer Tiefe von $\frac{1}{15000}$ cm; im Eisen erfolgt die Abnahme schneller. Das Verhältniss der Amplituden von E_x und E_z ist nur $\sqrt{q\frac{\mu_0}{\mu}}$; d. h. die elektrischen Kraftlinien sind im Metall fast genau parallel der Grenzfläche; sie erleiden also beim Uebergang von der Luft ins Metall eine Knickung um fast einen rechten Winkel. — Die Strahlung, welche in der Luft nahezu streifend auf die Metalloberfläche gefallen war, setzt sich im Innern nahezu normal zur Oberfläche fort. —

Wenn wir davon absehen, wie sich das Feld parallel zur Grenzebene ausbreitet, — wenn wir also nur die Vertheilung in einer Ebene $z =$ const. ins Auge fassen, so lässt sich das gesagte in zwei einfachen Bemerkungen zusammenfassen, welche sich in der Folge nützlich erweisen werden:

Erstens: im Metall ist das elektromagnetische Feld zwar abhängig von z, aber trotzdem innerhalb jeder Ebene $z =$ const. so vertheilt, als ob die Strömung unabhängig von x wäre. In der That würde durch diese Annahme die Gleichung

$$s^2 + r^2 = -\iota\alpha$$

verwandelt werden in:

$$r^2 = -\iota\alpha, \tag{46}$$

und dies würde denjenigen Werth von r und somit diejenige

Abhängigkeit der Feldgrössen von x ergeben, welche wir als eine stets genügende Annäherung gefunden haben.

Zweitens: In der Luft ist das Feld bis auf grosse Entfernungen x von der Leiteroberfläche merklich unabhängig von x.

Wir wollen jetzt einen weiteren Schritt zur Annäherung an thatsächliche Versuchsanordnungen machen. Die Dicke der Metallplatte muss endlich sein; sie heisse l. Es muss aber auch für den Strom in der Platte eine Rückleitung vorhanden sein, und die Lage dieses zweiten Leiters muss gegeben sein, damit das Problem definirt sei. Er werde gebildet von einer, der ersten gleichen und parallelen Metallplatte im Abstande $2k$. Die Mittelebene soll jetzt als yz-Ebene gewählt werden (vgl. Fig. 49). Wir suchen ein Feld, welches zu dieser Ebene symmetrisch ist in der Weise, dass zu gegebener Zeit und in gegebener Schicht die Strömung stets nach $+x$ in der einen, nach $-x$ in der anderen Platte geht. Wir setzen als Lösung von (38) an:

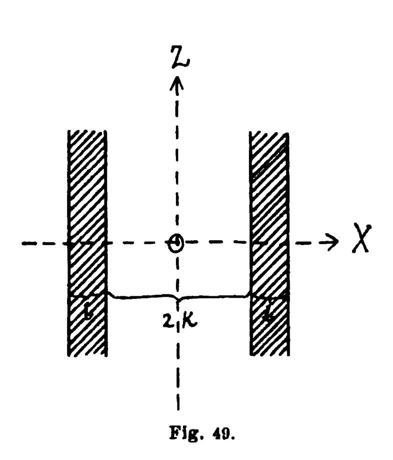


Fig. 49.

$$F = e^{i(\nu t + sx)};$$

für $-k < x < +k$:

$$\left.\begin{aligned} M_y &= (e^{ir_0x} + e^{-ir_0x}) \cdot F \\ E_x &= \frac{Vr_0}{\nu\varepsilon_0}(e^{ir_0x} - e^{-ir_0x}) \cdot F \\ E_z &= -\frac{Vs}{\nu\varepsilon_0}(e^{ir_0x} + e^{-ir_0x}) \cdot F \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{für } k < x < (k+l): \\
\left.\begin{array}{ll}
M_y = & (Ae^{\iota r x} + Be^{-\iota r x}) \cdot F \\
E_z = & \iota \frac{Vr}{\lambda} (Ae^{\iota r x} - Be^{-\iota r x}) \cdot F \\
E_x = -\iota \frac{Vs}{\lambda} & (Ae^{\iota r x} + Be^{-\iota r x}) \cdot F
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für} \\ -k > x > -(k+l) \\ \text{das gleiche; nur } -r \\ \text{statt } r! \end{array} \\
\text{für } (k+l) < x < +\infty: \\
\left.\begin{array}{ll}
M_y = & Ce^{\iota r_0 x} \cdot F \\
E_z = & \frac{Vr_0}{\nu\varepsilon_0} Ce^{\iota r_0 x} \cdot F \\
E_x = & -\frac{Vs}{\nu\varepsilon_0} Ce^{\iota r_0 x} \cdot F
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für} \\ -(k+l) > x > -\infty \\ \text{das gleiche; nur } -r_0 \\ \text{statt } r_0! \end{array}
\end{array}\right\} \quad (47)
$$

Diese Ausdrücke ergeben die verlangte Symmetrie. Sie genügen den Gleichungen (38), also auch (J″) (K″), wenn wieder ist

$$s^2 + r_0{}^2 = \alpha q \frac{\mu_0}{\mu}; \quad s^2 + r^2 = -\iota\alpha, \qquad (48)$$

wo α und q durch (41) definirt sind. Sie verschwinden, wie verlangt wird, für $x = \pm\infty$ und für $z = +\infty$, wenn r_0 und s positiven imaginären Theil besitzen; das gleiche wollen wir für r festsetzen. Sie genügen endlich den Stetigkeitsbedingungen für $x = \pm k$ und $x = \pm(k+l)$, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$e^{\iota r_0 k} + e^{-\iota r_0 k} = Ae^{\iota r k} + Be^{-\iota r k} \qquad (49)$$

$$\frac{r_0}{\nu\varepsilon_0}(e^{\iota r_0 k} - e^{-\iota r_0 k}) = \frac{\iota r}{\lambda}(Ae^{\iota r k} - Be^{-\iota r k}) \qquad (50)$$

$$Ce^{\iota r_0 (k+l)} = Ae^{\iota r (k+l)} + Be^{-\iota r (k+l)} \qquad (51)$$

$$\frac{r_0}{\nu\varepsilon_0} C e^{\iota r_0 (k+l)} = \frac{\iota r}{\lambda}(Ae^{\iota r (k+l)} - Be^{-\iota r (k+l)}). \qquad (52)$$

Aus (51) und (52) folgt:

$$\left(1 - \iota q \frac{r}{r_0}\right) Ae^{\iota r (k+l)} + \left(1 + \iota q \frac{r}{r_0}\right) Be^{-\iota r (k+l)} = 0. \qquad (53)$$

Die Elimination von A und B aus (49) (50) und (53) ergiebt:

$$\frac{e^{\iota 2r_0 k}-1}{e^{\iota 2r_0 k}+1}=\iota q\frac{r}{r_0}\frac{\left(1+\iota q\frac{r}{r_0}\right)+\left(1-\iota q\frac{r}{r_0}\right)e^{\iota 2rl}}{\left(1+\iota q\frac{r}{r_0}\right)-\left(1-\iota q\frac{r}{r_0}\right)e^{\iota 2rl}}. \qquad (54)$$

Aus den drei Gleichungen (48) und (54) wären r_0, r, s zu bestimmen. (Dann folgen sofort A, B, C.) Die directe Auflösung ist nicht möglich; zu einer brauchbaren Näherung aber gelangen wir durch die folgenden Bemerkungen:

Wenn ν verschwindend klein ist, so erhält man aus der zweiten der Gleichungen (38) für jeden der drei Lufträume: $\frac{\partial M_y}{\partial x}=0$, also $M_y=0$ überall auf der Aussenseite der Platten, da es ja $=0$ sein muss für $x=+\infty$. Ist andrerseits ν gross, so kann man aus der vorigen Aufgabe (s. S. 455) entnehmen, dass eine aus dem Zwischenraum auf die Platten fallende Strahlung die Aussenränder derselben nicht mit merklicher Stärke erreicht. Man kann daher erwarten, dass stets eine Lösung existirt, für welche das Feld im Aussenraum verschwindet. Das bedeutet nach (47): die Grösse $C\cdot e^{\iota r_0(k+l)}$ ist sehr klein, also nach (51) und (53):

$$\iota q\frac{r}{r_0} \text{ sehr klein.} \qquad \text{Annahme } (\alpha)$$

Es ist nicht gesagt, dass dies die einzige Lösung unserer Gleichungen sei. Es wird eine andere existiren, in welcher von der Aussenseite her die Strahlung auf die Platten trifft. Diese also schliessen wir durch unsere Annahme (α) aus; wir behandeln eine Strahlung, und auch nur diese interessirt uns, deren Quelle bei $x=-\infty$, $x=0$ anzunehmen ist. — Wir entnehmen aus der vorigen Aufgabe ferner (s. S. 455f.), dass für das Metall voraussichtlich

$$\text{sehr nahe } r^2=-\iota a, \qquad \text{Annahme } (\beta)$$

und für den Luftzwischenraum

$$kr_0 \text{ sehr klein} \qquad \text{Annahme } (\gamma)$$

sein wird.

Wir wollen diese Annahmen versuchsweise in die Rechnung einführen; an den Resultaten ist dann zu prüfen, ob sie erlaubt waren.

Führt man den Werth von r aus (β) in (α) ein, so kommt:

$$\frac{q^2 a}{r_0^2} \text{ sehr klein.} \qquad (\alpha')$$

Aus (48) folgt ferner

$$r^2 - r_0^2 = -\iota a - \frac{\mu_0}{\mu} q a,$$

also, da q stets sehr klein, merklich

$$= -\iota a.$$

Demnach bedeutet (β):

$$\frac{r_0^2}{a} \text{ sehr klein.} \qquad (\beta')$$

Durch (α'), (β'), (γ) wird die Berechtigung unserer Annahme an den nun zu findenden Werth von r_0 geknüpft.

Mittels (α) und (γ) folgt aus (54):

$$\frac{\iota 2 r_0 k}{2} = \iota q \frac{r}{r_0} \frac{1 + e^{\iota 2 r l}}{1 - e^{\iota 2 r l}},$$

oder

$$r_0^2 = \frac{qr}{k} \frac{1 + e^{\iota 2 r l}}{1 - e^{\iota 2 r l}}. \qquad (55)$$

Hier ist $r = (\iota - 1)\sqrt{\frac{a}{2}}$ aus (β) einzusetzen.

Ist nun a) $2l\sqrt{\frac{a}{2}}$ klein, so wird der Bruch in (55): $\frac{2}{-\iota 2 r l}$, also

$$r_0^2 = \iota \frac{q}{kl}. \qquad (55\text{a})$$

Ist b) $2l\sqrt{\frac{a}{2}}$ gross, so wird der Bruch: $+1$, also

$$r_0^2 = q\frac{r}{k} = (\iota - 1)\frac{q}{k}\sqrt{\frac{a}{2}}. \qquad (55\text{b})$$

Demnach lauten die zu verificirenden Annahmen,

	wenn $l\sqrt{a}$ klein:	wenn $l\sqrt{a}$ gross:	
(α_1)	$qakl$ klein	$q\sqrt{a}\cdot k$ klein	(α_2)
(β_1)	$\frac{q}{akl}$ klein	$\frac{q}{\sqrt{a}\cdot k}$ klein	(β_2)
(γ_1)	$q\frac{k}{l}$ klein	$q\sqrt{a}\cdot k$ klein.	(γ_2)

(α_1) und (α_2) sind befriedigt, wenn $q\sqrt{a}\cdot k$ klein ist; das erfordert (im Fall von nicht-ferromagnetischen Platten) selbst für die Wechselzahl $\frac{10^8}{\text{sec}}$ nur, dass k klein sei gegen 100 km. — und für die extreme Wechselzahl $\frac{10}{\text{sec}}$, dass k klein sei gegen 2 m.

(β_1) fordert, dass, unabhängig von der Wechselzahl, kl gross sei gegen 10^{-15} cm^2; (β_2) fordert selbst für die höchsten Wechselzahlen nur, dass k gross sei gegen 10^{-11} cm.

(γ_1) verlangt selbst für die grössten ν nur, dass k klein sei gegen $10^6\, l$; (γ_2) endlich verlangt das gleiche wie (α_2).

Zusammengefasst: es ist praktisch nahezu — und abgesehen von den extrem hohen Wechselzahlen vollkommen unmöglich, die Bedingungen zu verletzen. Unsere Lösung (55) bietet daher stets eine gute Näherung. —

Wir begnügen uns mit dieser Näherung. Aus (48) und (55) folgt:

$$s^2 = aq\frac{\mu_0}{\mu} - q\frac{r}{k}\frac{1+e^{\iota 2rl}}{1-e^{\iota 2rl}}; \tag{56}$$

insbesondere,

a) wenn $l\sqrt{a}$ klein ist:

$$s^2 = aq\frac{\mu_0}{\mu} - \iota\frac{q}{kl}; \tag{56a}$$

b) wenn $l\sqrt{a}$ gross ist:

$$s^2 = aq\frac{\mu_0}{\mu} - (\iota - 1)\frac{q}{k}\sqrt{\frac{a}{2}}. \tag{56b}$$

Bei gegebener Anordnung ändert sich also mit steigender Wechselzahl vollkommen der Charakter der Function, welche s, d. h. die Ausbreitungsform der Wellen, durch Wechselzahl und geometrisch-physikalische Daten ausdrückt.

(a_1) Es sei ν so klein, dass nicht nur $l^2 a$, sondern auch $k l a \frac{\mu_0}{\mu}$ eine sehr kleine Zahl ist; dann folgt aus (56a):

$$s^2 = -\iota \frac{q}{kl},$$

also

$$s = -\sqrt{\frac{q}{2kl}} + \iota \sqrt{\frac{q}{2kl}}. \tag{57a}$$

(b_1) Es sei ν so gross, dass $l\sqrt{a}$ und zugleich $k\sqrt{a}\frac{\mu_0}{\mu}$ sehr grosse Zahlen sind; dann folgt aus (56b):

$$s = -\sqrt{aq\frac{\mu_0}{\mu}}\left[1 - (\iota - 1)\frac{1}{2k}\frac{\mu}{\mu_0}\sqrt{\frac{1}{2a}}\right]$$

oder

$$s = -\frac{\nu}{\omega_0}[1 + \delta] + \iota \frac{1}{k}\sqrt{\frac{q}{8}\frac{\mu}{\mu_0}}, \tag{57b}$$

wo $\delta = \frac{1}{k}\frac{\mu}{\mu_0}\sqrt{\frac{1}{8a}}$ eine sehr kleine Zahl.

Schreiben wir allgemein

$$s = -m + \iota p,$$

so haben alle Feldgrössen die Form

$$Ae^{-px}\cos(\nu t - mx + \vartheta),$$

wo A und ϑ nur noch Functionen von x sind. Es ist also $\frac{\nu}{m}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Phasen längs den Platten ausbreiten, und $\frac{1}{p}$ die längs den Platten gemessene Strecke, auf welcher die Amplituden von 1 auf $\frac{1}{e}$ fallen.

Unsere Gleichungen zeigen demnach $\left(\text{da } q = \frac{\nu \varepsilon_0}{\lambda}\right)$:

(a_1) für sehr langsame Oscillationen sind m und p proportional mit der Quadratwurzel aus der Wechselzahl. Beide hängen ausserdem nicht nur von den physikalischen Constanten der beiden Medien, sondern auch von den geometrischen Daten ab. — Es ist ferner $p = m$. Dadurch ist aber die besondere Form der Wellenfortpflanzung charakterisirt, welche für einen „vollkommenen Leiter" gilt (s. § 2, S. 433) und welche zugleich der Ausbreitung der Temperaturen durch Wärmeleitung eigenthümlich ist.

(b_1) für sehr schnelle Oscillationen nähert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem festen Werth ω_0, welcher völlig bestimmt ist durch die physikalischen Constanten des Isolators, und gleich der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Wellen im unbegrenzten Isolator ausbreiten.

Es sei etwa die Plattendicke $l = 0{,}1$ cm, der Plattenabstand $2k = 10$ cm; dann ist [vgl. Tabelle S. 452] (56a) brauchbar über $\nu = \pi \cdot 100 \text{ sec}^{-1}$ hinaus, und auch (57a) giebt für dieses ν noch eine Näherung. Die Bedingungen für (57b) andererseits sind erfüllt etwa von $\nu = \pi \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}$ an. Es ergiebt sich in runden Zahlen:

für $\nu =$	$\frac{\nu}{m} =$	$p =$
$\pi \frac{1}{\text{sec}}$	$2 \cdot 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$1{,}5 \cdot 10^{-9} \quad \frac{1}{\text{cm}}$
$\pi \cdot 100$ „	$2 \cdot 10^{10}$ „	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$ „
$\pi \cdot 10^7$ „	$3 \cdot 10^{10}$ „	$3{,}5 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}}$ „
$\pi \cdot 10^{11}$ „	$3 \cdot 10^{10}$ „	$3{,}5 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}}$ „

Aus der Tabelle ist u. A. ersichtlich, wie die Absorption (für die Längeneinheit berechnet) mit steigender Wechselzahl zunimmt. Wenn es sich nun nicht um einfach harmonische, sondern um beliebige Functionen der Zeit handelt, so

können wir irgend eine der Feldgrössen an einer beliebigen Stelle des Raumes als Function der Zeit in eine Fourier'sche Reihe entwickelt denken. Einem jeden Glied der Reihe sind dann durch unsere Gleichungen bestimmte Werthe aller Feldgrössen an allen Punkten zugeordnet, und zwar sind sie durchweg einfach harmonische Functionen der Zeit von gleicher Periode. Die Summation aller Glieder ergiebt in jedem Punkt das vollständige Feld. Die obige Bemerkung zeigt nun, dass je weiter man sich von der Strahlungsquelle entfernt, umsomehr die Glieder höherer Ordnungszahl gegen die Anfangsglieder zurücktreten. In genügend grosser Entfernung werden also nur noch die Glieder merklich sein, welche kleinen Werthen von ν entsprechen, und für welche daher s durch die Gleichung (57a) bestimmt ist. Die Feldgrössen werden dann in ihrer Abhängigkeit von x und t dargestellt durch einen Ausdruck von der Form:

$$X = A_1 e^{\iota\nu_1 t} e^{-\left(a\sqrt{\frac{\nu_1}{2}} + \iota a\sqrt{\frac{\nu_1}{2}}\right)x} + A_2 e^{\iota\nu_2 t} e^{-\left(a\sqrt{\frac{\nu_2}{2}} + \iota a\sqrt{\frac{\nu_2}{2}}\right)x} + \cdots,$$

$$\text{wo } a^2 = \frac{\varepsilon_0}{\lambda l k}.$$

Dieses X genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial X}{\partial t}. \tag{58}$$

Es ist völlig bestimmt durch diese Gleichung, sobald noch für $t = 0$ die Werthe von X für jedes x vorgeschrieben werden. Nun ist eine Lösung von (58):

$$X_{x,t} = \sqrt{\frac{a^2}{\pi 4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\beta) \cdot e^{-(x-\beta)^2 \frac{a^2}{4t}} \cdot d\beta, \tag{58a}$$

wo ψ eine beliebige Function seines Arguments bedeuten soll, — und diese Lösung geht für $t = 0$ über in

$$X_{x,0} = \psi(x). \tag{58b}$$

(Das erstere folgt daraus, dass

$$g(z,t) = \sqrt{\frac{a^2}{\pi 4t}} \cdot e^{-(z-\beta)^2 \frac{a^2}{4t}}$$

der Differentialgleichung (58) genügt, wie leicht zu verificiren ist. Die Gleichung (58b) folgt, indem man $\beta_1 = (\beta - z)\sqrt{\frac{a^2}{4t}}$ als Integrationsvariable einführt, und beachtet, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta_1^2} . d\beta_1 = \sqrt{\pi}$$

ist.)

Es sind daher durch (58a) die Werthe von X für den Moment t bestimmt, wenn sie für $t = 0$ willkürlich gemäss (58b) gegeben sind (vgl. für das folgende § 1, S. 422 f.). Zu den Werthen $X_{z,t}$ tragen die Anfangswerthe aller Punkte bei, aber mit verschiedenem „Gewicht“ $g(z,t)$. Sei zur Zeit $t = 0$ etwa nur im Punkte $z = 0$ die Function $\varphi(z)$ von Null verschieden, dann läuft über jeden Punkt z_1 eine Welle hin, deren Höhe proportional ist mit $\sqrt{\frac{a^2}{\pi 4t}}\, e^{-z_1^2 \frac{a^2}{4t}}$ und welche ihre maximale Höhe daher zur Zeit

$$t_1 = \frac{z_1^2 a^2}{2} \qquad (58c)$$

erreicht.

Dies ist die Form, in welcher nach dem Fourier'schen Gesetz der Wärmeleitung sich eine Temperaturwelle in der Richtung z ausbreitet. Wir können daher unser Resultat so aussprechen: bei der vorausgesetzten Anordnung der Leiter breitet sich in grosser Entfernung von der Strahlungsquelle die elektromagnetische Strahlung nach den Gesetzen der Wärmeleitung aus.

Die bisherigen Bemerkungen betrafen die Abhängigkeit der Feldgrössen von z. Wir wollen jetzt die Vertheilung des Feldes in einem zu z normalen Querschnitt betrachten:

Mittels (γ) ergeben (49) und (50):

$$2 = Ae^{\iota rk} + Be^{-\iota rk}$$

$$\frac{2r_0^2 k}{qr} = Ae^{\iota rk} - Be^{-\iota rk},$$

und hieraus folgt mittels (55):

$$A = \frac{2e^{-\iota rk}}{1 - e^{\iota 2rl}}, \qquad B = -\frac{2e^{\iota r(2l+k)}}{1 - e^{\iota 2rl}}.$$

Mit diesen Werthen erhalten wir zunächst aus (47):

$$M_y = 2F \quad \text{für} \quad x = k,$$
$$M_y = 0 \quad \text{für} \quad x = k + l.$$

Nun ist im Metall [s. (38)]:

$$V\frac{\partial M_y}{\partial x} = A_x.$$

Bezeichnen wir also für die Platte auf Seite der positiven x den Gesammtstrom, welcher in einem Streifen von der, parallel zu y gemessenen, Breite 1 nach $+ x$ fliesst, durch j, so wird

$$j = \int_k^{k+l} A_x\,dx = V\left[M_{y(x=k+l)} - M_{y(x=k)}\right] = -V\cdot 2F$$

oder

$$j = \text{const.}\ e^{\iota(\nu t + sz)}. \tag{59}$$

Indem wir nun durchweg j an Stelle von $- V\cdot 2F$ einführen, erhalten wir aus (47):

für $-k < x < +k$, d. h. zwischen den Platten:

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -\frac{j}{V} \\ E_x &= -j\cdot\iota\frac{r_0^2}{\nu\varepsilon_0}\cdot x \\ E_x &= \quad j\frac{s}{\nu\varepsilon_0}; \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

für $k < x < (k + l)$, d. h. in der Platte auf Seite der positiven x, in welcher der Strom j zu positiven x geht:

$$\left.\begin{aligned}
M_y &= -\frac{j}{V}\frac{1}{1 - e^{\iota 2rl}}\left[e^{\iota r(x-k)} - e^{\iota r(2l+k-x)}\right] \\
E_x &= -\frac{j}{\lambda}\frac{\iota r}{1 - e^{\iota 2rl}}\left[e^{\iota r(x-k)} + e^{\iota r(2l+k-x)}\right] \\
E_x &= \frac{j}{\lambda}\frac{\iota s}{1 - e^{\iota 2rl}}\left[e^{\iota r(x-k)} - e^{\iota r(2l+k-x)}\right] \\
r &= (\iota - 1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}};
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

ausserhalb der Platten ein verschwindendes Feld.

In der Platte folgt im besonderen

a) wenn $l\sqrt{\alpha}$, also auch Mod (rl) klein ist:

$$M_y = -\frac{j}{V}\frac{k + l - x}{l}$$

$$E_x = \frac{j}{\lambda}\frac{1 + \iota rl}{l}$$

$$E_x = \frac{j}{\lambda}\iota s\frac{k + l - x}{l}$$

b) wenn $l\sqrt{\alpha}$ gross, also Mod $(e^{\iota rl})$ sehr klein ist:

$$M_y = -\frac{j}{V} \quad e^{\iota r(x-k)}$$

$$E_x = -\frac{j}{\lambda}\iota r \cdot e^{\iota r(x-k)}$$

$$E_x = \frac{j}{\lambda}\iota s \cdot e^{\iota r(x-k)}$$

Im Fall b) ist Mod $\left(\frac{E_x}{E_x}\right) = $ Mod $\left(\frac{s}{r}\right)$, und dies ist nach (β) und (48) verschwindend klein. Im Fall a) ist der Maximalwerth von Mod $\left(\frac{E_x}{E_x}\right) = $ Mod (sl) und dies ist verschwindend

klein gegen Mod (rl), welches selbst klein sein soll. Stets also ist die Strömung in der Platte nahezu parallel der Grenzfläche. Im Fall a) aber erfüllt die Strömung nahezu gleichmässig den Querschnitt der Platte, während sie im Fall b) nur in einen kleinen Bruchtheil der Dicke merklich eindringt.

In der Luft ist das elektrische Feld nahezu normal zur Platte. Es ist nämlich Mod $\left(\frac{E_z}{E_x}\right) = \text{Mod}\left(\frac{r_0{}^2 x}{s}\right)$, also höchstens $= \text{Mod}\left(\frac{r_0{}^2 k}{s}\right)$ und dies ist stets sehr klein. Denn wenn ν klein ist, so ist

$$s^2 = -\iota\frac{q}{kl}, \quad r_0{}^2 = \iota\frac{q}{kl}, \text{ also Mod}\left(\frac{r_0{}^2 k}{s}\right) = \sqrt{q\frac{k}{l}};$$

und wenn ν gross ist:

$$s^2 = \frac{\mu_0}{\mu}\alpha q, \quad r_0{}^2 = (\iota - 1)\frac{q}{k}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \text{ also Mod}\left(\frac{r_0{}^2 k}{s}\right) = \sqrt{q\frac{\mu}{\mu_0}}.$$

Die Energie wandert also im Luft-Zwischenraum parallel zu den Platten, wendet dann plötzlich an der Grenze, um normal in die Platten einzudringen, durchsetzt aber nur für kleine ν vollständig die Platten, während sie für sehr grosse ν nur eine Oberflächenschicht von verschwindender Dicke erfasst. Die Strahlung ist also für kleine ν ein Vorgang in der Luft und im Leiter. Für sehr grosse ν aber ist sie ein Vorgang im Dielektricum: die Wellen umspielen die Leiter, welche ihnen lediglich als Führung dienen. —

Die gewonnenen Resultate lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen, aus welchen die physikalische Bedeutung unserer Näherung erkennbar wird:

1) Die Strömung, obwohl von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich, ist gleichwohl innerhalb eines jeden Querschnittes $x = \text{const.}$ so vertheilt, als ob sie in allen Querschnitten die gleiche, jede Stromlinie also geschlossen, die Strömung „quasistationär“ wäre.

2) Das magnetische Feld in einem bestimmten Querschnitt des Isolators leitet sich in jedem Moment aus der in diesem Querschnitt vorhandenen Strömung ebenso ab, als wäre die gleiche Strömung in allen Querschnitten vorhanden und stationär.

3) Das elektrische Feld in einem bestimmten Querschnitt des Isolators leitet sich in jedem Moment aus der in diesem Querschnitt auf den Leiteroberflächen vorhandenen Elektricitätsvertheilung ebenso ab, als wäre die gleiche elektrische Dichte in allen Querschnitten vorhanden und stationär.

4) Die Beziehung zwischen Strömung und elektrischer Dichte ist durch die „Continuitätsgleichung" der Elektricität gegeben.

5) Die Abhängigkeit der Feldgrössen von z ist durch das Inductionsgesetz gegeben. —

Wir wollen zeigen, dass aus diesem Ansatz in der That alle Grössen mit dem gleichen Grade der Näherung richtig gefunden werden, wie oben:

Wir suchen Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen, für welche

$$M_x = M_z = E_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \iota\nu$$

ist. Die Annahme unter 1) bedeutet, dass weiter bei der Berechnung des Feldes im Leiterquerschnitt $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ gesetzt werden soll. Es folgen daher aus den Gleichungen (J″) (K″) für das Innere der Metallplatten an Stelle von (38) die Gleichungen

$$E_x = 0 \tag{61a}$$

$$\lambda E_z = V \frac{\partial M_y}{\partial x}$$

$$\iota\nu\mu M_y = V \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} = \iota a M_y, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \iota a E_z, \quad a = \frac{\lambda\mu\nu}{V^2}.$$

Weiter:

$$\left.\begin{aligned} M_y &= a e^{\iota r x} + b e^{-\iota r x} \\ E_x &= \frac{\iota V r}{\lambda}\left(a e^{\iota r x} - b e^{-\iota r x}\right) \\ r^2 &= -\iota\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Die Annahme unter 2) ergiebt für jeden der drei Lufträume:

$$0 = \frac{\partial M_y}{\partial x}.$$

Da nun das Feld Null sein muss für $x = +\infty$, so folgt zunächst

$$M_y = 0 \text{ für die beiden Aussenräume;}$$

also auch $M_y = 0$ für die äusseren Leiteroberflächen. Führt man wiederum ein:

$$j = \int_k^{k+l} \lambda E_x\, dx = V\left[M_{y(x=k+l)} - M_{y(x=k)}\right] = -V \cdot M_{y(x=k)},$$

so entstehen aus (62) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -\frac{j}{V}\,\frac{1}{1 - e^{\iota 2 r l}}\left[e^{\iota r(x-k)} - e^{\iota r(2l+k-x)}\right] \\ E_x &= -\frac{j}{\lambda}\,\frac{\iota r}{1 - e^{\iota 2 r l}}\left[e^{\iota r(x-k)} + e^{\iota r(2l+k-x)}\right] \\ r^2 &= -\iota\alpha \end{aligned}\right\} \quad (61\text{b})$$

gültig für die positive Metallplatte.

Für den Querschnitt des Luftzwischenraums aber folgt

$$M_y = -\frac{j}{V} = \text{const.} \quad (63\text{a})$$

Die Annahme unter 3) ergiebt für den Luftraum

$$E_x = 0 \quad (63\text{b})$$

$$E_x = \text{const.} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad (64)$$

wenn σ die elektrische Dichte auf der Innenseite der positiven Platte in dem betrachteten Querschnitt bezeichnet.

4) Die „Continuitätsgleichung der Elektricität"

$$\int A_N dS = -\frac{\partial e_i}{\partial t},$$

angewandt auf ein aus der positiven Platte geschnittenes Prisma mit den Kanten l, $\delta y = 1$ und dz, liefert:

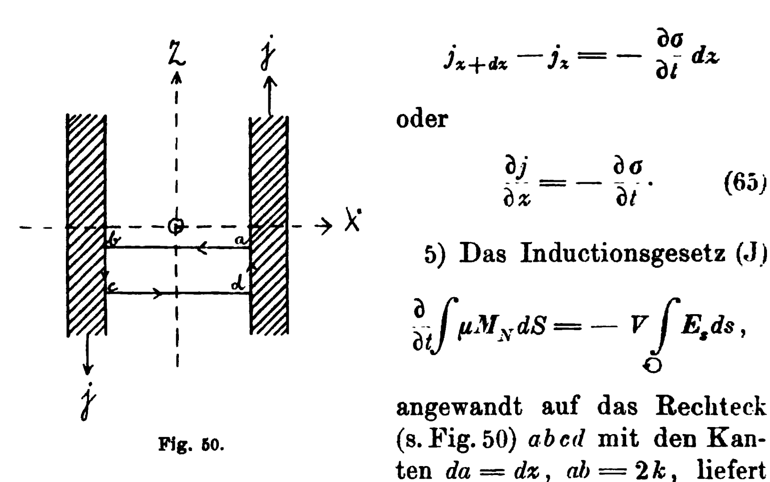


Fig. 50.

$$j_{z+dz} - j_z = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} dz$$

oder

$$\frac{\partial j}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad (65)$$

5) Das Inductionsgesetz (J)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mu M_N dS = -V\int_{\circ} E_s ds,$$

angewandt auf das Rechteck (s. Fig. 50) $abcd$ mit den Kanten $da = dz$, $ab = 2k$, liefert nach (63a) und (64), da y die negative Normale des Umlaufs $abcd$ ist:

$$\frac{\mu_0}{V}\frac{\partial j}{\partial t} 2k\,dz = -V\left[-\frac{2k}{\varepsilon_0}\sigma_z + E_z(+)\cdot dz + \frac{2k}{\varepsilon_0}\sigma_{z+dz} - E_z(-)\cdot dz\right]$$

oder
$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2}\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\varepsilon_0}{2k}\left[E_z(+) - E_z(-)\right].$$

Hier bezeichnen $E_z(+)$ und $E_z(-)$ die Werthe von E_z am Rande der positiven bezw. negativen Platte, also für $x = k$ bezw. $x = -k$. Beide sind entgegengesetzt gleich; $E_z(+)$ ist aus (61b) zu entnehmen. Differenzirt man nach t, so folgt wegen (65):

$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \iota \frac{\varepsilon_0 r}{\lambda k} \frac{1 + e^{\iota 2 r l}}{1 - e^{\iota 2 r l}} \frac{\partial j}{\partial t}.$$

Ist nun, wie vorausgesetzt wurde,

$$j = f(x) \cdot e^{\iota \nu t} \tag{66}$$

so bedeutet dies:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \left[- \frac{\nu^2 \varepsilon_0 \mu_0}{V^2} + \frac{\nu \varepsilon_0}{\lambda} \frac{r}{k} \frac{1 + e^{\iota 2 r l}}{1 - e^{\iota 2 r l}} \right] j.$$

Daraus:

$$j = \text{const.}\, e^{\iota(\nu t + s x)}, \tag{67}$$

wo

$$s^2 = \frac{\nu^2 \varepsilon_0 \mu_0}{V^2} - \frac{\nu \varepsilon_0}{\lambda} \frac{r}{k} \frac{1 + e^{\iota 2 r l}}{1 - e^{\iota 2 r l}}. \tag{68}$$

Endlich folgt aus (64) (65) (67):

$$E_x = \frac{s}{\nu \varepsilon_0} j \tag{63c}$$

gültig für den Luftzwischenraum.

In (61) (63) (67) (68) ist das Feld vollständig wiedergefunden in Uebereinstimmung mit den früheren Gleichungen (60) (59) (56). Wir haben lediglich für E_x in der Luft und für E_r im Metall den Werth Null erhalten an Stelle der gegen die andere Componente verschwindenden Werthe, welche in (60) aufgeführt sind.

Wir wollen nun das soeben angewandte Verfahren zu verallgemeinern suchen. Wir beweisen zu diesem Zweck zunächst einen Hülfssatz.

Zwei parallele, unendlich lange, sehr dünnwandige Hohlcylinder von beliebig geformter Umfangslinie seien

a) elektrostatisch entgegengesetzt geladen; sie seien

b) stationär in entgegengesetzter Richtung vom gleichen Strom durchflossen, und zwar sei die Wandstärke überall so gewählt, dass das magnetische Feld im Hohlraum Null ist.

Dann gelten die folgenden Sätze:

α) Die Wandstärke, und somit die Strömung j für die Längeneinheit des Umfangs in b) ist proportional der elektrischen Dichte σ in a);

β) das magnetische Feld in b) ist überall normal zum elektrischen Feld in a), insbesondere also am Rande tangential zu den Cylinderoberflächen, — und dem Zahlwerth nach ihm proportional;

γ) wenn c die Capacität der statisch geladenen und P den Selbstinductionscoefficienten der stationär durchströmten Cylinder bezeichnet, je für die Längeneinheit berechnet, so ist

$$cP = \frac{\varepsilon\mu}{V^2}. \tag{69}$$

Beweis: Es mögen $\overset{+}{S}$ und $\overset{-}{S}$ die beiden zu z parallelen Cylinderflächen sein; die Umfangslinien, positiv gerechnet im positiven Umlauf um z, seien mit l bezeichnet, die in den äusseren Isolator hinein errichteten Normalen mit N. Auf der Längeneinheit von $\overset{+}{S}$ sei die Ladung e; durch $\overset{+}{S}$ fliesse nach $+z$ der Strom i. Die Grössen e und i seien willkürlich gegeben.

Das Feld E in a) genügt dann folgenden Bedingungen, durch die es eindeutig bestimmt ist:

in den Hohlräumen: $E = 0$;

im Aussenraum: $E_z = 0$,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0;$$

an $\overset{+}{S}$: $\varepsilon \int_{\bigcirc} E_N dl = e$,

an $\overset{-}{S}$: $\varepsilon \int_{\bigcirc} E_N dl = -e$.

Das Feld E sei diesen Bedingungen entsprechend bestimmt. —

Das Feld M in b) muss folgenden Bedingungen genügen:

in den Hohlräumen: $M = 0$;

im Aussenraum: $M_z = 0$,

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} = 0;$$

an $\overset{+}{S}$: $$V\oint M_l \, dl = i,$$

an $\overset{-}{S}$: $$V\oint M_l \, dl = -i.$$

Diese Bedingungen bestimmen es eindeutig. (Der Beweis ist nach bekanntem Muster leicht zu führen.) Den Bedingungen aber genügt das folgende Feld:

$$M_x = -\frac{i\varepsilon}{Ve} E_y, \qquad M_y = +\frac{i\varepsilon}{Ve} E_x, \qquad \left(\text{woraus } M_l = \frac{i\varepsilon}{Ve} E_N\right)$$

wie sich durch Einsetzen und Anwendung der Gleichungen des Falles a) sofort ergiebt.

Durch diese Ausdrücke ist zunächst der Satz unter β) direct ausgesprochen. Denken wir ferner einen Umlauf ausgeführt um ein Querschnittselement der Röhre, dessen Seiten gleich dl bezw. gleich der verschwindenden Wandstärke sind, so giebt die Gleichung

$$V\oint M_s \, ds = \int A_N \, dS,$$

da auf der Innenseite $M = 0$ ist:

$$V M_l \, dl + \text{Glieder höherer Ordnung} = j\,dl \text{ oder}$$

$$j = V M_l.$$

Andererseits ist $\sigma = \varepsilon E_N$. Also wird

$$\frac{j}{\sigma} = \frac{i}{e},$$

womit der Satz unter α) bewiesen ist.

Sei endlich (vgl. Fig. 50, S. 470) *abcd* ein an die beiden Cylinder angeheftetes Band von der Breite Eins, der Fläche S_0, der Randlinie s. Dann sind c und P definirt durch die Gleichungen

$$\frac{e}{c} = \int_{+}^{-} E_s \, ds$$

$$VPi = \int \mu M_N \, dS_0, \quad \text{wo}$$

$$dS_0 = ds \text{ und } N \perp ds.$$

(Der Ausdruck für P folgt, wie S. 295, 297, da das Feld M innerhalb der Hohlcylinder Null ist und die Oberfläche der Leiter von Kraftlinien gebildet wird.) Da nun

$$M_N = \frac{i\varepsilon}{Ve} E_s,$$

so folgt endlich auch die Gleichung (69) unter γ).

An Stelle der dünnwandigen Röhren von vorgeschriebener Vertheilung der Wandstärke denken wir uns jetzt Vollcylinder, an Stelle der stationären eine beliebig variable Strömung. Wir haben dann eine andere Vertheilung der Strömung, als bisher vorausgesetzt wurde, und diese Vertheilung hängt von der Schnelligkeit der Stromschwankungen ab. Das magnetische Feld wollen wir aus der Strömung stets so berechnen, als wenn diese stationär wäre. Die Stromvertheilung hat dann unter allen Umständen wesentlichen Einfluss auf das Feld im Innern der Leiter. Im Aussenraum aber bleibt das Feld unabhängig von der Stromvertheilung, also unabhängig von der Schwingungszahl und übereinstimmend mit dem Felde unseres Hülfssatzes, erstens, wenn die beiden Leiter coaxiale Kreiscylinder sind; denn die Strömung ist dann stets symmetrisch um die Axe vertheilt, und das äussere

Feld nur abhängig vom Gesammtstrom. (Einen speciellen Fall bilden die ebenen Platten unserer bisherigen Anordnung; die gemeinsame Cylinderaxe liegt dann bei $x = \infty$.) Es bleibt zweitens nahezu unabhängig von der Stromvertheilung, wenn die Querschnittsdimensionen der Cylinder sehr klein sind gegen ihren Abstand.

Wir setzen im folgenden voraus, dass die Cylinder der einen oder anderen der genannten geometrischen Bedingungen genügen. Dann gilt also unser Hülfssatz und insbesondere die Gleichung (69) mit der Massgabe, dass das Feld M als dasjenige eines stationären, bezüglich x gleichförmigen Stromes i, das Feld E als dasjenige einer statischen, bezüglich x gleichförmigen Elektricitätsvertheilung (e auf der Längeneinheit) berechnet wird.

Nach dieser Vorbereitung führen wir den S. 467f. in den Sätzen 1) bis 5) ausgesprochenen Ansatz aus. Derselbe gestattet uns, alle Feldgrössen als Functionen des Stromes i darzustellen, welcher im positiven Leiter zu $+ x$, im negativen zu $- x$ fliesst. Diesen Strom setzen wir als sinusförmige Function der Zeit voraus; d. h. wir nehmen an

$$i = f(x)\, e^{i\nu t}. \tag{70}$$

Die Bestimmung der Function $f(x)$ ist der wesentlichste Theil unserer Aufgabe.

Bezeichnen wir wieder die Randwerthe von E_x auf den beiden Cylindern durch $E_x(+)$ und $E_x(-)$, so ergiebt der Ansatz 5), d. h. das Inductionsgesetz

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mu M_N dS = - V \int\limits_{\circ} E_s ds,$$

angewandt auf das Band $abcd$ (vgl. S. 470 u. 474):

$$P\frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial x} - [E_x(+) - E_x(-)]\cdot$$

Hierin bedeuten, gemäss den Annahmen unter 2) und 3), P und c die gleichen Functionen von i bezw. e, welche in unserem Hülfssatz unter diesen Zeichen verstanden sind. Es

folgt daher nach (69), wenn die Constanten des Isolators ε_0, μ_0 sind:

$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial e}{\partial x} - c\,[E_x(+) - E_x(-)]. \tag{71}$$

Weiter ergiebt der Ansatz 4), d. h. die Continuitätsgleichung

$$\int A_N dS = - \frac{\partial e_i}{\partial t},$$

angewandt auf eine Scheibe des Leiters von der Höhe dx:

$$i_{x+dx} - i_x = - \frac{\partial}{\partial t}(e\,dx)$$

oder

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - \frac{\partial e}{\partial t}. \tag{72}$$

Daher folgt aus (71):

$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - c \frac{\partial}{\partial t}[E_x(+) - E_x(-)]. \tag{73}$$

Nach dem Ansatz 1) aber ist der Werth von E_x für ein bestimmtes x proportional mit dem Werth von i für ebendieses x; also

$$E_x(+) - E_x(-) = \varkappa i, \tag{74}$$

wo der, im allgemeinen complexe, Coefficient $\varkappa$ weder von x noch von t abhängt.

Mittels (70) und (74) wird aus (73):

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \left[- \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2 + \iota c \varkappa \nu \right] i;$$

also

$$i = \text{const.}\, e^{\iota(\nu t + s x)} \tag{75}$$

wo

$$s^2 = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2 - \iota c \varkappa \nu. \tag{76}$$

Der Quotient $\frac{E_z(+) - E_z(-)}{i} = x$ lässt sich (wie jede complexe Grösse) stets in die Form bringen

$$w' + \iota\nu(p' - P),$$

wo w' und $(p' - P)$ reelle Grössen bedeuten, welche aber im allgemeinen keine durch Material und geometrische Anordnung bestimmten Constanten, sondern Functionen von ν sind. Führt man dann noch wieder Pc an Stelle von $\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2}$ ein, so wird (76):

$$s^2 = \nu^2 c p' - \iota \nu c w'. \tag{77}$$

Hierin hat w' allgemein die Eigenschaft [vgl. Kapitel VI § 1, insbesondere Gleichungen (23) und (18)], dass

$$w' \int_0^T i^2 dt$$

die während einer Periode T in der Länge 1 des Doppelleiters entwickelte Joule'sche Wärme ergiebt. Für $\nu = 0$ wird es gleich dem durch die Gleichung

$$w i^2 = J$$

definirten Ohm'schen Widerstand w. Zugleich geht für verschwindendes ν die Grösse p' in den durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} p i^2 = W_m$$

definirten Selbstinductionscoefficienten p der Längeneinheit über (vgl. l. c.). — Man kann daher die Functionen von ν, welche durch w' und p' bezeichnet sind, allgemein „Widerstand" bezw. „Selbstinductionscoefficient" der Längeneinheit für die betreffende Wechselzahl nennen. Der Werth von s^2 erhält dann durch (77) einen einfachen Ausdruck; zur wirklichen Berechnung aber bleibt man auf die Gleichung (76) angewiesen, in welcher c gemäss Ansatz 3) und x gemäss Ansatz 1) zu bestimmen ist.

Wir betrachten zwei Grenzfälle:

1) Es sei ν sehr klein. — Die Grenzwerthe w und p sind von ν unabhängig; daher ergiebt die erste Näherung, welche nur die niedrigste Potenz von ν beibehält:

$$s^2 = -\iota \nu c w$$

oder

$$s = -\sqrt{\frac{\nu c w}{2}} + \iota \sqrt{\frac{\nu c w}{2}}, \tag{78}$$

d. h. alle Feldgrössen haben die Form

$$A e^{-\sqrt{\frac{\nu c w}{2}} \cdot z} \cos\left(\nu t - \sqrt{\frac{\nu c w}{2}} \cdot z + \vartheta\right), \tag{79}$$

wo A und ϑ nur Functionen von x und y sind. Die Ausbreitungsform ist in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz diejenige einer nach $+z$ fortschreitenden Temperaturwelle; als Parameter tritt lediglich das Product cw aus Capacität und Widerstand der Längeneinheit des Doppelleiters auf. Hierin ist

$$w = \frac{1}{\lambda Q} + \frac{1}{\lambda' Q'}, \tag{80}$$

wo λ und λ' die Leitungsvermögen, Q und Q' die Querschnitte der beiden Leiter bezeichnen.

2) Es sei ν sehr gross. — In Kapitel VI, S. 358f. wurde für einen Draht vom Radius r gefunden: wenn $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot r$ gross und $\frac{\delta}{r}$ klein ist, so ist die Feldstärke in einer Tiefe δ unter der Oberfläche genähert:

$$E(\delta) = E(0) \cdot e^{-(1+\iota)\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta}.$$

Gilt dies noch für grosse Werthe von $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta$, so ist $E(\delta)$ durch diesen Ausdruck dargestellt für alle Tiefen, in welchen es überhaupt merkliche Werthe besitzt, also allgemein. Der Ausdruck enthält aber den Radius r nicht. Wir können daher schliessen: Es sei für einen Cylinder von beliebiger

Basis der variable Krümmungsradius durch ϱ bezeichnet; lässt sich dann eine Länge δ angeben, so dass durchweg $\frac{\delta}{\varrho}$ klein, aber gleichwohl $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta$ gross ist, so ist das Feld auf eine dünne Oberflächenschicht beschränkt; es nimmt ringsum gleichmässig nach der Tiefe (h) ab, derart dass überall

$$E(h) = E(0) \cdot e^{-(1+\iota)\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot h}$$

ist.

Ist also die genannte Bedingung für beide Leiter erfüllt, so wird, wenn u und u' die Umfangslinien der beiden Cylinder bezeichnen und weiter λ, μ, $\alpha = \frac{\lambda \mu \nu}{V^2}$ für den einen, λ', μ', $\alpha' = \frac{\lambda' \mu' \nu}{V^2}$ für den anderen Leiter gelten:

$$\frac{E_z(+)}{i} = \frac{E(0)}{\lambda u \int\limits_0^\infty E(h)\, dh} = \frac{(1+\iota)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda u}$$

und ebenso

$$\frac{E_z(-)}{-i} = \frac{E(0)}{\lambda' u' \int\limits_0^\infty E(h)\, dh} = \frac{(1+\iota)\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}}{\lambda' u'}.$$

Also nach (76)

$$s^2 = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2 - \iota \nu c (1+\iota) \left[\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda u} + \frac{\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}}{\lambda' u'} \right],$$

oder

$$s^2 = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2 \left\{ 1 + (1-\iota) \frac{c}{\varepsilon_0} \left[\frac{\frac{\mu}{\mu_0}}{u\sqrt{2\alpha}} + \frac{\frac{\mu'}{\mu_0}}{u'\sqrt{2\alpha'}} \right] \right\} \tag{81}$$

Die Grössen a und a' enthalten ν als Factor; sobald ν so gross ist, dass der Factor von $(1 - \iota)$ sehr klein wird gegen 1, wird genähert:

$$\left.\begin{aligned} s &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2}} \cdot \nu\,[(1+\eta) - \iota\eta] \\ \text{wo} \quad \eta &= \frac{c}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{\mu}{\mu_0}}{u\sqrt{2a}} + \frac{\frac{\mu'}{\mu_0}}{u'\sqrt{2a'}}\right] \text{ sehr klein.} \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

D. h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phasen ist

$$\frac{\omega_0}{1+\eta}$$

und die Amplituden sinken von 1 auf $^1/_e$ auf einer Strecke

$$\frac{1}{p} = \frac{\omega_0}{\nu\eta}.$$

Die Absorptionscoefficienten p wachsen proportional mit $\sqrt{\nu}$ sowohl im Fall 1) wie im Fall 2). Sie wachsen aber auch beim Uebergang von den Schwingungszahlen des Falles 1) zu den Schwingungszahlen des Falles 2). Es ist nämlich

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{\frac{\nu_1 c w}{2}}}{\frac{\nu_2\eta}{\omega_0}}.$$

Das heisst, wenn wir der Einfachheit wegen die beiden Leiter als gleich annehmen:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}\,\frac{\mu_0}{\mu}\,\frac{\varepsilon_0}{c}\,\frac{2u^2}{Q}}.$$

Hierin ist $\frac{\mu_0}{\mu} < 1$, $\frac{\varepsilon_0}{c}$ und $\frac{u^2}{Q}$ sind für jede praktisch mögliche Anordnung Zahlen von mässiger Grösse; $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ aber ist sehr klein. Vgl. die Tabelle S. 462 für den Fall der ebenen Platten.

Es folgt wie dort: ein Feld, das zur Zeit $t = 0$ nur bei $x = 0$ bestand, ist in grossen Entfernungen x_1 vom

Ausgangspunkt proportional mit

$$\sqrt{\frac{cw}{\pi 4t}}\, e^{-\frac{cw}{4t} x_1^2}.$$

Es sendet also ein bei $x = 0$ gegebenes elektrisches Signal nach allen entfernten Punkten x_1 eine wellenartig verlaufende Störung, deren Maximalbetrag zur Zeit

$$t_1 = \frac{cw}{2} x_1^2$$

erreicht wird. Da diese Zeit proportional dem Quadrat der Entfernung ist, so kann eine bestimmte „Geschwindigkeit" für die Ausbreitung des Signals selbst dann nicht angegeben werden, wenn man sie nach dem Eintreffen der Maximalwerthe beurtheilen wollte. Die Zeit aber, nach welcher ein bestimmter Apparat die Ankunft der Welle anzeigt, hängt ausser von der Entfernung und der Constante cw noch von der Empfindlichkeit des Apparats ab.

Wir wollen eine Anwendung auf einen Specialfall machen, der in den Kabeln verwirklicht ist: es sei der mit + bezeichnete Leiter ein Draht vom Radius a, der andere ein coaxialer Hohlcylinder vom inneren Radius b und unendlicher Dicke.

Dann ist [vgl. Kap. VI, (4) (5) (25)]

$$\frac{E_x(+)}{i} = \frac{\iota \mu \nu}{2\pi V^2} \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho \cdot f'(\varrho)} \right)_{\varrho = a},$$

wo $f(\varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} - \iota \alpha f = 0$$

bezeichnet, welche in dem Gebiet $0 \overline{\overline{<}} \varrho \leq a$ endlich ist. $f(\varrho)$ ist demnach bis auf einen constanten Factor die Bessel'sche Function $J_0\,(\sqrt{-\iota\alpha} \cdot \varrho)$. Es wird also [vgl. Kapitel VI (26)]:

$$\frac{E_x(+)}{i} = \frac{\iota \mu \nu}{2\pi V^2} \left(\frac{J_0(y)}{y \cdot J_0'(y)} \right)_{y = \sqrt{-\iota\alpha} \cdot a}. \tag{83a}$$

Ebenso erhält man

$$\frac{E_x(-)}{i} = \frac{\iota\mu'\nu}{2\pi V^2}\left(\frac{F(\varrho)}{\varrho\cdot F'(\varrho)}\right)_{\varrho=b},$$

wo $F(\varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial\varrho} - \iota\alpha' F = 0$$

bezeichnet, welche jedoch für $\varrho > b$ endlich sein und für $\varrho = \infty$ verschwinden muss. $F(\varrho)$ ist demnach bis auf einen constanten Factor die Bessel'sche Function zweiter Art $K_0(\sqrt{-\iota\alpha'}\cdot\varrho)$, und es wird

$$\frac{E_x(-)}{i} = \frac{\iota\mu'\nu}{2\pi V^2}\left(\frac{K_0(x)}{x\cdot K_0'(x)}\right)_{x=\sqrt{-\iota\alpha'}\cdot b}. \tag{83b}$$

Aus (83a, b) ergiebt sich der Coefficient $\varkappa$ der Gleichung (74). Es ist ferner nach Kapitel I, S. 70 die Capacität

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\lg b/a}.$$

Also ergiebt (76):

$$\left.\begin{aligned} s^2 &= \frac{\varepsilon_0\mu_0}{V^2}\nu^2 \\ &+ \frac{\varepsilon_0\nu^2}{V^2\lg b/a}\left[\frac{\mu}{a\sqrt{-\iota\alpha}}\cdot\frac{J_0(y)}{J_0'(y)} - \frac{\mu'}{b\sqrt{-\iota\alpha'}}\cdot\frac{K_0(x)}{K_0'(x)}\right] \\ \text{wo}\quad y &= a\sqrt{-\iota\alpha},\qquad x = b\sqrt{-\iota\alpha'}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Zu derselben Gleichung gelangt J. J. Thomson,*) indem er zunächst die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen und Grenzbedingungen ansetzt, dann aber in der Eliminationsgleichung [l. c. (15)], aus welcher $s^2 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{V^2}\nu^2$ (dort durch k^2 bezeichnet) berechnet werden soll, erstens $\frac{s^2}{\alpha}$ und $\frac{s^2}{\alpha'}$, zweitens ak und bk als sehr klein voraussetzt. Das ist genau das

*) Recent Researches etc., Oxford 1893, § 262, Gleichung (17).

gleiche Verfahren, welches wir im Fall der ebenen Platten eingeschlagen haben [vgl. (β) bezw. (γ) S. 458]. In vollständiger Analogie zu dem dort geforderten muss also die Gleichung (84) in jedem Fall nachträglich dadurch legitimirt werden, dass für die mittels (84) berechneten Werthe von s^2 und $s^2 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2$ die gemachten Voraussetzungen thatsächlich zutreffen. [Die Bedingung (α) des früheren Falles hat in dem jetzigen Fall keine neue Bedingung als Analogon; was dort durch (α) gefordert wurde, — dass eine Strahlungsquelle sich nur zwischen den Leitern befinde, — ist hier bereits dadurch erfüllt, dass J_0 endlich ist für $\varrho = 0$, und K_0 verschwindet für $\varrho = \infty$.]

Die vollständige Discussion der Gleichung (84) setzt voraus, dass die Quotienten $\frac{J_0}{J_0'}$ und $\frac{K_0}{K_0'}$ für alle Werthe ihrer complexen Argumente in praktisch brauchbarer Weise dargestellt werden. Es sei hierfür auf das citirte Werk verwiesen. — Wir wollen lediglich die beiden Grenzfälle betrachten, dass ν entweder sehr klein oder sehr gross ist. Für diese Fälle besitzen die Functionen J_0 und K_0 Näherungswerthe von einfachem Ausdruck; wir erhalten aber das Resultat am einfachsten aus den allgemeinen Ausdrücken in (79) (80), bezw. (82):

1) ν sei sehr klein. Q' ist unendlich, $w = \frac{1}{\lambda \pi a^2}$. Also wird cw proportional mit $\frac{\varepsilon_0}{\lambda}$. Für eine möglichst ungeschwächte Ausbreitung langsamer Schwingungen — und ebenso für eine möglichst ungeschwächte Fortpflanzung beliebiger Impulse auf grosse Entfernungen — ist also eine kleine Dielektricitätsconstante der Isolirschicht eben so wichtig, wie grosses Leitungsvermögen des Metallkerns.

2) ν sei sehr gross. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist sehr nahe $\omega_0 = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, wo ε_0 und μ_0 die Constanten der Isolirschicht bedeuten. Der Absorptionscoefficient ist $\frac{\nu \eta}{\omega_0}$, wo

$$\eta = \frac{1}{2\lg\frac{b}{a}}\left[\frac{\frac{\mu}{\mu_0}}{a\sqrt{2\alpha}} + \frac{\frac{\mu'}{\mu_0}}{b\sqrt{2\alpha'}}\right]$$

$$= \frac{V}{\mu_0\sqrt{8}\lg\frac{b}{a}}\left[\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\mu'}{\lambda'}}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Da das λ' des Meerwassers sehr klein ist gegen das λ des Metallkerns, so wird der Werth von η durch das zweite Glied entschieden; das Material des Kerns ist ebenso unwesentlich, wie das der Isolirschicht.

Ein zweiter Specialfall: Bei der Untersuchung sehr schneller Schwingungen ist wesentlich ein System von zwei gleichen parallelen Drähten in einem gegen den Radius grossen Abstand benutzt worden. Es sei der Radius a, der Abstand d; dann ist (s. Kap. I, S. 74)

$$c = \frac{\pi\varepsilon_0}{\lg\frac{d}{a}},$$

und es gilt folglich (82) mit dem Werth

$$\eta = \frac{\frac{\mu}{\mu_0}}{\lg\frac{d}{a}\cdot 2a\sqrt{2\alpha}}.$$

Es handelt sich noch darum, allgemein zu untersuchen, wann der S. 467f. formulirte Ansatz, der uns zu der Gleichung (76) geführt hat, eine Näherung liefert für die strenge Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Was zunächst das Innere der Leiter betrifft, so ist die Annahme 1) der „quasistationären Strömung“ berechtigt, sobald $\iota\alpha$ an Stelle von $s^2 + \iota\alpha$ gesetzt werden darf. Es muss also Mod $\left(\frac{s^2}{\alpha}\right)$ eine kleine Zahl sein. Dies kann an dem aus (76) berechneten Werth von s^2 controlirt werden, und wird für praktisch realisirbare Fälle stets zutreffen [vgl. (β_1) (β_2) S. 460 und c) S. 487].

Die Annahme 1) erweise sich als berechtigt, und gemäss diesem Ansatz sei das Feld im Leiter bestimmt; dann kennt man auch die tangentialen Componenten der Feldgrössen an der Grenze gegen den Isolator. Das Feld im Isolator ist dann bestimmt durch diese Grenzwerthe und durch die im Isolator geltenden Differentialgleichungen. Um die letzteren entsprechend der Maxwell'schen Theorie zu bilden für eine nach z fortschreitende Sinuswelle, in welcher M normal zu z ist, setzen wir in (J'') (K'')

$$\lambda = 0, \quad M_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \iota\nu, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \iota s.$$

Wir erhalten so:

$$\left.\begin{array}{ll}
\iota\nu\mu M_x = - V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \iota s E_y\right) & \varepsilon\nu E_x = - V s M_y \\
\iota\nu\mu M_y = - V\left(\iota s E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) & \varepsilon\nu E_y = V s M_x \\
0 = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} & \varepsilon\iota\nu E_z = V\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)
\end{array}\right\} \quad (85)$$

In unserem Näherungsansatz spielt die Componente E_z im Isolator keine Rolle; eliminiren wir daher E_z mit Hülfe der letzten Gleichung, so ergiebt sich für die übrigen vier Componenten das folgende, mit (85) vollkommen äquivalente Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \\
- V s M_y = \varepsilon\nu E_x \\
V s M_x = \varepsilon\nu E_y \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = n^2\varphi, \\
\text{wo} \quad n^2 = s^2 - \frac{\varepsilon\mu}{V^2}\nu^2, \\
\text{und } \varphi \text{ eine beliebige der Grössen } M_x\, M_y\, E_x\, E_y.
\end{array}\right\} \text{Streng.}$$

Diesen streng gültigen Gleichungen stellen wir die Ausgangsgleichungen unserer Näherung gegenüber. Es wurde angenommen [s. den „Hülfssatz“ und Gleichung (72)]:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

$$M_x = -\frac{i\varepsilon}{Ve} E_y \qquad M_y = +\frac{i\varepsilon}{Ve} E_x$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{oder} \quad si = -ve.$$

Hiermit gleichwerthig ist das folgende System:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \\ -Vs\, M_y &= \varepsilon\, v\, E_x \\ Vs\, M_x &= \varepsilon\, v\, E_y \\ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned}\right\} \text{Genähert.}$$

wo φ_0 eine beliebige der Grössen $M_x\, M_y\, E_x\, E_y$.

Unsere Lösung ist daher eine Näherung, wenn φ_0 ein genäherter Werth von φ ist. Der Geltungsbereich der Diffentialgleichung für φ ist der Theil der xy-Ebene, welcher durch die Umfangslinien von $\overset{+}{S}$ und $\overset{-}{S}$ begrenzt wird. An $\overset{+}{S}$ und $\overset{-}{S}$ sind die Werthe von φ gegeben. n ist von den Dimensionen einer reciproken Länge. Bezeichnet man also durch L die grösste der linearen Abmessungen, welche Form und Lage von $\overset{+}{S}$ und $\overset{-}{S}$ definiren; dann muss φ_0 eine Näherung für φ sein, wenn Mod (Ln) eine kleine Zahl ist. (Damit ist freilich nichts ausgesagt über den Grad der Annäherung; um diesen beurtheilen zu können, müsste man wissen, wie die Lösung φ von dem Parameter n abhängt bei verschwindenden Werthen des letzteren.) Im Specialfall der ebenen Platten hat sich dieser Satz thatsächlich als richtig ergeben für $L = k$, im Fall des Kabels für $L = b$; im Fall der gleichen, weit entfernten Drähte muss er gelten für $L = d$.

Für die letztere Anordnung und unter Voraussetzung sehr schneller, merklich ohne Absorption mit der Geschwin-

digkeit ω_0 fortschreitender Schwingungen mögen die Bedingungen nochmals zusammengestellt werden:

Aus (76) folgt (82), wenn

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot a \quad \text{sehr gross ist.} \tag{a}$$

Aus (82) ergiebt sich sehr nahe: $s = -\frac{\nu}{\omega_0}$, wenn

$$\eta = \frac{\frac{\mu}{\mu_0}}{\lg\frac{d}{a} \cdot 2a\sqrt{2\alpha}} \quad \text{sehr klein ist,} \tag{b}$$

Der Ansatz (76) aber war berechtigt, wenn

$$\frac{s^2}{\alpha} = \frac{\nu^2}{\omega_0{}^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{\mu} q \quad \text{klein, und} \tag{c}$$

$$\text{Mod}\left(s^2 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{V^2} \nu^2\right) \cdot d^2 = \frac{2\nu c\sqrt{\alpha}}{\lambda 2\pi a} \cdot d^2 = q\sqrt{\alpha}\, \frac{d^2}{a \lg\frac{d}{a}} \quad \text{klein ist.} \tag{d}$$

Es handle sich um das Intervall der zu Messungen benutzten Hertz'schen Schwingungen; d. h. es liege

$$\nu \text{ zwischen } \pi\, 10^8 \text{ und } \pi\, 10^{10} \text{ sec}^{-1}.$$

(c) ist dann stets erfüllt (vgl. Tabelle S. 452); (a) ist selbst für die langsamsten dieser Schwingungen erfüllt, sobald a nicht kleiner als ein Millimeter ist; a fortiori ist dann für Kupferdrähte (b) erfüllt; endlich (d) wird befriedigt selbst für die schnellsten dieser Schwingungen, solange

$$10^{-4}\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}\, \frac{d^2}{a \lg\frac{d}{a}}} \quad \text{klein ist gegen 1 cm.}$$

Handelt es sich um Kupferdrähte von 1 mm Radius, so ist die Bedingung noch für einen Abstand von etwa 10 cm erfüllt. —

§ 4. Oscillatorische Entladung eines Condensators.

Den Verlauf der Entladung eines Condensators durch einen beliebig geformten Stromkreis haben wir in Kapitel V § 3 berechnet. Wir machten dort die Annahme, dass die Phase des Stromes in jedem Moment für den ganzen Stromkreis die gleiche sei, und dass die Strömung den Querschnitt des Leiters gleichmässig erfülle. Beide Annahmen können, wie wir jetzt wissen, selbst im günstigsten Fall nur näherungsweise erfüllt sein. Wir nehmen daher die Aufgabe nochmals vor; über die Vertheilung des Stromes im Leiter setzen wir jetzt nichts voraus, über die Form des Stromkreises aber machen wir eine bestimmte Annahme, welche uns gestattet, die Ergebnisse des vorigen § zu benutzen.

Der nach $+x$ fortschreitenden Welle, welche in § 3 behandelt wurde, superponiren wir eine zweite, nach $-x$ fortschreitende. Der Gesammtstrom i stellt sich dann dar in der Form

$$i = ae^{\iota(\nu t + sx)} + be^{\iota(\nu t - sx)} \tag{86}$$

und durch dieses i lassen sich sämmtliche Grössen des Feldes ausdrücken.

Würden die beiden parallelen Cylinder — wir denken uns im folgenden Drähte — wie bisher als beiderseits unbegrenzt angenommen, so wäre in dem Ausdruck (86) die Voraussetzung enthalten, dass sich nunmehr bei $x = -\infty$ und bei $x = +\infty$ Strahlungsquellen befinden. Diese Annahme soll jetzt aber nicht mehr gemacht werden; die Gleichung soll vielmehr nur gelten für ein bestimmtes Intervall der x. Die Aufgabe muss dann zu einer bestimmten gemacht werden durch gewisse Vorschriften für die Grenzen $x = 0$ und $x = L$ dieses Intervalls.

Bei $x = L$ sollen die Drähte an den Belegungen eines „Condensators“ endigen. Derselbe sei etwa gebildet aus zwei kreisförmigen Platten in kleinem Abstand. Befände sich der Condensator allein im Felde, so wäre dieses nothwendig symmetrisch um die Mittelaxe x der beiden Platten, und es wäre wesentlich concentrirt in dem engen Zwischenraume der Platten. Ein Feld von der verlangten Symmetrie, welches in

diesem Gebiet den Maxwell'schen Gleichungen und zugleich der Forderung genügt, dass die elektrischen Kraftlinien normal an den Leiteroberflächen münden, ist durch die folgenden Formeln gegeben (vgl. Kap. VI, § 1, wo es sich um das Feld in einem Leiter handelt):

Es bezeichne ϱ den normalen Abstand von der Mittelaxe; ε_0, μ_0 seien die Constanten des Dielektricums. Dann ist E überall parallel zu x, M überall normal zu x und zu ϱ, und beide sind durch die Gleichungen verknüpft:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \varrho &= V \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho M) \\ \mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} &= V \frac{\partial E}{\partial \varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Sollen nun die Feldgrössen proportional mit $e^{\iota\nu t}$ sein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} E &= \quad A \cdot f(\varrho)\, e^{\iota\nu t} \\ M &= -\iota A \frac{V}{\mu_0 \nu} \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} e^{\iota\nu t} \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\nu^2}{\omega_0^2} f = 0, \\ f \text{ endlich für } \varrho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Es ist

$$f(\varrho) = J_0 \left(\frac{\nu \varrho}{\omega_0}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\nu}{\omega_0}\varrho\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{\nu}{\omega_0}\varrho\right)^4}{64} - \cdot + \cdot\cdot$$

Solange also $\frac{\nu \varrho}{\omega_0}$ sehr klein ist, ist merklich $E = A e^{\iota\nu t}$ unabhängig vom Ort, und der Maximalwerth von $\mu_0 M^2$ steht zum Maximalwerth von $\varepsilon_0 E^2$ im Verhältniss $\left(\frac{\nu \varrho}{2\,\omega_0}\right)^2 : 1$. Das heisst: in diesem Gebiet ist das elektrische Feld nahezu das gleiche, wie wenn es bei gleicher Gesammt-Elektricitätsmenge der Platten statisch wäre, — und die magnetische Energie verschwindet gegenüber der elektrischen. Ist demnach r der Plattenradius und $\frac{\nu r}{\omega_0}$ sehr klein, so gilt dies für das ganze

Gebiet, welches wesentlich in Betracht kommt. — Das gleiche wird für einen Condensator von beliebiger Form gelten, solange die linearen Abmessungen seiner Oberflächen klein sind gegen $\frac{\omega_0}{v}$. Wir wollen diese Bedingung im folgenden als erfüllt voraussetzen und mit C die elektrostatische Capacität des Condensators bezeichnen. Dann ist, wenn P die elektrische Ladung der positiven Platte und l einen beliebigen Weg von der positiven zur negativen Platte bezeichnet,

$$P = C \cdot \int_{+}^{-} E_l dl. \tag{90}$$

Grenzen wir innerhalb des Kreisplattencondensators einen Kreiscylinder ab, dessen Axe die Mittelnormale bildet, heisse S seine Grundfläche, ϱ sein Radius. Die Energie, welche in der Zeiteinheit in ihn einströmt, ist

$$\mathfrak{Q}' = V \cdot 2\pi\varrho \cdot M \cdot \int_{+}^{-} E\, dx.$$

Das Integral hat einen (praktisch) von ϱ unabhängigen Werth $= \frac{P}{C}$, und weiter ist nach (87):

$$V\, 2\pi\varrho M = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\varrho} \varepsilon_0 E\, 2\pi\varrho\, d\varrho = \frac{\partial P'}{\partial t},$$

wenn P' die Ladung auf der Fläche S bezeichnet; also ist

$$\mathfrak{Q}' = \frac{P}{C} \cdot \frac{\partial P'}{\partial t}.$$

Für den ganzen Condensator wird $P' = P$, und $\mathfrak{Q}'$ wird

$$\mathfrak{Q} = \frac{P}{C} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{91}$$

Indem andererseits ϱ gegen 0 abnimmt, geht auch $\mathfrak{Q}'$ gegen Null. Die Strahlung besitzt also in der Mittelaxe des Condensators eine Knotenlinie, an der sie ab- und zufluthet, die sie aber

nicht durchsetzt. — Entsprechendes wird für einen Condensator von anderer Form gelten. —

Das soeben behandelte Condensatorgebiet soll nun an das zuvor behandelte Gebiet der parallelen Drähte grenzen, indem die Drahtquerschnitte bei $z = L$ zugleich auf den Condensatorplatten liegen. Die Maxwell'sche Theorie fordert, dass an der Trennungsfläche beider Gebiete die tangentialen Componenten von E und M stetig in einander übergehen; oder auch gleichwerthig (vgl. S. 372 f.): dass 1) E_S und 2) $A_N + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N)$ an der Grenze stetig seien. — Es ist aber geometrisch unmöglich, dass die Symmetrieverhältnisse, welche für das Drahtsystem einerseits, für das Condensatorgebiet andererseits vorausgesetzt wurden, bis zu einer gemeinsamen Grenzfläche gelten. Wir ersetzen daher die strengen Grenzbedingungen durch die folgenden:

1) es soll das Integral $\int_{+}^{-} E_s\, ds \left(= \frac{e}{c}\right)$, gebildet für den Querschnitt $z = L$ des Drahtsystems, identisch sein mit dem Integral $\int_{+}^{-} E_l\, dl \left(= \frac{P}{C}\right)$, gebildet für den Condensator; und

2) es soll die „Continuität der Elektricität" gewahrt werden bei $z = L$ für den Gesammtstrom im Drahtquerschnitt.

Wir fordern also für $z = L$:

$$\frac{e}{c} = \frac{P}{C} \tag{92}$$

und

$$i = \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{93}$$

Die Maxwell'schen Grenzbedingungen haben zur Folge, dass die Strahlung durch jedes Element der Grenzfläche stetig (ohne Energieanhäufung) hindurchgeht. Unsere Bedingungen bewirken dasselbe wenigstens für die Gesammtenergie, welche aus dem einen Gebiet austritt und in das

andere eintritt. In der That: durch eine unendliche zu x normale Ebene tritt in der Zeit 1 hindurch

$$\Omega_1 = V \int E_S M_S \sin (E_S M_S)\, dS.$$

Da in den Drähten $E_S = 0$ ist, und im Luftraum $E_S \perp M_S$, so kann man setzen

$$dS = ds \cdot dl, \quad \text{wo } ds \text{ parallel } E_S \text{ und } dl \text{ parallel } M_S;$$

es wird daher

$$\Omega_1 = V \int_{+}^{-} E_s\, ds \int_{\circlearrowleft} M_l\, dl.$$

Hierin bedeutet s einen Weg von der Oberfläche des positiven zur Oberfläche des negativen Drahts und l eine Curve, welche den positiven Draht umzingelt. Es ist

$$V \int_{\circlearrowleft} M_l\, dl = i, \text{ unabhängig von } s,$$

und

$$\int_{+}^{-} E_s\, ds = \frac{e}{c}.$$

Also

$$\Omega_1 = \frac{e}{c} i. \tag{94}$$

Die Gleichungen (91) bis (94) ergeben für $x = L$:

$$\Omega_1 = \Omega. \text{ —}$$

Da allgemein die Gleichung (72) gilt:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - \frac{\partial e}{\partial t},$$

so folgt aus (92) und (93):

$$\text{für } x = L \qquad i = - \frac{C}{c} \frac{\partial i}{\partial x}. \tag{95}$$

Das ist die Bedingung für das eine Ende des Drahtsystems. Eine weitere Bedingung muss (s. S. 488) für das andere Ende aufgestellt werden. Wir fordern:

$$\text{für } x = 0 \qquad \frac{\partial i}{\partial x} = 0 \,. \tag{96}$$

Dies bedingt: $e = 0$ oder $\int\limits_{+}^{-} E_s\, ds = 0$. Die Forderung kann annähernd erfüllt werden durch eine metallische Querverbindung der Drähte bei $x = 0$. Eine Folge ist nach (94), dass durch die Ebene $x = 0$ keine Energie hindurchtritt.

Da die Energieströmung andererseits auch im Centrum des Condensators eine Knotenlinie besitzt, bei $x = L$ aber aus dem Gebiet der Paralleldrähte in das Condensatorgebiet vollständig übertritt, so würde also unser Gesammtsystem — parallele Drähte von der Länge L mit angefügtem Condensator — ohne Energieaustausch mit seiner Umgebung für sich bestehen. Mit anderen Worten: wenn wir elektromagnetische Schwingungen finden, welche den von uns geforderten Bedingungen entsprechen, so sind dies Eigenschwingungen des Systems, welche weder von aussen unterhalten zu werden brauchen, noch nach aussen Energie abgeben. Wir fragen nach der Periode dieser Eigenschwingungen.

Führt man die Bedingungen (95) und (96) in den Ausdruck (86) ein, so folgt

$$i = a\,[e^{\iota(\nu t + s x)} + e^{\iota(\nu t - s x)}]$$

und

$$e^{\iota s L} + e^{-\iota s L} = -\frac{C}{c}\,\iota s\,[e^{\iota s L} - e^{-\iota s L}]. \tag{97}$$

Andererseits ist nach (76) und (74)

$$s^2 = \frac{\nu^2}{\omega_0^{\,2}} - \iota\nu c\,\frac{E_x(+) - E_x(-)}{i}$$

[oder in anderer Bezeichnung nach (77)

$$s^2 = -\iota\nu c\,(w' + \iota\nu p').]$$

Der Bruch $\frac{E_x(+) - E_x(-)}{i}$ [oder auch der Factor $w' + \iota \nu p'$] ist eine Function von ν, welche man wenigstens näherungsweise bestimmen kann. Man könnte also aus (97) s berechnen und dann aus (76) (74) ν durch successive Annäherung finden. Aber ν muss sich nothwendig als complexe Grösse ergeben; mit anderen Worten: unser Ansatz kann nicht einfach harmonische, sondern nur gedämpfte Schwingungen gestatten. (Das ist physikalisch sofort klar: unser System nimmt von aussen keine Energie auf; es consumirt aber Energie als Joule'sche Wärme; seine Energie muss somit dauernd abnehmen.) Dadurch wird das Rechnungsverfahren sehr verwickelt.*) Wir beschränken uns auf die Betrachtung zweier Specialfälle.

Erstens wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die einfache Behandlung des Kapitel V zulässig ist, und zwar für den Fall der oscillatorischen Entladung. Wir fordern also (vgl. S. 332, wo w und p sich auf den ganzen Stromkreis beziehen): unser jetziger Ansatz soll als Näherung ergeben

$$i = Ae^{-\beta t} \cos(\gamma t + \delta),$$

wo A und δ willkürliche Constanten,

$$\beta = \frac{w}{2p}, \qquad \beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{C \cdot Lp},$$

w und p Widerstand und Selbstinductionscoefficient der Längeneinheit des Doppeldrahts, berechnet für stationären Strom, d. h. für eine über den Querschnitt gleichförmig vertheilte Strömung. — Hiermit wird zunächst gleiche Phase im ganzen Stromkreise gefordert:

$$i = Be^{\iota \nu t}.$$

Damit x aus dem Ausdruck für i S. 493 verschwinde, muss sL sehr klein sein. Setzen wir aber sL als sehr klein voraus, so giebt (97):

*) Es sei verwiesen auf die Behandlung eines ähnlichen Falles bei J. J. Thomson, l. c. S. 328 ff.

$$s^2 = \frac{c}{CL};$$

also ist die erste Bedingung:

$$\frac{cL}{C} \text{ klein,} \tag{a}$$

d. h. die Gesammtcapacität des Drahtsystems muss klein sein gegen die Capacität des Condensators. — Mit dem vorstehenden Werth von s erhalten wir weiter aus (77):

$$\nu^2 p' - \iota \nu w' = \frac{1}{CL}.$$

Aus dieser Gleichung soll sich nach unserer Forderung ergeben:

$$\nu = \iota\beta + \gamma. \tag{98}$$

Es erhält ν thatsächlich diesen Werth, wenn

$$w' = w, \quad p' = p \tag{99}$$

und

$$\frac{4p}{CLw^2} > 1. \tag{b}$$

Die Ungleichung (b) stellt direct eine zweite Bedingung dar, welche in unserer Forderung enthalten ist. Die in (99) ausgesprochene Forderung stationärer Stromvertheilung ist annähernd erfüllt, (vgl. S. 358 f.), wenn

$$\text{Mod}\,(a^2\alpha) = \text{Mod}\left(a^2\frac{\lambda\mu\nu}{V^2}\right) \text{ klein}$$

ist, wo a den Drahtradius bezeichnet. Gleichung (98) aber ergiebt:

$$\text{Mod}\,(\nu^2) = \beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{CLp}.$$

Also ist die dritte Bedingung:

$$\frac{a^2\lambda\mu}{V^2\sqrt{CLp}} \text{ klein.} \tag{c}$$

Hier ist für zwei Drähte in dem gegen a grossen Abstand d [vgl. Kap. IV, (63) und Kap. I, S. 74]:

$$p = \frac{1}{4\pi V^2}\left(\mu + \mu_0\, 4 \lg \frac{d}{a}\right)$$

und

$$c = \frac{\pi \varepsilon_0}{\lg \frac{d}{a}}.$$

Zweitens wollen wir den Grenzfall betrachten, wo die Wellen ohne merkliche Absorption mit der Geschwindigkeit ω_0 an den Drähten entlang gleiten. Wir setzen also voraus [vgl. (82)], dass (76) übergeht in

$$s^2 = \frac{\nu^2}{\omega_0{}^2} \tag{100}$$

und dass s und ν reell sind. Dann ergiebt (97):

$$s \operatorname{tg}(sL) = \frac{c}{C},$$

also

$$\frac{\nu L}{\omega_0} \operatorname{tg}\left(\frac{\nu L}{\omega_0}\right) = \frac{cL}{C}. \tag{101}$$

Aus (101) erhält man für ν eine unendliche Zahl von Wurzeln. Die Werthe $\frac{\nu}{\pi}$ sind die Wechselzahlen, die Werthe $\omega_0 \frac{\pi}{\nu}$ die Halbwellenlängen für die „Grundschwingung“ und die „Oberschwingungen“ des Systems.

α) Ist $\frac{cL}{C}$ eine sehr kleine Zahl, d. h. die Gesammt-Capacität des Drahtsystems klein gegen die Capacität des Condensators, so wird

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\nu L}{\omega_0} = k\pi + \delta, \text{ wo } k \text{ eine ganze Zahl und } \delta \text{ sehr klein;}\\ &(k\pi + \delta)\delta = \frac{cL}{C}. \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Der Werth $k = 0$ ergiebt:

$$\left(\frac{\nu L}{\omega_0}\right)^2 = \frac{cL}{C}$$

oder, wenn man beachtet, dass nach (69)

$$cP = \frac{1}{\omega_0^2} \text{ ist:}$$

$$\nu^2 = \frac{1}{LP \cdot C}, \tag{102a}$$

wo LP der Selbstinductionscoefficient des gesammten Drahtsystems. Der Strom ist, da sL klein, nahezu von gleicher Phase im ganzen Draht, und thatsächlich sind wir in (102a) auf den Ausdruck in Kapitel V (34,b) (für verschwindende Dämpfung) zurückgekommen; nur hat LP hier denjenigen Werth, welcher einer Oberflächen-Strömung entspricht.

Für $k \neq 0$ folgt genähert:

$$k\pi \left(\frac{\nu L}{\omega_0} - k\pi\right) = \frac{cL}{C},$$

also Werthe von $\frac{\nu}{\pi}$, welche mit steigender Ordnungszahl k immer genauer

$$\frac{\nu L}{\omega_0} = k\pi \tag{102b}$$

ergeben. Durch (102b) sind diejenigen Wechselzahlen definirt, für welche die Drahtlänge L gleich einer ganzen Zahl von Halbwellenlängen ist. —

β) Ist $\frac{cL}{C}$ eine sehr grosse Zahl, so wird genähert

$$\frac{\nu L}{\omega_0} = \frac{2k+1}{2}\pi; \tag{103}$$

d. h. die Wechselzahlen sind nahezu diejenigen, welche L zu einer ungeraden Anzahl von Viertelwellenlängen machen.

An jedem aus (101) [speciell aus (102) oder (103)] berechneten Werth von ν ist wiederum nachträglich zu verificiren, dass die Voraussetzungen der Rechnung erfüllt werden. Diese sind für zwei Drähte vom Radius a im Abstand d S. 487 zusammengestellt.

§ 5. Vergleich mit der Erfahrung. — Elektromagnetische Theorie des Lichts.

Die experimentellen Untersuchungen auf dem in Kapitel VII behandelten Gebiet beschränken sich bis zum Jahre 1887 auf das, was man „Fortpflanzung der Elektricität in Drähten“ zu nennen pflegte. Sie sind angestellt mittels Anordnungen — oberirdische und unterirdische Telegraphenleitungen, Seekabel etc. — welche den in § 3 behandelten gleich oder ähnlich waren. Bei den älteren Arbeiten war das Ziel der Untersuchung die numerische Bestimmung der „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ elektrischer Signale; dass eine solche existire, dass also die Zeit dem Wege proportional sei, wurde von vorn herein angenommen. Wir haben gesehen, dass dies nur in einem Grenzfall zutrifft, — dass in einem anderen Grenzfall die Zeit dem Quadrat des Weges proportional ist. Versuche, bei denen das letztere Gesetz nach der Theorie zutreffen musste und thatsächlich zutraf, sind von Hagenbach angestellt worden.*)

Versuche dieser Art können — auch wenn die experimentellen Daten eine vollständige theoretische Behandlung gestatten, was bei der Mehrzahl der ausgeführten Untersuchungen nicht der Fall ist — zur Prüfung der Maxwell'schen Theorie nicht dienen. Denn, wie wir in § 3 gesehen haben, sind, sobald es sich um metallische Leiter in Luft und um realisirbare Grössenverhältnisse handelt, die Abweichungen des Feldes vom „quasistationären“ Zustand, und somit diejenigen Glieder der elektrodynamischen Grundgleichungen, welche die älteren Theorien von einander und von der Maxwell'schen Theorie unterscheiden, ohne messbaren Einfluss. Thatsächlich sind auch die Gesetze der Ausbreitung elektrischer Wellen und Impulse in Drähten bereits auf dem Boden der älteren Theorie übereinstimmend mit den von uns aufgestellten Gesetzen gefunden worden.**)

---

*) Hagenbach, Wied. Ann. 29, S. 377. Dort findet man auch eine Zusammenstellung der früheren experimentellen und theoretischen Untersuchungen.

**) s. die Literatur l. c., besonders Kirchhoff, Ges. Abhandlungen, S. 131, 154.

Charakteristisch für die Maxwell'sche Theorie ist die Rolle, welche in ihr der wechselnden elektrischen Polarisation des Isolators zugeschrieben wird. Die Entscheidung zu ihren Gunsten musste durch den Nachweis herbeigeführt werden, dass sich das elektromagnetische Feld im Isolator in der von Maxwell vorausgesagten Weise ausbreitet. Dieser Nachweis ist von Hertz in den Jahren 1887 und 1888 erbracht worden.*)

Die zu beweisende Fundamentalthese war: elektromagnetische Störungen breiten sich in der Luft mit endlicher Geschwindigkeit aus. Der von der Theorie vorausgesagte Werth dieser Geschwindigkeit war aber 300 000 Kilometer in der Secunde, und eine Ausbreitung in merklicher Stärke war nur auf Entfernungen von wenigen Metern zu erwarten. Die zu verificirende Geschwindigkeit konnte man daher von einer unendlichen nur unterscheiden, indem man zeitlich sehr scharf begrenzte Vorgänge beobachtete. Für periodische Störungen lautet die Forderung: während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ beträgt, müssen doch wesentlich verschiedene Schwingungszustände in dem Intervall weniger Meter vorhanden sein, d. h. darf die Wellenlänge höchstens einige Meter betragen. Daraus folgt: es müssen mindestens etwa hundert Millionen Schwingungen in der Secunde stattfinden.

Erzeugt wurden diese sehr schnell wechselnden Felder durch die oscillatorische Entladung eines zu hoher Potentialdifferenz geladenen Condensators. Die Entladung findet statt in einer durch eine kleine Luftstrecke unterbrochenen metallischen Leitungsbahn. Ein an der Unterbrechungsstelle überspringender Funke leitet sie mit äusserster Plötzlichkeit ein.

Die Analyse der Ausbreitung dieser Schwingungen gelang Hertz durch die Beobachtung kleiner Fünkchen, welche zwischen zwei sehr nahen Enden eines fast geschlossenen Leiterkreises übersprangen, und dadurch die Existenz eines elektrischen Feldes im Luftzwischenraum verriethen.

*) Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft.

Die unmittelbar entscheidenden Versuche von Hertz betreffen die Ausbreitung der Wellen im freien Luftraum.

Die weitere Untersuchung der Erscheinungen im einzelnen betreffend, haben wir zweierlei zu bemerken.

Erstens: die genauere Kenntniss der quantitativen Verhältnisse verdanken wir Beobachtungen, die von Hertz und seinen Nachfolgern über die Ausbreitung längs zwei parallelen Metalldrähten angestellt wurden. Gegen die Beweiskraft dieser letzteren Beobachtungen würde, wenn sie für sich allein daständen, der oben erwähnte Einwand zu erheben sein. Sie sind aber experimentell an die Versuche über freie Ausbreitung angeschlossen worden (s. unten unter 4). Nachdem dies geschehen, konnten die leitenden Drähte benutzt werden, um das Feld zu concentriren, die Wirkungen zu verstärken, die Messungen zu verfeinern.

Zweitens: die experimentelle Prüfung betrifft im allgemeinen direct das elektrische Feld in Isolatoren, die elektrische Strömung in Leitern, — und nur, soweit die theoretische Verknüpfung zwischen diesen Grössen und dem magnetischen Feld als sicher gelten kann, auch das letztere. Aber wenigstens in einem Fall ist auch das magnetische Feld direct untersucht und seine Beziehung zum elektrischen Feld der Theorie entsprechend gefunden worden (Hertz, l. c. S. 199 ff.).

Als Mittel zum Nachweis und zur Messung der Strömung fallen die Instrumente ausser Betracht, welche gegenüber stationären Strömen die grösste Bedeutung haben: Galvanometer und Elektrodynamometer. Schon aus den Entwicklungen in Kapitel V, S. 315 f. folgt, dass in einem Stromkreise mit merklicher Selbstinduction die Stromstärke bei gegebener elektromotorischer Kraft unbegrenzt sinkt mit wachsender Wechselzahl. Dort war gleiche Phase im ganzen Stromkreise vorausgesetzt; wird die Wechselzahl so hoch, dass dies nicht mehr gilt, so wird der Strom in eine eng gewundene Spirale nicht mehr merklich eindringen.

Zur Ausmessung der „Drahtwellen“ haben wesentlich gedient:

ein Elektrometer von kleiner Capacität (in einer Schaltung, welche die Ausschläge von der Richtung des Feldes unabhängig macht); —

ein „Bolometer“: die in dünnen Metalldrähten erzeugte Joule'sche Wärme wird durch die Widerstandsänderung der Drähte gemessen; —

ein Thermoelement: die Stromwärme wird durch die erzeugte thermo-elektromotorische Kraft gemessen.

Endlich hat sich als ausserordentlich empfindlich erwiesen eine Widerstandsänderung, welche Metallpulver durch die Bestrahlung mit elektromagnetischen Wellen erfahren. —

Wir stellen nunmehr die wichtigsten Versuchsergebnisse zusammen:

1) Eine periodische elektromagnetische Störung breitet sich im freien Luftraum mit endlicher Geschwindigkeit aus; sie erzeugt also eine mit endlicher Geschwindigkeit fortschreitende Welle, die in genügender Entfernung vom Erregungscentrum in mässiger Ausdehnung als eben betrachtet werden kann. Der einfachste Nachweis besteht im folgenden: wenn die Welle, von *a* ausgehend, bei *b* auf eine Metallwand trifft, so entsteht eine reflectirte Welle. Beide Wellen haben (s. Fig. 51) in dem Gebiet *ab* entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtung und erzeugen zusammen eine „stehende Welle“, d. h. einen periodischen Wechsel von Orten maximaler und verschwindender elektrischer (und zugleich verschwindender und maximaler magnetischer) Feldintensität. In dem Gebiet *ac* haben sie gleiche Fortpflanzungsrichtung, aber einen durch die Entfernung *ab* bestimmten Gangunterschied; je nach der Grösse dieser Entfernung verstärken sie sich oder schwächen sich bis zur Vernichtung, — und zwar gleichmässig im ganzen Gebiet *ac*. Beide Formen der „Interferenz“ sind beobachtet worden (Hertz). Die Beobachtung ergiebt unmittelbar die Wellenlänge für die betreffende Schwingung.

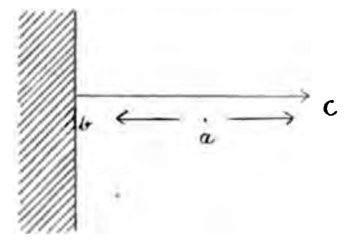


Fig. 51.

2) Die Wellen sind transversal, d. h. beide Feldintensitäten liegen normal zu der Richtung, in welcher die Strahlung sich ausbreitet (Hertz).

3) Elektrische und magnetische Feldintensität stehen senkrecht auf einander.*)

4) Die Geschwindigkeit einer in Luft längs zwei parallelen Metalldrähten fortschreitenden Welle ist gleich der Geschwindigkeit der im freien Luftraume sich ausbreitenden Welle**).

5) Die Geschwindigkeit, mit welcher eine Welle längs zwei parallelen in Luft ausgespannten Metalldrähten fortschreitet, ist $\omega_0 = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Diese Geschwindigkeit kann nur bestimmt werden und wurde bestimmt durch gleichzeitige Messung der Wellenlänge und der Schwingungsdauer.***)

Aus 4) und 5) folgt:

6) Die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im freien Luftraum ist ω_0.

7) Ebene Wellen sind in einer Reihe anderer Isolatoren durch verschiedene Beobachter nachgewiesen, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit (G) ist mit der Geschwindigkeit in Luft (G_0) verglichen worden. Es fand sich für hinreichend lange Wellen stets

$$\frac{G}{G_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}} = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Daraus folgt nach 6):

$$G = \omega = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Abweichungen von diesem Gesetz sind aber für kürzere Wellen constatirt. Bezügl. dieser Abweichungen vgl. Schluss des Kapitels.

8) An der Grenze zweier Isolatoren oder eines Isolators und eines Metalls findet regelmässige Reflexion, — und

*) Hertz, l. c., S. 205.

**) Sarasin und de la Rive, Archives de Genève (3) 29, S. 358 und 441; s. auch Hertz l. c. Einleitung.

***) Trowbridge und Duane, Phil. Mag. (5) 40, S. 223.

9) an der Grenze zweier Isolatoren auch regelmässige Brechung ebener Wellen statt, nach den in § 2 entwickelten geometrischen Gesetzen (Hertz).

10) Für die Intensität der an einem Isolator reflectirten Welle ist der Polarisationszustand der auffallenden Welle von Bedeutung. Wenn die elektrische Feldintensität in der Einfallsebene liegt, und nur unter dieser Bedingung, kann der Fall eintreten, dass die reflectirte Welle verschwindet*) (vgl. oben S. 440). — An der Grenze gegen ein Metall wird die Welle mit voller Intensität reflectirt; die Phase bestimmt sich dadurch, dass die elektrische Feldintensität in der Grenzfläche stets Null ist. (Hertz; vgl. oben S. 446).

11) In einer Anzahl schwach leitender Flüssigkeiten wurde die Ausbreitung ebener Wellen unter gleichzeitiger Absorption nachgewiesen (vgl. S. 431 ff.). Die beiden Constanten — Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionscoefficient — haben sich für einige Substanzen in Uebereinstimmung, für andere im Widerspruch mit der Theorie ergeben (bezügl. der Abweichungen vgl. unten).

12) Es konnte nachgewiesen werden,**) dass die Wellen in Metalldrähte nur bis zu minimalen Tiefen eindringen, — um so weniger, je grösser Leitungsvermögen, Permeabilität und Schwingungszahl sind. Ferner, dass sie beim Fortleiten entlang Drähten um so schneller absorbirt werden, je grösser die Permeabilität und je kleiner das Leitungsvermögen ist.***) Dies alles und ebenso der Inhalt von 4) entspricht der Theorie [s. oben § 3, S. 479, 480, 487]. —

Zusammengefasst: die Voraussagungen der Maxwell'schen Theorie sind im vollsten Umfange, einschliesslich des Zahlwerthes der in Frage kommenden Constante, bestätigt, soweit es sich um die Ausbreitung im unbegrenzten Luftraum handelt [s. unter 1) 2) 3) 6)]. Dies allein ist entscheidend, um ihr den Vorrang gegenüber jeder der älteren Theorien zu sichern. — Ganz allgemein kann man sagen, dass die geometrischen Verhältnisse der Strahlung durch die Theorie richtig dar-

*) Trouton, Nature 39, S. 391. Klemenčič, Wied. Ann. 45, S. 62.
**) Hertz; dann Bjerknes, Wied. Ann. 48, S. 592.
***) Bjerknes, Wied. Ann. 47, S. 69.

gestellt werden, und dass die Werthe der Körperconstanten (λ, ε, μ) sich qualitativ durchweg in der von der Theorie geforderten Weise geltend machen. In quantitativer Beziehung sind an einigen Punkten Widersprüche zwischen Theorie und Beobachtung hervorgetreten, — an anderen Stellen ist das Beobachtungsmaterial noch unzureichend zur Entscheidung.

Bis hierher haben wir uns auf dem Boden der Elektricitätslehre bewegt. Die Bedeutung der Maxwell'schen Theorie und der Hertz'schen Versuche aber liegt vor allem darin, dass sie die Brücke schlagen zu einem anderen Gebiet der Physik: was für die Ausbreitung periodischer elektromagnetischer Störungen Maxwell's Theorie forderte und Hertz's Versuche nachwiesen, das sind zugleich die Gesetze, nach welchen das Licht sich ausbreitet. Setzen wir für „Isolator“: „durchsichtiger Körper“, — für „Leiter“: „Licht absorbirender Körper“, — für „Ebene durch Wellennormale und magnetische Feldintensität“: „Polarisationsebene“; dann sind die in § 2 abgeleiteten Sätze identisch mit den Gesetzen, nach denen ebene Lichtwellen sich in homogenen isotropen Körpern ausbreiten, an der Grenze solcher Körper reflectirt und gebrochen werden.

Die Uebereinstimmung umfasst folgende Punkte: Ausbreitung mit constanter endlicher Geschwindigkeit (ohne, bezw. mit Abnahme der Amplituden), — Transversalität des periodischen Vectors, — Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels, — constantes Sinusverhältniss des Einfalls- und Brechungswinkels im Fall zweier durchsichtiger Körper, — Abhängigkeit der Amplitude und Phase der reflectirten Welle vom Einfallswinkel und Polarisationszustand der auffallenden Welle sowohl im Falle der partiellen wie der totalen Reflexion. Sie umfasst ferner, wie wir vorweg bemerken wollen (s. Kap. VIII, C), auch die Gesetze der Doppelbrechung in Krystallen. Endlich: in dem einzigen Medium, in welchem von einer bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gesprochen werden kann, im Vacuum, ist diese Geschwindigkeit identisch mit der Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen:

$$\omega_0 = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$$

Hieraus hat Maxwell bereits im Jahre 1864 den Schluss gezogen: die Ausbreitung des Lichtes ist eine elektromagnetische Erscheinung.*)

Wir schieben hier eine Bemerkung über die Thatsachen und die Theorien der Optik ein. Unser Vergleich nimmt Bezug auf Beobachtungen im Gebiet der Optik; insbesondere, was wir „Polarisationsebene eines Lichtstrahls“ nennen, das ist eine experimentell eindeutig bestimmte Ebene: Bei einer bestimmten Lage eines Spiegels gegen den einfallenden Strahl wird kein Licht reflectirt; die Ebene, welche dann durch den Strahl senkrecht zur Einfallsebene gelegt wird, ist die Polarisationsebene. In dieser Polarisationsebene liegt die magnetische Feldintensität M. [vgl. § 2 bei (34)].

Es wird nun häufig die Frage gestellt, ob E oder M mit der „Schwingungsrichtung“ im Lichtstrahl zusammenfalle. Mit dieser Frage nimmt man Bezug auf eine mechanische Theorie des Lichtes, welche die Ausbreitung des Lichtes als Fortpflanzung transversaler Schwingungen in einem elastischen Medium auffasst. Die Frage muss zunächst bestimmter gefasst werden, denn es giebt zwei solche Theorien, deren Hauptvertreter Fresnel und F. Neumann sind. Fresnel nimmt an, dass die Verschiebungen des elastischen Mediums senkrecht zur Polarisationsebene, Neumann, dass sie in der Polarisationsebene erfolgen. Die Schwingungsrichtung (= Verschiebungsrichtung) Fresnel's also fällt mit E, die Schwingungsrichtung Neumann's mit M zusammen. — Ueber den Vorrang der Fresnel'schen oder der Neumann'schen Theorie ist lebhaft gestritten worden. Die Streitfrage war einerseits: welche der beiden Theorien ordnet sich besser der allgemeinen Elasticitätstheorie ein? — mit dieser Frage haben wir es hier nicht zu thun. Sie wurde aber auch so gestellt: Welche Theorie entspricht den Thatsachen der Optik? Besteht die Fortpflanzung des Lichts in der Ausbreitung einer senkrecht zur Polarisationsebene oder einer in der Polarisationsebene stattfindenden Schwingung? Ist die Fresnel'sche oder die Neumann'sche Schwingung „der Lichtvector“? Auf Grund unserer jetzigen Kenntnisse über elektromagnetische Strahlung

*) Transact. Roy. Soc. Vol. 155, S. 499.

müssen wir die Frage in dieser Formulirung für unzulässig erklären. Wir wissen: periodisch veränderliche Vectoren in beiden Richtungen sind überall vorhanden, wo eine Strahlung besteht; einem jeden von ihnen entsprechen genau angebbare Eigenschaften des durchstrahlten Raums. Die Frage kann nur sein: welcher Vector muss vorhanden sein, damit bestimmte Wirkungen des Lichts auftreten? — mit anderen Worten: wird die elektrische oder die magnetische Energie der Strahlung in bestimmte andere Energieformen umgesetzt, wo Strahlung erlischt? Diese Frage ist für die chemischen Wirkungen durch Wiener*) beantwortet worden. Er führte die Entscheidung herbei durch Beobachtung stehender Lichtwellen. In den stehenden Wellen werden die beiden Energieantheile räumlich getrennt, wie S. 446 f. erläutert wurde. Mittels der Reflexion unter 45° fand Wiener: parallel zur Oberfläche des Spiegels wechseln periodisch Ebenen maximaler und minimaler chemischer Wirkung, wenn die Polarisationsebene parallel der Einfallsebene ist; — die chemische Wirkung ist gleichförmig im Raume vertheilt, wenn beide Ebenen senkrecht zu einander sind. Nach der elektromagnetischen Theorie ist im ersten Fall M parallel zur Einfallsebene, also ist nach S. 447 M gleichförmig vertheilt, E aber hat in parallelen Ebenen periodisch wechselnde Werthe. Also sagt der Versuch in der Sprache der elektromagnetischen Theorie: nothwendige Bedingung für die chemische Wirkung ist das Vorhandensein der oscillirenden elektrischen Feldintensität. In der Sprache der mechanischen Theorien sagt er: nothwendig ist das Vorhandensein der Fresnel'schen Schwingung.

Wir kehren zu der Maxwell'schen These zurück. Es ist in derselben von Lichtstrahlung die Rede. Aber es ist seit lange bekannt, dass die Strahlung, welche sich uns durch Erwärmung der bestrahlten Körper, durch Erregung von Fluorescenz, durch Auslösung chemischer Processe verräth, der Lichtstrahlung in jeder Beziehung gleichartig ist, dass sich alle diese Gattungen von Strahlung physikalisch nur durch die Schwingungszahlen unterscheiden. Der experimentellen Untersuchung ist bisher zugänglich geworden das Gebiet, welches

*) Wiener, Wied. Ann. 40 S. 203.

einerseits durch die Wellenlänge 0,0001 mm im Ultraviolett, andererseits durch die Wellenlänge 0,06 mm im Ultraroth begrenzt ist. Um für das Folgende eine kurze Bezeichnung zu haben, sollen diese Strahlen (einschliesslich der Lichtstrahlen) als „Wärmestrahlen" bezeichnet werden. Im Gegensatz hierzu soll diejenige Strahlung, welche wir durch elektrische Hülfsmittel hervorbringen, und welche gegenwärtig das Gebiet der Wellenlängen oberhalb 3 mm umfasst, „elektromagnetische Strahlung" heissen. Der Maxwell'sche Satz lautet dann: alle Wärmestrahlung ist, bis auf die Werthe der Schwingungsdauer, identisch mit elektromagnetischer Strahlung; sie ist also, wie diese, die Ausbreitung periodischer elektromagnetischer Störungen.

In wieweit von den erfahrungsmässig feststehenden Gesetzen der Wärmestrahlung Maxwell's Theorie Rechenschaft giebt, ist oben dargelegt. Dass sie eine vollständige Beschreibung der Thatsachen nicht bieten kann, liegt freilich auf der Hand: In Maxwell's Theorie ist der unbegrenzt gedachte, isotrope und homogene Körper durch die Werthe von zwei Constanten, $\omega = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ und $T = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, vollkommen definirt, (sofern er ein Isolator ist, durch den Werth von ω allein). Es folgt aus ihr (s. S. 432), dass mit wachsender Schwingungszahl sowohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wie die Absorption (auf die Längeneinheit bezogen) continuirlich zunehmen muss; — für den Grenzfall des Isolators muss die erstere constant, die letztere Null sein. Im Gegensatz hierzu zeigt die Erfahrung für die Wärmestrahlung: alle ponderablen Körper absorbiren; für alle ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Function der Schwingungszahl; (sie zeigen „Dispersion"). Die Geschwindigkeit nimmt in der Regel mit wachsender Schwingungszahl ab; allgemein gesprochen aber ist sie eine periodische Function der Schwingungszahl. Dies gilt auch von der Absorption; die Gebiete, in welchen eine besonders starke, „auswählende" Absorption stattfindet, sind zugleich diejenigen, in welchen die Dispersion „anomal" verläuft. Die Mannigfaltigkeit der beobachteten Erscheinungen kann durch Ausdrücke mit zwei Constanten, wie sie die

Maxwell'schen Gleichungen liefern, nicht dargestellt werden, selbst wenn man für die Werthe dieser Constanten die freieste Verfügung zulässt.

Man kann die Erfahrungsthatsachen darstellen, sobald man darauf verzichtet, einen chemisch und physikalisch homogenen Körper als Continuum zu behandeln, — sobald man einem solchen Körper Structur zuschreibt. Den Bauelementen (physikalischen Molekeln) des Körpers können dann bestimmte für sie charakteristische Zeitwerthe (Perioden der Eigenschwingungen) und Längenwerthe (moleculare Dimensionen) zugeschrieben werden. Ohne weitere Specialisirung der Hypothese folgt dann: Solange die einen physikalischen Vorgang definirenden Zeiten und Längen — im einfachsten Fall: Schwingungsdauer und Wellenlänge — sehr gross sind gegenüber den molecularen Schwingungsdauern und Dimensionen, kommen die einzelnen Molekeln und ihr Zustand in jedem Moment nicht in Betracht. Zur Geltung kommen nur gewisse räumliche und zeitliche Mittelwerthe. Der Körper erscheint als ein Continuum. Dies ist das Gültigkeitsgebiet der Maxwell'schen Gleichungen; diese Mittelwerthe bestimmen ihre Constanten. — Ist diese Anschauung richtig, dann müssen die Maxwell'schen Gleichungen für jeden Körper gelten von einer bestimmten Schwingungsdauer aufwärts; aber diese untere Grenze kann für verschiedene Körper sehr verschiedene Werthe haben. Aus Beobachtungen von Rubens*) wäre zu schliessen, dass für Quarz die Grenze bereits mit „Wärmestrahlen" von 0,06 mm Wellenlänge überschritten ist, — aus Beobachtungen von Cole**), dass sie für Aethylalkohol mit „elektromagnetischen Strahlen" von 5 cm Wellenlänge noch nicht erreicht ist [vgl. oben S. 502 f. unter 7) und 11).] —

Bezüglich der Metalle ist früher (S. 380) bemerkt worden, dass sie sich gegenüber jeder zur Beobachtung gelangten elektromagnetischen Strahlung als „vollkommene Leiter" verhalten, d. h. dass ε neben λ stets unmerklich ist. Mit anderen Worten: ein unbegrenzter Metallkörper ist elektromagne-

*) Rubens, Wied. Ann. 67, S. 464.
**) Cole, Wied. Ann. 57, S. 290.

tisch durch die eine Constante $\frac{1}{\omega^2 T} = \frac{\lambda \mu}{V^2}$ charakterisirt. Um sein Verhalten gegenüber der Wärmestrahlung darzustellen, genügen auch die zwei Constanten der Maxwell'schen Theorie nicht. Es ist denkbar, dass in dem noch unerforschten Gebiet zwischen beiden Strahlungsgattungen ein Intervall existirt, in welchem die Einführung der zweiten Maxwell'schen Constante nothwendig, aber auch ausreichend ist. Andernfalls führt die Theorie eine „Dielektricitätsconstante der Metalle" als praktisch werthlose, aber auch unschädliche Zugabe mit, welche lediglich dazu dient, die Continuität der Darstellung zu wahren.

Kapitel VIII.

Erweiterungen der Maxwell'schen Gleichungen.

In den ersten sieben Kapiteln dieses Buches sind Erscheinungen behandelt worden, welche sich den Maxwell'schen Gleichungen (B), (F), (J), (K) unterordnen lassen. Wir wollen die Theorie nunmehr erweitern nach drei Richtungen:

A. in Rücksicht auf die ferromagnetischen Körper;

B. in Rücksicht auf bewegte Medien;

C. in Rücksicht auf krystallinische Medien.

Bewegte und krystallinische Medien waren von der bisherigen Betrachtung ausdrücklich ausgeschlossen; bezüglich der ferromagnetischen Körper haben wir eine ungenaue Annahme gemacht.

A. Die Voraussetzung $\mu =$ const. wird aufgegeben.

Wenn wir ein Stück weiches Eisen, welches für sich allein kein magnetisches Feld erzeugt, in die Nähe von Magneten oder Stromleitern bringen, so ändert sich erstens das vorhandene magnetische Feld, — dies kann erkannt werden an der Aenderung der mechanischen Kräfte, welche auf einen kleinen Magneten oder Stromträger ausgeübt werden, oder an der veränderten Stärke der Inductionsströme, welche cet. par. in einem Leiter auftreten, — und es erleidet zweitens das Eisen-

stück selbst mechanische Kräfte. Was für das Eisenstück gilt, das gilt qualitativ für jeden Körper, der in das Feld eingeführt wird. Von den genannten Erscheinungen können wir Rechenschaft geben, indem wir dem Eisen etc. eine temporäre oder „inducirte" Magnetisirung zuschreiben. Von dieser haben wir angenommen, dass sie der Feldintensität gleichgerichtet und für ein gegebenes Medium mit ihr proportional ist. Gleichbedeutend mit dieser Annahme ist die andere, dass zwischen der magnetischen Polarisation $\mathfrak{M}$, deren Flächenintegrale, und der Feldintensität M, deren Linienintegrale in unsere Grundgleichungen eingehen, für jeden Körper ein constantes Verhältniss besteht:

$$\mathfrak{M}_l = \mu M_l,$$

wo die Constante μ als Permeabilität des Mediums bezeichnet wurde. Inducirte Magnetisirung zeigt ein Körper, dessen μ verschieden ist von dem μ_0 des Mediums, welches er im Versuch ersetzt oder verdrängt, — praktisch von dem μ der Luft.

Unsere Annahme trifft aber gerade für diejenigen Körper nicht zu, welche sich von der Luft wesentlich unterscheiden und daher die kräftigsten Wirkungen zeigen, die ferromagnetischen Körper, — „Eisen", wie wir kurz sagen wollen. Die Erfahrung zeigt: $\mathfrak{M}$ wächst zwar mit M, aber nicht proportional mit M, sondern im allgemeinen langsamer und so, dass sich mit wachsenden M der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ dem Werthe μ_0 der „magnetisch indifferenten" Körper oder der Luft nähert.

Wir modificiren demgemäss unsere Grundgleichungen. Wir schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mathfrak{M}_N\,dS = -V\int\limits_O E_s\,ds \qquad (J_1)$$

$$\int\limits_L \left(A_N + \frac{\partial \mathfrak{E}_N}{\partial t}\right) dL = V\int\limits_O M_l\,dl \qquad (K)$$

$$A_N = \lambda\,(E_N - K_N), \qquad \mathfrak{E} = \varepsilon E,$$

und wir setzen für Eisen nur noch voraus: $\mathfrak{M}$ ist parallel mit

M_l ist Function von M und wächst gleichzeitig mit M_l oder:

$$\mathfrak{M}_l = \mu M_l;\quad \mu = f(M);\quad \mathfrak{M}' > \mathfrak{M}'',\ \text{wenn}\ M' > M''.$$

(f eine einwerthige Function, die gegeben sein muss, damit die Substanz für uns definirt sei.)

Wir schreiben die Grundgleichungen für Cartesische Coordinaten aus und behandeln sie so, wie es Kap. VI, S. 396f. bei der Ableitung des Poynting'schen Satzes geschah. Es folgt dann für den unendlichen Raum:

$$\int\left(M_x \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial t} + M_y \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial t} + M_z \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t}\right) d\tau + \frac{\partial W_e}{\partial t} + \Psi = 0,$$

wo wie früher W_e die elektrische Energie und Ψ die in der Zeiteinheit in nicht-elektromagnetische Form übergegangene Energie bedeutet. Das Integral müssen wir also der in der Zeiteinheit erfolgenden Vermehrung der magnetischen Energie gleichsetzen; oder: wir müssen annehmen, dass

$$\int\left(M_x \cdot \partial \mathfrak{M}_x + M_y \cdot \partial \mathfrak{M}_y + M_z \cdot \partial \mathfrak{M}_z\right) d\tau = \int M \cdot \partial \mathfrak{M} \cdot d\tau$$

die Zunahme ist, welche die magnetische Energie erfährt, wenn bei ruhender Materie in jedem Volumelement $\mathfrak{M}$ um bestimmte $\partial \mathfrak{M}$ (oder M um entsprechende ∂M) wächst. Das heisst: wir werden veranlasst, zu setzen

$$W_m = \int d\tau \int_0^{\mathfrak{M}} M \cdot \partial \mathfrak{M}. \qquad (\mathrm{F}_1)$$

Dazu kommt, wie früher:

$$W_e = \int d\tau \int_0^{\mathfrak{E}} E \cdot \partial \mathfrak{E} = \int d\tau\ {}^1\!/_2\, \varepsilon E^2. \qquad (\mathrm{B})$$

Wir ersetzen unser früheres Gleichungssystem (B) (F) (J) (K) durch (B) (F_1) (J_1) (K) und wollen überlegen, was von unseren früheren Resultaten bestehen bleibt und was zu ändern ist.

Keine Superposition. — Zunächst allgemein: die Gleichungen (J_1) sind nicht mehr linear in den Componenten

von M. Zwei Felder, welche einzeln den Gleichungen genügen, geben, zusammengesetzt, im allgemeinen nicht mehr ein Feld, welches ihnen ebenfalls genügt. Alle Sätze über Superposition magnetischer Felder verlieren ihre Gültigkeit.

Magnetische Vertheilung. — Aus (J_1) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\mathfrak{M}) = 0;$$

das heisst: die durch die Gleichung

$$\Gamma(\mathfrak{M}) = \begin{cases}\varrho \\ \sigma\end{cases}$$

definirte „magnetische Vertheilung“ haftet an den Körperelementen.

Eindeutige Bestimmtheit der stationären Felder. — Für stationäre Zustände folgt wie früher:

$$\int_O E_s ds = 0$$

und

$$V\int_O M_l dl = \int_L \Lambda_N dL.$$

Das elektrische Feld ist dadurch bestimmt, wie früher (s. S. 375 f.). Es sei gefunden, also die Λ bekannt. Dann folgt wieder:

Durch die Strömung Λ und die magnetische Vertheilung $\Gamma(\mathfrak{M})$ ist das magnetische Feld eindeutig bestimmt (vgl. l. c.). Zum Beweise nehmen wir zwei Lösungen an:

1) M' und das durch M' bestimmte $\mathfrak{M}'$;

2) M'' „ „ „ M'' „ $\mathfrak{M}''$.

Dann ist

$$\int_O M_l' \, dl = \int_O M_l'' \, dl, \text{ oder } M_l' - M_l'' = -\frac{\partial \psi}{\partial l}, \ \psi \text{ einwerthig,}$$

und

$$\Gamma(\mathfrak{M}') = \Gamma(\mathfrak{M}'').$$

Man bilde nun

$$H = \int h \cdot d\tau, \quad \text{wo } h = (M_x' - M_x'')(\mathfrak{M}_x' - \mathfrak{M}_x'') + \cdots$$

Dann folgt einerseits:

$$H = -\int \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} (\mathfrak{M}_x' - \mathfrak{M}_x'') + \cdots \right] d\tau$$

$$= \int \psi \left[\Gamma(\mathfrak{M}') - \Gamma(\mathfrak{M}'') \right] d\tau = 0;$$

andrerseits ist

$$h = M'\mathfrak{M}' + M''\mathfrak{M}'' - (M'\mathfrak{M}'' + M''\mathfrak{M}') \cos(M'M''),$$

also $$h \geqq (M' - M'')(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'') \geqq 0.$$

Es kann also nur sein $h \equiv 0$, d. h. $M' \equiv M''$. —

Das allgemeinste stationäre magnetische Feld (M) kann aber nicht mehr zerlegt werden in einen bestimmten Antheil, welcher der magnetischen Vertheilung $\varrho = \Gamma(\mathfrak{M})$, und einen zweiten, welcher der Strömung $\Lambda = V \cdot P(M)$ entspricht (vgl. Kap. IV, S. 249).

Mechanische Kräfte im statischen Feld. — Ist die Strömung Λ durchweg Null, so finden im ruhenden System keine Energieumsetzungen statt. Die irgend einer virtuellen Aenderung der Configuration entsprechende Abnahme der Energie: $-d(W_e + W_m)$, wo

$$dW_m = d\left[\int d\tau \int_0^{\mathfrak{M}} M \cdot \partial\mathfrak{M}\right],$$

setzen wir der geleisteten mechanischen Arbeit gleich. Elektrisches und magnetisches statisches Feld sind unabhängig von einander; die Abnahme von W_m bezeichnen wir daher als Arbeit von Kräften magnetischen Ursprungs. Wir wollen den allgemeinsten Ausdruck für diese Kräfte aufstellen.

Es ist

$$\mathfrak{M} = \mu M, \quad \text{wo } \mu = f(M)$$

eine Function von M, deren Parameter durch die in dem betrachteten Raumpunkt vorhandene Materie bestimmt sind. Also ist

$$d\int_0^{\mathfrak{M}} M\cdot\partial\mathfrak{M} = d(M\mathfrak{M}) - d\int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M$$

$$= d(M\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}\cdot dM - \int_0^M \partial\mu\cdot M\cdot\partial M$$

$$= M\cdot d\mathfrak{M} - \int_0^M \partial\mu\cdot M\cdot\partial M,$$

wo einerseits $d\mathfrak{M}$ die gesammte Aenderung von $\mathfrak{M}$, andrerseits $\partial\mu$ die durch die Aenderung der Substanz allein, bei constantem M, hervorgebrachte Aenderung von μ bezeichnet. Wir multipliciren mit $d\tau$ und integriren über den unendlichen Raum. Es ist

$$\int_\tau d\tau\cdot M\cdot d\mathfrak{M} = -\int_\tau d\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}d\mathfrak{M}_x + \cdot\cdot\right) = \int_\tau d\tau\cdot\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\,d\mathfrak{M}_x + \cdot\right)$$

$$= \int_\tau d\tau\cdot\psi\cdot d\,\Gamma(\mathfrak{M}) = \int_\tau d\tau\cdot\psi\cdot d\varrho\,.$$

Die Aenderungen von ϱ werden aber nur durch die Verschiebung der Materie hervorgerufen: $d\varrho = \partial\varrho$. Also:

$$dW_m = \int d\tau\left[\psi\cdot\partial\varrho - \int_0^M \partial\mu\cdot M\cdot\partial M\right].$$

Bezeichnen nun wieder δx, δy, δz die Verschiebungscomponenten des in $d\tau$ befindlichen materiellen Theilchens, so ist (vgl. Kap. I S. 86):

$$\partial\varrho = -\frac{\partial}{\partial x}(\varrho\,\delta x) - \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\,\delta y) - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\,\delta z)$$

$$\partial\mu = -\frac{\partial\mu}{\partial x}\,\delta x - \frac{\partial\mu}{\partial y}\,\delta y - \frac{\partial\mu}{\partial z}\,\delta z$$

und daraus:

$$dW_m = -\int d\tau \left[\left(\varrho M_x - \int_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \cdot \partial M\right) \delta x + \cdot + \cdot\right].$$

Wir können daher die den Verschiebungen $\delta x \cdot\cdot$ entsprechende Arbeit

$$\partial A = -dW_m$$

in der Form schreiben:

$$\partial A = \int d\tau \, [f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z],$$

wenn wir setzen

$$f_x = \varrho M_x - \int_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \cdot \partial M \text{ etc.} \tag{1}$$

Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^M \mu M \cdot \partial M = \mu M \frac{\partial M}{\partial x} + \int_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \cdot \partial M;$$

also

$$f_x = M_x \Gamma(\mathfrak{M}) + \mathfrak{M} \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M$$

$$= M_x \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + M_x \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + M_x \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M$$

$$+ \mathfrak{M}_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial M_y}{\partial x} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Unsere Ableitung gilt für ein statisches Feld, d. h. ein stationäres Feld, in welchem $\Lambda = 0$. Unter dieser Voraussetzung ist aber

$$\oint M_l dl = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial x} \text{ etc.}$$

Addiren wir nun zu der vorstehenden Gleichung:

$$0 = \mathfrak{M}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \right) + \mathfrak{M}_z \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right),$$

so folgt:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} (M_x \mathfrak{M}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (M_x \mathfrak{M}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (M_x \mathfrak{M}_z) - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M \qquad (2)$$

nebst den entsprechend gebildeten f_y und f_z.

Die Ausdrücke in (1) und (2) sind identisch unter der gemachten Voraussetzung; $f \cdot d\tau$ ist die mechanische Kraft, welche in einem statischen magnetischen Felde auf den Inhalt von $d\tau$ wirkt. (Sie geht in die Kap. III (31) gefundene Kraft über, sobald man $\mu =$ const. bezüglich M setzt.) Der Ausdruck in (1) zeigt, dass die Kraft sich zusammensetzt aus dem Antheil $dm \cdot M$, welcher im homogenen Medium allein vorhanden ist, und einem zweiten Antheil, welcher durch die Inhomogenität des Mediums bedingt ist.

Spannungen. — Aus dem Ausdruck (2) ergiebt sich: die Kräfte f können ersetzt werden durch folgendes System von Spannungen p (für die Bezeichnung s. Kap. I S. 87ff.):

$$\left.\begin{array}{l|l} p_{xx} = M_x \mathfrak{M}_x - \int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M & p_{xy} = M_y \mathfrak{M}_x = M_x \mathfrak{M}_y = p_{yx} \\ p_{yy} = M_y \mathfrak{M}_y - \int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M & p_{yz} = M_z \mathfrak{M}_y = M_y \mathfrak{M}_z = p_{zy} \\ p_{zz} = M_z \mathfrak{M}_z - \int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M & p_{zx} = M_x \mathfrak{M}_z = M_z \mathfrak{M}_x = p_{xz} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Indem wir für einen Augenblick x parallel M annehmen, erkennen wir, dass der einfachste Ausdruck für diese Spannungen der folgende ist: es wirkt auf jede zur Feldrichtung normale Flächeneinheit ein normaler Zug vom Betrage

$$M\mathfrak{M}-\int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M=\int_0^{\mathfrak{M}} M\cdot\partial\mathfrak{M},$$

und auf jede zur Feldrichtung parallele Flächeneinheit ein normaler Druck vom Betrage: $\int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M$. Diese beiden Hauptspannungen sind nicht mehr numerisch gleich.

Allgemeiner Ausdruck der Kräfte. — Wir werden, unter B, zeigen, dass die Spannungen (3) den allgemeinsten Ausdruck der Kräfte magnetischen Ursprungs in einem beliebigen elektromagnetischen Felde bilden. Nehmen wir das für den Augenblick an, so ergeben sich, indem wir den letzten Theil unserer Entwicklung rückwärts durchlaufen, zunächst als allgemeingültig die Kräfte f in der Form (2), und weiter, ebenfalls allgemeingültig, in der Form

$$\left.\begin{aligned} f_x=\varrho\cdot M_x-\int_0^M\frac{\partial\mu}{\partial x}M\cdot\partial M+\mathfrak{M}_y\left(\frac{\partial M_x}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial x}\right)\\ +\mathfrak{M}_z\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Ist das Feld stationär, so folgt nach (K''):

$$f_x=\varrho M_x-\int_0^M\frac{\partial\mu}{\partial x}M\cdot\partial M+\left(\frac{A_y}{V}\mathfrak{M}_z-\frac{A_z}{V}\mathfrak{M}_y\right).\tag{5}$$

Diese Werthe gehen überall da, wo keine Strömung A vorhanden ist, in die Werthe (1) des statischen Feldes über. Wo aber eine Strömung A existirt, da gesellt sich zu den Kräften (1) noch eine Kraft, welche das Theilchen normal zur Strömung und normal zu den Kraftlinien durch das Feld treibt (in der Richtung $\perp \widehat{A\mathfrak{M}}$) und die Grösse hat: $\frac{A}{V}\mathfrak{M}\sin(A\mathfrak{M})$.

Berechnung des stationären Feldes aus seinen Bestimmungsstücken. — Das stationäre Feld ist, wie wir sahen, durch die magnetische Vertheilung und die Strömung eindeutig bestimmt. Aber die Aufgabe, dieses Feld zu finden bei gegebenen ϱ und A, ist sehr viel verwickelter unter unsern jetzigen, als unter den früheren Voraussetzungen. Es waren früher auch die μ für jeden Punkt gegebene Grössen, — jetzt ist μ nur noch für jeden Punkt eine gegebene Function des erst zu findenden M. Die Aufgabe ist thatsächlich streng nur gelöst in den Fällen, wo sich die für $\mu =$ const. gefundene Lösung direct übertragen lässt:

Es sei in einem bestimmten Fall das Feld M_1 gefunden unter der Voraussetzung, dass im Eisenkörper (Raum τ) $\mu = \mu_1 =$ const. sei, und zwar habe sich innerhalb des Eisenkörpers ein gleichförmiges Feld ergeben. Die Grösse (und Richtung) dieses gleichförmigen Feldes wird im allgemeinen von dem gewählten Werth von μ_1 abhängen:

in τ: $$M_1 = F(\mu_1). \tag{a}$$

Es sei nun thatsächlich das μ des Eisens eine bekannte Function von M, also

in τ: $$\mu = f(M). \tag{b}$$

Dann bestimme man ein Werthepaar $\mu = \mu_1$, $M = M_1$, welches zugleich den Gleichungen (a) und (b) genügt. Der so bestimmte Werth von μ und das für dieses μ_1 geltende Feld M_1 der Hülfsaufgabe lösen die thatsächlich vorliegende Aufgabe.

Umgekehrt kann unter unseren Voraussetzungen die Function $\mu = f(M)$ bestimmt werden, indem das Feld beobachtet wird. Der hier vorausgesetzte Fall liegt vor für ein aus Eisen geformtes Ellipsoid, welches in ein zuvor gleichförmiges Feld M_0 gebracht wird (s. Kapitel III, S. 211 f.). Aus dem gemessenen M_0 und M erhält man rechnerisch μ, und somit durch eine Reihe von Beobachtungen die Function f. —

Ein anderer noch einfacherer Fall: eine bestimmte Anordnung von Strömen sei gegeben, und zunächst angenommen, dass $\mu = \mu_0 =$ const. ist im Raum τ. Unter dieser Voraussetzung soll die Oberfläche von τ von Kraftlinien gebildet werden und im Innern von τ soll längs jeder Kraftlinie die

Feldintensität M_0 einen constanten Zahlwerth haben. Wenn dieser Raum τ dann mit Eisen angefüllt wird, so bleibt die Feldintensität durchweg unverändert.

Der Beweis liegt in folgendem: Ausserhalb τ gelten für M dieselben Bedingungen wie für M_0; da nach Voraussetzung M_0 ihnen genügt, so genügt ihnen auch das Feld $M \equiv M_0$.

An der Oberfläche S von τ muss sein:

$$\mu M_n + \mu_0 M_N = 0;$$

es ist aber nach Voraussetzung $M_{0n} = M_{0N} = 0$; also genügt das Feld $M \equiv M_0$ auch dieser Bedingung.

Innerhalb τ muss sein:

$$\Gamma(\mu M) = \mu \Gamma(M) + \left(M_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + M_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + M_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = 0.$$

Es ist aber nach Voraussetzung erstens $\Gamma(M_0) = 0$; und zweitens liegt die Richtung von M_0 überall in den Flächen $M_0 = \text{const.}$ Die Annahme $M \equiv M_0$ ergiebt also

$$\Gamma(M) = 0 \quad \text{und} \quad M_x \frac{\partial M}{\partial x} + M_y \frac{\partial M}{\partial y} + M_z \frac{\partial M}{\partial z} = 0$$

oder, da $\mu = f(M)$, auch:

$$M_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + M_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + M_z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

so dass also auch die letzte Bedingung für M erfüllt ist.

Dieser Fall liegt vor (vgl. Kapitel IV, S. 260 und 262), wenn eine stromführende Spule gleichmässig auf einen Eisenring oder langen Eisenstab gewickelt ist; — ferner, wenn ein geradliniger, oder allgemeiner ein zu einer Curve von geringer Krümmung gebogener, stromführender Draht entweder mit einem coaxialen Eisencylinder umgeben, oder selbst aus Eisen gebildet ist. — Das Verfahren Kapitel V, S. 344 unter 4) giebt unmittelbar das zu einem bekannten M gehörige $\mathfrak{M}$, also die Function $\mu = f(M)$.

Concentration der Kraftlinien im Eisen. — Auch unter der Annahme $\mu = \text{const.}$ konnte das Problem, das Feld

M für einen magnetisch nicht homogenen Raum zu finden, nur für wenige Fälle strenge gelöst werden. Genähert richtige Lösungen erhielten wir in Kapitel IV (S. 256 und 263) unter der Voraussetzung, dass $\frac{\mu}{\mu_0}$ eine grosse Zahl sei. Die Kraftlinien concentrirten sich dann nahezu vollständig in dem Körper von der Constante μ, so weit das mit der Bedingung verträglich war, dass sie geschlossene, die Ströme umzingelnde Curven bilden müssen. Die Voraussetzung gilt für Eisen; aber sie gilt, wie wir jetzt sagen müssen, nur, solange die Feldstärken nicht zu gross, d. h. die felderzeugenden Ströme nicht zu stark werden. Mit unbegrenzt wachsendem Felde nähern wir uns dem Werth $\mu = \mu_0$, d. h. dem Falle, dass das Eisen einem magnetisch indifferenten Körper gleichartig, das Feld durch seine Anwesenheit gar nicht verändert wird.

Inducirte Magnetisirung. — Es sei das Feld M, wenn ein Eisenkörper sich in dem Raum τ befindet; es sei M_0, wenn cet. par. das Normalmedium mit der Constante μ_0 sich in τ befindet. Setzt man dann in τ:

$$(\mu - \mu_0)\, M_l = I'_l, \tag{6}$$

so erhält man wie in Kapitel III und IV (vgl. insbesondere S. 196 und 205) das Feld M auch richtig aus der Annahme, der Werth $\mu = \mu_0$ sei unverändert geblieben, zu den gegebenen Magneten und Strömen aber sei noch eine „inducirte Magnetisirung“ I' oder eine „inducirte magnetische Vertheilung“ $\left.\begin{matrix}\varrho' \\ \sigma'\end{matrix}\right\} = -\Gamma(I')$ in τ hinzugekommen. Denn diese Annahme bedeutet nichts anderes, als dass das Feld M bestimmt werden soll gemäss den Bedingungen

$$M_l = M_{0l} + M'_l,$$

wo

$$P(M') = 0 \tag{a}$$

und

$$\mu_0\, \Gamma(M') = \varrho'; \tag{b}$$

oder

$$P(M) = P(M_0) = \frac{A}{V} \tag{a'}$$

und

$$\mu_0 \, \Gamma(M) = \varrho_0 + \varrho' = \mu_0 \, \Gamma(M_0) - \Gamma[(\mu - \mu_0) M]. \quad \text{(b')}$$

(b') aber ist identisch mit:

$$\Gamma(\mu M) = \Gamma(\mu_0 M_0) = \varrho_0, \quad \text{(c)}$$

und (a') und (c) sind thatsächlich die charakteristischen Gleichungen des Feldes M.

Ein Unterschied gegenüber Kapitel III und IV macht sich insofern geltend, als in einem homogenen Eisenkörper im Allgemeinen nicht $\Gamma(I') = 0$, das Eisen nicht solenoidal magnetisirt ist (vgl. S. 208). Es ist eben magnetisch nicht homogen, wo M variirt.

Die Kräfte dargestellt mittels der inducirten Magnetisirung. — Mit Hülfe der inducirten Magnetisirung lassen sich unter bestimmten Bedingungen die mechanischen Kräfte ausdrücken. Man erhält zwar nicht die Spannungen im Innern des Eisens, wohl aber diejenigen Summenwerthe, welche für die Bewegung eines starren Eisenkörpers in dem Normalmedium in Betracht kommen, richtig aus der Annahme: es wirke auf jedes Element $d\tau$ des Eisenkörpers eine Kraft

$$f \cdot d\tau = M(\varrho + \varrho') \, d\tau$$

in der Richtung des Feldes M, wo ϱ die gegebene, unveränderliche, „wahre“, ϱ' die „inducirte“ magnetische Dichte bezeichnet. Der Beweis ist leicht nach dem Muster in Kapitel I § 12 (S. 100 f.) zu führen.

Ebenso wie dort bezw. in Kapitel III § 3 (S. 208 f.) folgt weiter: sind in der Nachbarschaft andere Eisenmassen nicht vorhanden, so darf in diesem Ausdruck der Kräfte das „äussere Feld“ M_0, d. h. das Feld, welches vor Einführung des Eisenkörpers an der gleichen Stelle vorhanden war, für M gesetzt werden, also:

$$f \cdot d\tau = M_0 \, (\varrho + \varrho') \, d\tau. \quad (7)$$

Desgleichen folgen die weiteren Schlüsse in Kapitel III, § 3, insbesondere: Wenn ein kleines Eisenstück ohne wahren

Magnetismus, aber mit dem inducirten Moment $\mathfrak{K}'$, im Felde M_0 unendlich wenig verschoben wird, so ist die geleistete Arbeit:

$$\partial A = \mathfrak{K}_x' \,\delta M_{0x} + \mathfrak{K}_y' \,\delta M_{0y} + \mathfrak{K}_z' \delta M_{0z}, \tag{8}$$

wo x, y, z im Eisen festliegende Axen bezeichnen.

Bleibt das Moment dem Felde parallel, so ist

$$\partial A = \mathfrak{K}' \cdot \delta M_0. \tag{9}$$

Es ist aber unter unseren jetzigen Voraussetzungen $\mathfrak{K}'$ nicht proportional mit M_0, sondern eine Function von M_0, welche sowohl von der Körperform, wie von der Form der Function $\mu = f(M)$ abhängt. Es ist daher auch nicht (vgl. S. 210)

$$A = \delta\,(1/2\,\mathfrak{K}' M_0),$$

sondern lediglich

$$A = \delta \int_0^{M_0} \mathfrak{K}' \cdot \partial M_0. \tag{10}$$

Das magnetische Feld linearer Ströme; seine Energie. — Wir wollen jetzt annehmen, dass unser Feld eine Anzahl linearer Ströme i_k, i_h enthalte, aber keine permanenten Magnete. Das Feld M, also auch $\mathfrak{M}$ und die Flächenintegrale

$$Q_k = \int \mathfrak{M}_N d\, S_k$$

über die von den Stromcurven begrenzten Flächen S_k sind dann eindeutig bestimmt durch die i_h; aber sie sind nicht mehr lineare Functionen der i_h; es existiren also auch keine constanten „Inductionscoefficienten" p_{hk} mehr. —

Auch die Energie ist Function der i_k, aber keine quadratische. Die Energievermehrung

$$\partial W_m = \int_\tau M \cdot \partial \mathfrak{M}\, d\tau,$$

welche unendlich kleinen Vermehrungen di_k entspricht, lässt

sich vermöge der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} M_l = -\frac{\partial\psi}{\partial l}, \ \psi \text{ einwerthig, aber an } S_k: \overset{+}{\psi} - \overset{-}{\psi} = \frac{i_k}{V}, \\ \Gamma(\mathfrak{M}) = 0 \end{array}\right\}$$

umformen in

$$\left.\begin{array}{c} \partial W_m = \frac{i_1}{V}\partial Q_1 + \frac{i_2}{V}\partial Q_2 + \ldots, \\ \text{wo} \quad \partial Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial i_2} di_2 + \ldots \end{array}\right\} \tag{11}$$

Schreibt man

$$W_m - \left(\frac{i_1}{V} Q_1 + \frac{i_2}{V} Q_2 + \ldots\right) = -U, \tag{12}$$

so wird also

$$\frac{\partial U}{\partial i_1} = \frac{Q_1}{V}, \qquad \frac{\partial U}{\partial i_2} = \frac{Q_2}{V} \quad \text{etc.,} \tag{13}$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial i_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial i_1}. \tag{14}$$

(Diese Gleichung ersetzt die speciellere in Kapitel IV S. 243 f.:

$$\frac{Q_{12}}{i_1} = \frac{Q_{21}}{i_2} = V p_{12}.)$$

Inducirte elektromotorische Kräfte. Erhaltung der Energie. Mechanische Kräfte. — Die Grundgleichung (J_1) sagt unmittelbar aus, dass die im Leiter s_k inducirte elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E}_k' = \int_{s_k} E_s\, ds = -\frac{1}{V}\frac{\partial Q_k}{\partial t} \tag{15}$$

ist. Dies gilt nach der Ableitung aus (J_1) nur für einen gegen seine Umgebung *ruhenden* Stromkreis s_k. Wir nehmen aber wie in Kapitel V und in Uebereinstimmung mit der Erfahrung an, dass es thatsächlich *allgemein* gilt, wie auch die

Aenderung von Q_k zu Stande gekommen sein mag. Demnach ist, wie in Kapitel V S. 306, die in dt in den Leitern producirte Joule'sche Wärme, vermindert um die aus den galvanischen Elementen aufgenommene Energie:

$$\Sigma \mathcal{E}_k' i_k \, dt = -\Sigma \frac{\dot{i}_k}{V} dQ_k, \tag{16}$$

wo dQ_k die gesammte in dt erfolgende Vermehrung von Q bezeichnet.

Ruhen alle Körper, so verlangt das Energieprincip, dass

$$\Sigma \mathcal{E}_k' i_k dt + \partial W_m = 0$$

sei; diese Gleichung wird durch (11) und (16) erfüllt.

Finden Bewegungen statt, und ist die von den inneren Kräften des Systems geleistete Arbeit A, so verlangt das Energieprincip, dass

$$\Sigma \mathcal{E}_k' i_k dt + dW_m + A = 0 \tag{17}$$

sei, wo dW_m die totale Vermehrung von W_m in dt bedeutet.

Wir wollen die von der Aenderung der i_k, bei ruhender Materie, herrührenden Incremente durch ∂ bezeichnen, — die von der Veränderung der geometrischen Parameter, bei festen i_k, herrührenden durch δ, — die totalen durch d, so dass also allgemein

$$dX = \partial X + \delta X$$

(und im besonderen $di \equiv \partial i$);

dann ist nach (12):

$$dW_m = d\,\Sigma \frac{\dot{i}_k}{V} Q_k - dU,$$

wo

$$dU = \partial U + \delta U,$$

und nach (13):

$$\partial U = \Sigma \frac{Q_k}{V} di_k.$$

Also

$$dW_m = \Sigma \frac{i_k}{V} dQ_k - \delta U. \tag{18}$$

Aus (16) (17) und (18) folgt:

$$A = \delta U. \tag{19}$$

(Diese Gleichung tritt an Stelle der Gleichung (55) des Kapitel IV:

$$A = \delta W_m.)$$

Ein linearer Stromkreis. — Handelt es sich um einen einzigen Stromkreis, so wird nach (11):

$$W_m = \int_0^Q \frac{i}{V} \partial Q, \quad \text{wo } \partial Q = \frac{\partial Q}{\partial i} di; \tag{20}$$

nach (12):

$$U = \frac{i}{V} Q - \int_0^Q \frac{i}{V} \partial Q = \int_0^i \frac{Q}{V} di \tag{21}$$

und nach (19):

$$A = \delta \int_0^i \frac{Q}{V} di. \tag{22}$$

Es heisse, wie früher, das Feld M_0, die Induction durch S: Q_0, wenn der Raum ausschliesslich von magnetisch indifferenten Körpern erfüllt ist, dagegen M und Q, wenn sich ein Eisenkörper darin befindet. Wir zerlegen dann

$$M = M_0 + M'$$

$$Q = Q_0 + Q'$$

und erhalten

$$Q' = \int (\mu M_N - \mu_0 M_{0N}) \, dS = \int (I'_N + \mu_0 M'_N) \, dS,$$

wenn wieder

$$(\mu - \mu_0)\, M_x = I'_x$$

gesetzt wird. I' ist die inducirte Magnetisirung des Eisens, M', Q' die derselben entsprechende Feldintensität und Induction. Bei einer Verschiebung des Eisenstücks ist

$$\delta Q = \delta Q'$$

und somit:

$$A = \delta \int_0^i \frac{Q'}{V}\, di. \tag{23}$$

Es ist aber identisch [vgl. Kap. IV (58)]

$$\int_\tau d\tau\, (I'_x \cdot \partial M_{0x} + \cdots) = \frac{Q'}{V}\, \partial i.$$

Handelt es sich, um nur den einfachsten Fall zu betrachten, um ein kleines Eisenstück vom inducirten Moment $\mathfrak{K}'$, dessen Axe parallel M_0 bleibt, so ist also

$$\frac{Q'}{V}\, \partial i = \mathfrak{K}' \cdot \partial M_0$$

und demnach

$$A = \delta \int_0^{M_0} \mathfrak{K}' \cdot \partial M_0\,,$$

wie wir unter (10) bereits gefunden haben; oder

$$A = \int_{M_{01}}^{M_{02}} \mathfrak{K}' \cdot \partial M_0\,,$$

wo die Indices 1 und 2 sich auf Anfangs- und Endlage beziehen. Hat das Eisen etwa die Form eines Ellipsoids, dessen a-Axe dem Feld parallel bleibt, so ist I' als Function von μ und M_0 bekannt [s. Kap. III (45)], also auch $\mathfrak{K}'$ und M_0 als Functionen von μ und M; das Integral kann folglich berechnet werden, sobald $\mu = f(M)$ empirisch gegeben ist.

Zwei Darstellungen. Bedeutung der „wahren“ und der „freien“ Magnetisirung. — Den Vector B, die „magnetische Induction“, welcher durch die Eigenschaft $\Gamma(B) = 0$ ausgezeichnet ist, haben wir (s. S. 221) zerlegt gemäss der Gleichung

$$B_l = \mathfrak{M}_l + I_l = \mu M_l + I_l,$$

in welcher der zweite Summand eine unveränderliche Grösse ist, die „wahre“ Magnetisirung. Die ältere Darstellung setzt

$$(\mu - \mu_0)\, M_l = I_l'$$

gleich der „inducirten“ Magnetisirung und zerlegt:

$$B_l = \mu_0 M_l + (I_l' + I_l);$$

wo $I_l' + I_l$ die l-Componente der „scheinbaren“ oder „freien“ Magnetisirung. Insbesondere für einen Körper ohne wahre Magnetisirung haben wir $B_l = \mathfrak{M}_l = \mu M_l$ stets als einheitliche Grösse betrachtet, während die ältere Darstellung sie auflöst in die Summe $\mu_0 M_l + I_l'$, in welcher der erste Term dem „unpolarisirbaren“ Vacuum („Aether“), der zweite allein aber der „magnetisch polarisirten“ Materie zukommt. Die Frage, ob die Grösse von $\mathfrak{M}$, oder aber die Grösse von I' eine bestimmte Eigenschaft der Materie quantitativ charakterisirt, hatte keinen Sinn, solange wir μ als Constante betrachteten; denn unter dieser Voraussetzung sind beide Grössen proportional. Die Frage erhält jetzt einen Sinn; denn bei unbegrenzt wachsenden Feldstärken M wächst auch $\mathfrak{M}$ unbegrenzt, I' aber nähert sich einer endlichen Grenze.

Betrachten wir also irgend eine der Messung zugängliche Erscheinung, welche an das Vorhandensein eines magnetischen Feldes und das Vorhandensein von Materie gebunden ist. Nehmen die Masszahlen für diese Erscheinung unbegrenzt zu mit wachsender Feldstärke, dann kann sie nur durch M oder $\mathfrak{M}$ eindeutig bestimmt sein; — nähern sich die Zahlen einer festen Grenze, dann kann sie nur von I' abhängen. Ein Vorgang der verlangten Art ist die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes; sie fehlt (abgesehen von der sogenannten „natürlichen Drehung“, welche von der hier be-

sprochenen scharf trennbar ist) bei Abwesenheit des Feldes, und sie fehlt auch bei Abwesenheit von Materie. Sie ist in allen nicht-ferromagnetischen Körpern proportional mit M oder $\mathfrak{M}$ oder I'; sie geht aber in Eisen, Kobalt und Nickel nach Kundt's Entdeckung*) mit wachsendem Felde gegen einen festen Maximalwerth; sie ist also zweifellos eine Function von I', nicht von M oder $\mathfrak{M}$. Dasselbe gilt höchst wahrscheinlich auch von den Aenderungen, welche das Volumen, das elektrische Leitungsvermögen, das thermoelektrische Verhalten der Metalle im magnetischen Felde erfahren. Alles dieses sind Eigenschaften der Materie, nicht des von ponderabler Materie freien Raumes; und somit scheint I', nicht aber M oder $\mathfrak{M}$ den Zustand der Materie zu charakterisiren. — An die Werthe von M und $\mathfrak{M}$ dagegen knüpfen sich die Gesetze derjenigen magnetischen und elektrischen Vorgänge, welche im Vacuum ebensowohl, wie in dem von Materie erfüllten Raum auftreten. Diese Gesetze haben sich, trotz der ungeheuren Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, in wenigen einfachen Sätzen zusammenfassen lassen; sie sind in den Maxwell'schen Gleichungen formulirt und bilden den ausschliesslichen Gegenstand unserer Untersuchungen. Für uns also sind M und $\mathfrak{M}$ die Fundamentalgrössen. — Eine theoretische Zusammenfassung aller derjenigen Einzelerscheinungen, welche durch die Werthe der I' quantitativ bestimmt sind, existirt bisher nicht. Sie blieben von unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

Hysteresis. — Die Grundannahme, welche wir in diesem Abschnitt über die magnetischen Eigenschaften der Körper mit Einschluss der ferromagnetischen Substanzen gemacht haben, lässt sich so aussprechen: jedes Körperelement ist magnetisch vollkommen charakterisirt durch zwei Vectoren M und B, zwischen welchen die Beziehung besteht

$$B_l = \mu M_l + I_l.$$

Hierin ist μ eine der Substanz eigenthümliche Function von M, und I ein unveränderlicher Vector, der eben deshalb

*) Wied. Ann. 27, S. 191.

nicht in die Maxwell'schen Grundgleichungen eingeht, sondern nur in den Daten einer Aufgabe, den „Anfangsbedingungen" zur Geltung kommt. Auch diese Annahme stellt für Eisenkörper nur eine, unter gewissen Verhältnissen brauchbare Annäherung dar. Streng genommen ist ein Element eines Eisenkörpers erst durch die Werthe zweier Vectoren magnetisch definirt, die selbst und deren zeitliche Aenderungen von einander unabhängig sind. Wir wollen (vgl. S. 352) B und M definiren durch:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S B_N\, dS = -V\int\limits_O E_s\, ds \qquad (J_2)$$

$$\int\limits_L\left(A_N + \frac{\partial \mathfrak{E}_N}{\partial t}\right) dL = V\int\limits_O M_l\, dl\,, \qquad (K)$$

und auf die Beziehung zwischen beiden Grössen schliessen aus dem, was die Erfahrung für einen besonders einfachen Fall lehrt.

Ein dünner Eisenring vom Querschnitt S und der Länge l sei mit einer Spule von N Windungen gleichförmig umwickelt, in welcher der Strom i fliesst. Da das Feld im Eisenring symmetrisch zur Axe ist, ergiebt die Gleichung (K) unmittelbar:

$$Ni = VMl. \qquad (24)$$

Eine Hülfsspule umschlinge mit n Windungen den Ring und sei durch ein Galvanometer geschlossen. Das letztere misst in bekannter Weise (vgl. S. 338 ff.) das Zeitintegral der elektromotorischen Kraft

$$\mathcal{E}' = \int\limits_O E_s\, ds\,,$$

also nach (J_2) die (schnell verlaufenden) Aenderungen von $\frac{nSB}{V}$. — Zu jeder willkürlichen Aenderung von i gehört eine durch (24) zugeordnete Aenderung von M und eine durch die Beobachtung gegebene Aenderung von B. Man erhält also eine empirische Zuordnung von M- und B-Werthen, welche den Gleichungen (J_2) und (K) entsprechen.

Die Beobachtung zeigt nun, dass diese Zuordnung nicht eindeutig ist: Wenn die M-Werthe zuerst steigen, dann abnehmen, so zeigen die B-Werthe einen Verlauf der Art, wie er in Fig. 52 dargestellt ist. Die Induction bleibt gegenüber dem momentanen Werth des Feldes zurück im Sinn der vergangenen Feldwerthe. Die Erscheinung wird dementsprechend „Hysteresis" genannt. Ein allgemeines Gesetz, nach welchem B von dem gegenwärtigen und den früheren M abhängt, ist nicht bekannt. Man muss sich für technische Zwecke mit einigen empirischen Regeln begnügen, für wissenschaftliche Zwecke die Hysteresis auszuschliessen suchen. Das ist annähernd möglich, weil die folgenden Regeln gelten. Erstens: sehr weiches Eisen zeigt nur sehr geringe Hysteresis; d. h. B ist merklich eine eindeutige Function des momentanen M. Zweitens: sehr harter Stahl, welcher einmal in ein sehr starkes Feld gebracht war, zeigt nachher gegenüber viel schwächeren Feldern nur verschwindende Hysteresis; d. h. B ist merklich eine eindeutige Function des momentanen M und des Anfangszustandes.

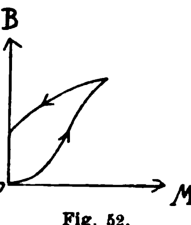


Fig. 52.

Die Hysteresis-Erscheinungen finden im Rahmen der Maxwell'schen Gleichungen keinen Platz. Es sollen daher nur einige allgemeine Bemerkungen noch angefügt werden:

1) Die ferromagnetischen Körper zeigen sich „hysteretisch" nicht nur in ihren magnetischen Eigenschaften. So verhält sich ein Eisenstück z. B. auch thermoelektrisch verschieden zu Anfang und zu Ende des durch Figur 52 dargestellten Processes. Weiter aber ist sein thermoelektrisches Verhalten auch verändert, nachdem es einer auf- und absteigenden Folge mechanischer Spannungen unterworfen wurde, welche mit Null beginnen und wieder zu Null zurückkehren.

2) Der oben betrachtete Eisenring zeigt so wenig am Ende, wie in irgend einem Stadium des Processes ein äusseres magnetisches Feld. Dass die Grösse B, welche wir ihm zuschreiben, nachdem der Strom wieder Null geworden ist, gleichwohl eine neu erworbene Eigenschaft des Körpers darstellt, ergiebt sich z. B. aus folgendem: wenn er zu Anfang des Processes einem

andern Eisenstück in jeder Beziehung gleichartig war, so bildet er mit demselben am Ende des Processes ein Thermoelement.

3) Wenn wir ein Stück Eisen oder Stahl in ein Feld bringen, welches seine Oberfläche schneidet, und es im übrigen so behandeln, wie oben den Ring, so besitzt es zum Schluss nicht nur eine Magnetisirung, sondern die Magnetisirungslinien haben auch Endpunkte. Der Körper erzeugt ein äusseres Feld, er verhält sich wie ein Magnet, und sein Magnetismus kann unter geeigneten Bedingungen (s. oben) angenähert „permanent“ sein. Die Eigenschaft des Eisens und der verwandten Körper, dass sich aus ihnen permanente Magnete bilden lassen, ist also eine specielle Erscheinungsform ihrer allgemeinen „hysteretischen“ Natur.

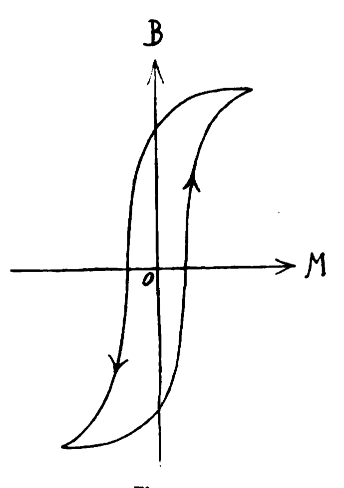


Fig. 53.

4) Man unterwerfe einen hysteretischen Körper einem wiederholten Cyclus von Einwirkungen (Dehnungen, magnetischen Feldern . .), dann ändern sich schliesslich alle Eigenschaften (thermoelektrische Constante, magnetische Induction . .) ebenfalls cyklisch. Aber den absteigenden Werthen von M entsprechen stets grössere B, als den gleichen aufsteigend durchlaufenen M (s. Fig. 53). Hieraus fliesst eine allgemeine, die einzige allgemeingültige Regel; wir wollen sie der Einfachheit wegen an dem obigen Beispiel des Ringes erläutern: Wenn $\mathcal{E}$ die innere elektromotorische Kraft in dem felderzeugenden Stromkreis bezeichnet, so ist

$$iw = \mathcal{E} - \frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

und daher

$$\int (i\mathcal{E} - i^2 w)\, dt = \int \frac{i}{V}\, \partial Q .$$

Hier steht links der Ueberschuss H der aus den Elementen aufgenommen über die als Joule'sche Wärme wieder abgegebene Energie. Rechts ist

$$\frac{i}{V}\partial Q = \frac{Ml}{N}\cdot NS\cdot\partial B = \tau\cdot M\cdot\partial B,$$

wo τ das Volumen des Eisenrings. Für einen vollen Cyclus also wird

$$H = \tau\int M\cdot\partial B = -\tau\int B\cdot\partial M, \tag{25}$$

und dies ist nach dem gesagten (vgl. Fig. 53) stets eine positive Grösse. Dieser Energiebetrag tritt im Eisen als Wärme auf; er bedeutet technisch-ökonomisch stets einen Verlust an nutzbarer Energie.

5) Man kann zerlegen:

$$B_l = \mu_0 M_l + I_l^s \tag{26}$$

und I^s die „scheinbare" oder „freie" Magnetisirung des Eisens nennen. Dieses I^s ist nämlich gemäss (26) aus den beiden experimentell bestimmten Vectoren B und M in derselben Weise abgeleitet, wie in der Theorie die Resultante der wahren und inducirten Magnetisirung (vgl. S. 528):

$$I_l^s = I_l' + I_l.$$

Aber das in (26) definirte I^s lässt sich thatsächlich im allgemeinen nicht zerlegen in einen Antheil, der gegebene eindeutige Function von M ist (wie das I' der Theorie), und einen andern, der unveränderlich ist (wie das I der Theorie). Die Theorie wird brauchbar, wo eine solche Zerlegung wenigstens annähernd möglich ist (s. ob. S. 531); so für sehr weiches Eisen, wo man $I = 0$ setzen darf, und für sehr harten Stahl, wo man in erster Annäherung unter Umständen $I' = 0$ setzen darf, in zweiter Annäherung I' proportional mit M (s. Kap. III, § 4). Beachtet man, dass für einen vollständigen Cyclus stets $\int \mu_0 M\cdot\partial M = 0$ ist, so kann man für (25) auch schreiben:

$$H = \tau \int M \cdot \partial I^s = -\tau \int I^s \cdot \partial M. \tag{27}$$

Die Gleichungen (25) und (27) gelten für beliebige Felder und Körperformen in der Gestalt:

$$H = \int d\tau \int (M_x \cdot \partial B_x + \cdot\cdot) = -\int d\tau \int (B_x \cdot \partial M_x + \cdot\cdot)$$

$$= \int d\tau \int (M_x \cdot \partial I_x^s + \cdot\cdot) = -\int d\tau \int (I_x^s \cdot \partial M_x + \cdot\cdot)$$

und sie gelten ebensowohl, wenn die cyklische Veränderung des Feldes durch eine cyklische Bewegung, als wenn sie durch Anwachsen und Abnehmen der Stromintensität hervorgebracht wird. Sie sind von Warburg gefunden. (Wied. Ann. 13, S. 141.)

6) Die magnetischen Erscheinungen der „Hysteresis" finden ein elektrostatisches Analogon in den Erscheinungen des „Rückstandes". Diese nöthigen uns, im Innern gewisser Isolatoren — wahrscheinlich nur inhomogener Isolatoren — langsam veränderliche elektrische Ladungen anzunehmen. Von ihnen giebt die Theorie, welche im Isolator nur unveränderliche Elektricitätsmengen kennt, keine Rechenschaft. Diese Lücke der Theorie ist weniger auffällig, weil wir elektrostatische Felder, welche der Theorie sehr vollkommen entsprechen, herstellen können durch geladene Leiter, die in ein homogenes Dielektricum eingebettet sind. Ein statisches magnetisches Feld hingegen von der Art, wie es die Theorie voraussetzt, giebt es in Strenge überhaupt nicht.

B. Bewegte Medien.

Erfahrungsmässig ist, wie wir dies auch im Kapitel V benutzt haben, die in einem geschlossenen linearen Leiter inducirte elektromotorische Kraft gegeben durch die zeitliche Aenderung der durch die Stromcurve tretenden magnetischen Induction, — gleichviel ob diese Aenderung dadurch zu Stande kommt, dass das Feld selbst sich ändert, oder dadurch, dass der Leiter verschoben und deformirt wird und somit andere

Theile des Feldes umspannt. Anders ausgedrückt: wenn wir die Gleichung (J):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathfrak{M}_N dS = -V\int\limits_O E_s ds$$

auf einen linearen Leiter anwandten, so war s eine geschlossene Curve, welche stets durch dieselben materiellen Theilchen ging, und S eine Fläche, welche durch diese Curve begrenzt wurde, welche also ebenfalls dauernd durch dieselben materiellen Theilchen, aber im allgemeinen nicht dauernd durch dieselben Raumpunkte gelegt werden konnte. Es liegt nahe, diese Bemerkung zu verallgemeinern, sie als zutreffend anzusehen für jede geschlossene Curve. Wenn wir das thun und die analoge Verallgemeinerung mit der Gleichung (K) vornehmen, so erhalten wir die Grundgleichungen für bewegte Medien. Sie sind dem Wesen nach von Maxwell, — in der Form, welche wir ihnen geben werden, von Hertz*) aufgestellt.

Es soll also sein:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathfrak{M}_N dS = -V\int\limits_O E_s ds \tag{L}$$

$$\int\limits_S A_N dS + \frac{d}{dt}\int\limits_S \mathfrak{E}_N dS = V\int\limits_O M_s ds \tag{M}$$

und die elektromagnetische Energie:

$$W = W_e + W_m = \int d\tau \int\limits_0^{\mathfrak{E}} E \cdot \partial\mathfrak{E} + \int d\tau \int\limits_0^{\mathfrak{M}} M \cdot \partial\mathfrak{M},$$

wo S eine beliebige, dauernd durch die gleichen Körpertheilchen hindurchgehende Fläche, s ihre Randcurve bezeichnet. Wie früher, ist

$$\mathfrak{M}_N = \mu M_N, \qquad \mathfrak{E}_N = \varepsilon E_N, \qquad A_N = \lambda(E_N - K_N),$$

* Hertz, Ausbreitung etc. S. 256.

$\mu = f(M)$ in ferromagnetischen Körpern, | $\lambda =$ const.,
$\mu =$ const. in allen übrigen Körpern, | $K_N =$ const.
$\varepsilon =$ const. allgemein,

Die Werthe der Constanten und die Parameter der Function f sind durch die Beschaffenheit der Materie an der betrachteten Stelle bestimmt.

Ausführung der Grundgleichungen. — Wir wollen den Gleichungen (L), (M) zunächst die Form von Differentialgleichungen in Cartesischen Coordinaten geben. Allgemein wird, sobald man für S ein Flächenelement dS nimmt, die linke Seite von (L):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\{dS\,[\mathfrak{M}_x \cos(Nx) + \mathfrak{M}_y \cos(Ny) + \mathfrak{M}_z \cos(Nz)]\} \\ &\qquad = \frac{d}{dt}(dS)\cdot\left[\mathfrak{M}_x \cos(Nx) + \cdot\cdot\right] \\ &\qquad + dS\left[\frac{d\mathfrak{M}_x}{dt}\cos(Nx) + \cdot\cdot\right] \\ &\qquad + dS\left[\mathfrak{M}_x \frac{d\cos(Nx)}{dt} + \cdot\cdot\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die hier auftretenden Differentialquotienten sind die vollständigen in dt eintretenden Zunahmen, dividirt durch dt. Die rein geometrischen Grössen, hier dS und $\cos(Nx)$ . ., ändern sich nur, sofern das Körpertheilchen verschoben oder deformirt wird. Die Feldgrössen $\mathfrak{M}_x$ . . ändern sich überdies auch im ruhenden Körpertheilchen; dieser Theil der Aenderung soll allgemein durch $\frac{\partial}{\partial t}dt$ bezeichnet werden.

Es sei δ mit Componenten δx, δy, δz die in der Zeit dt erfolgende Verschiebung im Raumpunkte (x, y, z), also u mit Componenten

$$u_x = \frac{\delta x}{dt}, \qquad u_y = \frac{\delta y}{dt}, \qquad u_z = \frac{\delta z}{dt}$$

die Verschiebungsgeschwindigkeit. Dann ist

$$\frac{d\mathfrak{M}_x}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{M}_x}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{M}_x}{\partial x}\cdot u_x + \frac{\partial\mathfrak{M}_x}{\partial y}\cdot u_y + \frac{\partial\mathfrak{M}_x}{\partial z}\cdot u_z. \quad (2)$$

Es werde ferner ein unendlich kleines Parallelepipedon betrachtet, welches zur Zeit t rechtwinklig ist und die Kanten a, b, c parallel den Coordinatenaxen x, y, z besitzt. Zur Zeit $t + dt$ sind dann die Projectionen der Kanten auf die Coordinatenaxen die folgenden:

auf	x	y	z
der a-Kante	$\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) a$	$\frac{\partial \delta y}{\partial x}\, a$	$\frac{\partial \delta z}{\partial x}\, a$
der b-Kante	$\frac{\partial \delta x}{\partial y}\, b$	$\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) b$	$\frac{\partial \delta z}{\partial y}\, b$
der c-Kante	$\frac{\partial \delta x}{\partial z}\, c$	$\frac{\partial \delta y}{\partial z}\, c$	$\left(1 + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) c$

Da u endlich sein muss, so sind alle Differentialquotienten dieser Tabelle unendlich klein wie dt. Unter Fortlassung aller Glieder von der Ordnung dt^2 ergiebt sich daher:

Die Seitenfläche $b\,c$ hat die Grösse erhalten

$$bc\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right);$$

das Volumen $a\,b\,c$ hat sich verwandelt in

$$a\,b\,c\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right);$$

die Normale der $b\,c$-Fläche bildet mit x, y, z Winkel, deren Cosinus sind

$$1, \quad -\frac{\partial \delta x}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \delta x}{\partial z}.$$

Nun falle das dS der Gleichung (1) zur Zeit t zusammen mit dem unendlich kleinen Rechteck bc, seine Normale N mit der positiven x-Axe, dann ist

$$\cos(Nx) = 1, \quad \cos(Ny) = 0, \quad \cos(Nz) = 0,$$

und die vorstehenden Ausdrücke ergeben:

$$\frac{d}{dt}(dS) = dS\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\cos(Nx)}{dt}=0,\qquad \frac{d\cos(Ny)}{dt}=-\frac{\partial u_x}{\partial y},\qquad \frac{d\cos(Nz)}{dt}=-\frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Zugleich wird die rechte Seite von (L):

$$-V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dS.$$

Also ergiebt sich mittels (1):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathfrak{M}_x}{dt}+\mathfrak{M}_x\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)-\mathfrak{M}_y\frac{\partial u_x}{\partial y}-\mathfrak{M}_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\&\qquad=-V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Setzt man hier den Werth aus (2) ein, und addirt und subtrahirt

$$u_x\left(\frac{\partial\mathfrak{M}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{M}_z}{\partial z}\right),$$

so entsteht die erste der folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathfrak{M}_x}{\partial t}+u_x\,\Gamma(\mathfrak{M})+\frac{\partial}{\partial y}(u_y\mathfrak{M}_x-u_x\mathfrak{M}_y)\\&\qquad-\frac{\partial}{\partial z}(u_x\mathfrak{M}_z-u_z\mathfrak{M}_x)=-V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\\&\frac{\partial\mathfrak{M}_y}{\partial t}+u_y\,\Gamma(\mathfrak{M})+\frac{\partial}{\partial z}(u_z\mathfrak{M}_y-u_y\mathfrak{M}_z)\\&\qquad-\frac{\partial}{\partial x}(u_y\mathfrak{M}_x-u_x\mathfrak{M}_y)=-V\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\\&\frac{\partial\mathfrak{M}_z}{\partial t}+u_z\,\Gamma(\mathfrak{M})+\frac{\partial}{\partial x}(u_x\mathfrak{M}_z-u_z\mathfrak{M}_x)\\&\qquad-\frac{\partial}{\partial y}(u_z\mathfrak{M}_y-u_y\mathfrak{M}_z)=-V\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{L}')$$

In gleicher Weise folgt aus (M):

$$\left.\begin{aligned}
A_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + u_x \Gamma(\mathfrak{E}) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y \mathfrak{E}_x - u_x \mathfrak{E}_y) \\
- \frac{\partial}{\partial z}(u_x \mathfrak{E}_z - u_z \mathfrak{E}_x) = V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) \\
A_y + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} + u_y \Gamma(\mathfrak{E}) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \mathfrak{E}_y - u_y \mathfrak{E}_z) \\
- \frac{\partial}{\partial x}(u_y \mathfrak{E}_x - u_x \mathfrak{E}_y) = V\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) \\
A_z + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + u_z \Gamma(\mathfrak{E}) + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \mathfrak{E}_z - u_z \mathfrak{E}_x) \\
- \frac{\partial}{\partial y}(u_z \mathfrak{E}_y - u_y \mathfrak{E}_z) = V\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{M}')$$

Im folgenden möge $d\tau'$ das von einem bestimmten materiellen Element eingenommene Volumen bezeichnen; es ist dann (s. S. 537)

$$\frac{d}{dt}(d\tau') = d\tau'\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Elektrische und magnetische Mengen. — Wir differenziren der Reihe nach die Gleichungen (L′) nach x, y und z, addiren und multipliciren mit $d\tau'$; dann kommt:

$$\left[\frac{\partial \Gamma(\mathfrak{M})}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Gamma(\mathfrak{M})}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Gamma(\mathfrak{M})}{\partial y} + u_z \frac{\partial \Gamma(\mathfrak{M})}{\partial z}\right] d\tau'$$
$$+ \Gamma(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) d\tau' = 0.$$

Die erste Klammer ist aber: $\frac{d\Gamma(\mathfrak{M})}{dt}$, d. h. die Aenderung von $\Gamma(\mathfrak{M})$ im Körperelement. Also:

$$\frac{d\Gamma(\mathfrak{M})}{dt} d\tau' + \Gamma(\mathfrak{M}) \frac{d}{dt}(d\tau') = 0,$$

oder
$$\frac{d}{dt}\left[\Gamma(\mathfrak{M})\,d\tau'\right] = 0. \tag{4}$$

Ebenso folgt aus (M'):
$$-\frac{d}{dt}\left[\Gamma(\mathfrak{E})\,d\tau'\right] = \Gamma(\Lambda)\,d\tau'. \tag{5}$$

Gleichung (4) sagt aus, dass auch bei Bewegungen der Körper die im Körperelement $d\tau'$ enthaltene magnetische Menge $\Gamma(\mathfrak{M})\,d\tau'$ unveränderlich ist. Gleichung (5) sagt dasselbe aus für die elektrische Menge im Körperelement eines Isolators, — und für die gesammte Menge eines beliebigen Körpers, der rings von Isolatoren umschlossen ist. Dies konnte direct aus den Gleichungen (L) und (M) abgelesen werden; die vorstehende Ableitung hat nur den Werth einer Rechnungsprobe. In der That, da $\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathfrak{M}_N\,dS$ sich nach (L) durch ein Integral über die Randcurve von S ausdrückt, so ist es Null für jede geschlossene Fläche S, d. h. der Inhalt an magnetischen Mengen $\Sigma m_i = \int\limits_S \mathfrak{M}_N\,dS$ ist constant für jede Fläche, welche stets dieselben materiellen Theile umspannt. Das entsprechende folgt aus (M) für die elektrischen Mengen innerhalb einer Fläche, welche in Isolatoren verläuft, in ihrem Innern aber Leiter wie Isolatoren enthalten kann.

In den früheren Abschnitten dieses Buches, in welchen (J) und (K) die allgemeinsten Gleichungen waren, haben wir die in (4) und (5) formulirten Gesetze als besondere, in den Gleichungen nicht vollständig enthaltene Erfahrungsthatsachen hinzugenommen. Wir bedurften dieses Zusatzes, so oft wir zwei, durch verschiedene Lage der Körper unterschiedene, Zustände des Feldes in Beziehung zu einander setzen wollten. Wir nahmen dann jedesmal an, dass die dm der Theilchen eines Magneten, die de der Theilchen eines Isolators, das Gesammt-e eines jeden Leiters den Bewegungen ihrer materiellen Träger gefolgt waren. Die Werthe der dm, de, e in den einzelnen Raumtheilen bestimmen aber, zusammen mit den Körperconstanten, ein stationäres Feld voll-

ständig; d. h. bei der Behandlung stationärer Felder bilden die einfachen Gleichungen unserer früheren Abschnitte, ergänzt durch die Gleichungen (4) und (5), einen vollständigen Ersatz für die complicirten Gleichungen (L′) und (M′) (s. auch Kapitel VI, S. 377 und unten S. 549).

Analyse des Feldes. — Wir haben die Aufgabe, den Inhalt der Gleichungen (L′) (M′) zu analysiren. Das kann in folgender Weise geschehen: Wir betrachten die für ruhende Körper geltenden Gleichungen (J) (K) einerseits und die für bewegte Körper geltenden Gleichungen (L) (M) andererseits als die Gesetze, nach welchen sich die elektrische Feldintensität aus der magnetischen Polarisation, und die magnetische Feldintensität aus der elektrischen Polarisation und Strömung ableitet; und wir fragen, welche Aenderungen diese Gesetze erfahren, wenn wir von ruhenden zu bewegten Körpern übergehen. — Bezüglich der Gleichungen (J) und (K) entspricht diese Auffassung der älteren Elektricitätslehre und zugleich dem Wege, auf welchem wir zu den Gleichungen gelangten: wir bauten das Feld E auf aus den Antheilen, welche dem stationären Zustand entsprechen, und denjenigen, welche eine veränderliche magnetische Polarisation hinzufügt; — das Feld M aus dem statischen Antheil, dem Antheil, welcher einer stationären Strömung, und demjenigen, welcher einer veränderlichen elektrischen Polarisation entspricht. Wir fragen nun nach den neuen Antheilen beider Felder, welche bei Bewegung der Körper hinzukommen. Zu diesem Zweck zerlegen wir:

$$\left.\begin{aligned} E_l &= E_{1l} + E_{2l} \\ M_l &= M_{1l} + M_{2l} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

und setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial t} + u_x \Gamma(\mathfrak{M}) &= - V\left(\frac{\partial E_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{1y}}{\partial z}\right) \text{ etc.} \\ A_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + u_x \Gamma(\mathfrak{E}) &= \quad V\left(\frac{\partial M_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial M_{1y}}{\partial z}\right) \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{V}(u_x \mathfrak{M}_y - u_y \mathfrak{M}_z) &= E_{2x} \text{ etc.} \\ \frac{1}{V}(u_x \mathfrak{E}_y - u_y \mathfrak{E}_z) &= M_{2x} \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Dieses Werthesystem befriedigt die Gleichungen (L′) (M′). Es liefert ferner für $u = 0$:

$$E_2 = 0 \qquad M_2 = 0 \text{ nach (8)},$$

also

$$E = E_1 \qquad M = M_1 \text{ nach (6)},$$

und demnach zwischen E, M einerseits und $\mathfrak{M}$, A, $\mathfrak{E}$ andererseits die Beziehungen (J″) (K″) nach (7).

Wird nun u von Null verschieden, so erhalten erstens die Gleichungen (7) Zusatzglieder, und zweitens tritt zu dem Felde E_1, M_1 der Gleichungen (7) das Feld E_2, M_2 der Gleichungen (8) hinzu.

Die Gleichungen (7) zeigen folgendes: Zu dem Anstieg der magnetischen Polarisation $\dot{\mathfrak{M}}$ tritt als gleichwerthig bezüglich der Rotation von E hinzu ein Vector $u\Gamma(\mathfrak{M})$; er hat die Richtung der Bewegung, und seine Grösse ist gleich der magnetischen Menge, welche, mit ihrem Träger, in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit geführt wird, der „convectiven magnetischen Strömung", wie wir sagen können. Wenden wir diesen Satz an auf einen ruhenden linearen Leiter, so sagt er aus: Solange auch in der Nachbarschaft alle Körper ruhen, erhalten wir das Linienintegral von E über die Curve s des Leiters (wenn wir von Hysteresis absehen) stets aus der zeitlichen Aenderung des Flächenintegrals von $\mathfrak{M}$ über eine feste in s ausgespannte Fläche S. Bewegen sich in der Nachbarschaft Magnete, so trifft dies nur noch zu, wenn die Fläche S nicht von Theilen eines Magneten durchdrungen wird. Im entgegengesetzten Fall muss zu der genannten Grösse die Aenderung des Flächenintegrals der Magnetisirung hinzugefügt, d. h. der Vector $\mathfrak{M}$ durch den Vector B, die magnetische Induction, ersetzt werden. Das gleiche Resultat erhält man, wenn man die Fläche S so deformirt, dass der Magnet sie nicht durchschneidet. Das eine oder

andere Verfahren haben wir in Kapitel IV und V wiederholt eingeschlagen. Der Satz ist durch die Erfahrung vollkommen bestätigt.

Weiter: zu der elektrischen Strömung A, welche für stationäre Felder die Rotation von M bestimmt, trat bereits für veränderliche Zustände in ruhenden Körpern als gleichwerthig hinzu der Anstieg der elektrischen Polarisation $\dot{\mathfrak{E}}$. Jetzt tritt weiter hinzu ein Vector von der Richtung der Bewegung und der Grösse $u\Gamma(\mathfrak{E})$, d. h. die „convective elektrische Strömung." — Dass thatsächlich ein Strom von convectiv fortbewegter Elektricität bei gleichem numerischem Betrage die gleichen magnetischen Wirkungen hat, wie ein elektrischer Strom im eigentlichen Sinn, hat Rowland*) gezeigt. —

Zu den Theilfeldern E_1, M_1 kommen nun weiter die durch (8) definirten E_2, M_2 hinzu. Es ist E_2 ein Vector von der Richtung $\perp \overset{\frown}{u\mathfrak{M}}$ und der Grösse

$$E_2 = \frac{1}{V}\, u\mathfrak{M} \sin(u\mathfrak{M}) \cdot \qquad (9)$$

Denkt man sich die magnetischen Kraftlinien im Raume ruhend, so ist dies die Anzahl der Kraftlinien, welche eine zur Bewegungsrichtung und zur Richtung von $\mathfrak{M}$ normale Strecke von der Länge Eins in Folge der Bewegung in der Zeit $\frac{1}{V}$ durchschneidet. Ein Beispiel eines solchen durch Bewegung entstehenden elektrischen Feldes haben wir in Kapitel V kennen gelernt; denn die Linienintegrale der auf solche Weise gebildeten E_2 geben für die geschlossene Curve eines linearen Leiters die thatsächlich beobachteten „inducirten elektromotorischen Kräfte" (vgl. S. 327).

Eine „inducirte magnetomotorische Intensität" könnte man entsprechend den Vector M_2 nennen; sie hat die Richtung $\perp \overset{\frown}{\mathfrak{E}u}$ und die Grösse

$$M_2 = \frac{1}{V}\, u\mathfrak{E} \sin(u\mathfrak{E}). \qquad (10)$$

*) Pogg. Ann. 158, S. 487.

Sie ist niemals beobachtet worden. Ebensowenig ist das Feld E_2 der Gleichung (9) beobachtet worden, abgesehen von den oben erwähnten Fällen, wo für eine in Leitern verlaufende geschlossene Curve s

$$\oint E_{2s}\, ds$$

einen von Null verschiedenen Werth hat, und somit ein inducirter Strom entsteht.

Dies wird verständlich durch folgende Bemerkung: ein elektrisches oder magnetisches Feld wird nie als solches wahrgenommen; es wird bemerkbar im allgemeinen nach Massgabe des Betrages, in welchem seine Energie in bestimmter Zeit in andere Energieformen übergeht oder bei bestimmten virtuellen Veränderungen in andere Energieformen übergehen würde. Wenn wir von vereinzelten Beobachtungen absehen, können wir hierfür einfacher sagen: wir erkennen und messen allgemein ein elektromagnetisches Feld, indem wir eine mechanische Kraft, d. h. die einer bestimmten virtuellen Verschiebung materieller Theilchen entsprechende Energieänderung messen; und wir können insbesondere ein elektrisches Feld in einem Leiter durch die in gegebener Zeit entwickelte Joule'sche Wärme erkennen und messen.

Bezeichnen wir nun im Falle der Gleichung (10) die Energie des primären, inducirenden Feldes, für die Volumeinheit berechnet, durch W_p, diejenige des inducirten, secundären durch W_s, so ist

$$W_p = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{E}^2}{\varepsilon}$$

$$W_s = \tfrac{1}{2}\,\mu M_2{}^2$$

und folglich gemäss (10) der Grössenordnung nach:

$$\frac{W_s}{W_p} = \frac{\varepsilon\mu}{V^2}\,u^2 = \left(\frac{u}{\omega}\right)^2.$$

ω ist von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit, und gegen diese ist jede Geschwindigkeit u, welche wir ponderablen

Massen ertheilen können, verschwindend klein. Daher wird, bei endlichem primärem Felde, das secundäre unwahrnehmbar bleiben, sofern es nicht etwa bezüglich räumlicher Parameter ungeheuer schnell variirt [vgl. S. 552 unter 4)].

Im Falle der Gleichung (9) ist

$$W_p = {}^1/_2 \frac{\mathfrak{M}^2}{\mu}$$

$$W_s = {}^1/_2\, \varepsilon E_2{}^2$$

und daher wieder

$$\frac{W_s}{W_p} = \left(\frac{u}{\omega}\right)^2.$$

Es gilt daher im allgemeinen die gleiche Bemerkung. Setzt sich aber die secundäre Energie durch elektrischen Strom in Joule'sche Wärme um, so ist der in der Zeit t umgesetzte Betrag

$$Jt = t\lambda\, E_2{}^2,$$

also der Grössenordnung nach

$$\frac{Jt}{W_p} = \frac{t\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2;$$

nun ist, wenn λ sich auf ein Metall bezieht und t eine wahrnehmbare Zeit bezeichnet, $\frac{t\lambda}{\varepsilon}$ eine ungeheuer grosse Zahl, und der vorstehende Quotient wird selbst für mässige u eine der Einheit vergleichbare Zahl.

Die mechanischen Kräfte. — Wir wollen schliesslich die mechanischen Kräfte unseres Feldes darstellen. Dazu geben wir zunächst den Gleichungen (L′) (M′) eine etwas veränderte Form. Aus (3) erhalten wir die folgende Gleichung, der sich zwei ähnliche, durch cyklische Vertauschung von x, y, z zu bildende an die Seite stellen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{M}_x}{dt} + \mathfrak{M}_x \Gamma(u) - \left(\mathfrak{M}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ = - V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right), \text{ etc.}\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{L}'')$$

Ebenso

$$\left.\begin{aligned}A_x + \frac{d\mathfrak{E}_x}{dt} + \mathfrak{E}_x \Gamma(u) - \left(\mathfrak{E}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ = V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right), \text{ etc.}\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{M}'')$$

Wir multipliciren die 6 Gleichungen der Reihe nach mit M_x, M_y, M_z, E_x, E_y, E_z, addiren, und multipliciren noch mit dem veränderlichen Volumen $d\tau'$ eines unveränderlichen Körperelements. So kommt:

$$\left.\begin{aligned}&\left[M \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + M\mathfrak{M}\cdot\Gamma(u)\right. \\ &\left.-\left(M_x\mathfrak{M}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cdots + M_y\mathfrak{M}_z\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + \cdots\right)\right] d\tau' \\ &+ d\Psi + \left[E \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + E\mathfrak{E}\cdot\Gamma(u)\right. \\ &\left.-\left(E_x\mathfrak{E}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cdots + E_y\mathfrak{E}_z\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + \cdots\right)\right] d\tau'\end{aligned}\right\} = \int \Sigma_n \, dS' \quad (11)$$

Hier bezeichnet (vgl. S. 397) Σ den durch die Gleichungen (67) des Kapitel VI definirten Vector, S' die Oberfläche von $d\tau'$; also bedeutet die rechte Seite die in der Zeiteinheit dem Theilchen zuströmende Energie. $d\Psi = (A_x E_x + \,.\,.) \, d\tau'$ ist die abgegebene thermisch-chemische Energie. — Wir führen noch die Aenderung der elektromagnetischen Energie dW des Theilchens ein. Es ist

$$dW = dW_e + dW_m,$$

wo

$$dW_e = d\tau' \int_0^{\mathfrak{E}} E \cdot \partial\mathfrak{E},$$

$$dW_m = d\tau' \int_0^{\mathfrak{M}} M \cdot \partial \mathfrak{M}.$$

Wir wollen

$$\frac{d}{dt}(dW)$$

bilden. Sowohl $d\tau'$ wie $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ sind Functionen von t. E und M sind bezw. Functionen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$; die Parameter dieser Functionen (für nicht-ferromagnetische Körper einfacher: die Constanten ε und μ) ändern sich ebenfalls im festen Körperelement, insofern dieses deformirt wird; von diesen sehr kleinen Aenderungen aber wollen wir, wie früher (Kap. I S. 84 und 91) absehen. Dann ist in den obigen Integralen nur die obere Grenze eine Function von t, und es wird

$$\frac{d}{dt}(dW_m) = d\tau' \, M \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \frac{d}{dt}(d\tau') \cdot \int_0^{\mathfrak{M}} M \cdot \partial \mathfrak{M}$$

oder nach S. 539

$$= d\tau' \left[M \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \Gamma(u) \int_0^{\mathfrak{M}} M \cdot \partial \mathfrak{M} \right].$$

Ebenso

$$\frac{d}{dt}(dW_e) = d\tau' \left[E \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \Gamma(u) \int_0^{\mathfrak{E}} E \cdot \partial \mathfrak{E} \right].$$

Führt man dies ein in (11), so kommt:

$$\left. \begin{aligned} & d\Psi + \frac{d}{dt}(dW) \\ & + d\tau' \left[\Gamma(u) \int_0^M \mathfrak{M} \cdot \partial M - \left(M_x \mathfrak{M}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cdots \right) \right] \\ & + d\tau' \left[\Gamma(u) \int_0^E \mathfrak{E} \cdot \partial E - \left(E_x \mathfrak{E}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cdots \right) \right] \end{aligned} \right\} = \int \Sigma_n \, dS' \quad (12)$$

Diese Gleichung geht in die Poynting'sche Gleichung Kapitel VI, (66) S. 397 über, sobald $u = 0$ gesetzt wird. Sie sagt dann aus, dass die dem Element durch die Oberfläche zuströmende Energie theils verbraucht wird als chemisch-thermische Energie, theils zur Vermehrung seiner elektromagnetischen Energie dient. Sobald Bewegungen stattfinden, tritt ein dritter Summand auf. Ein durch Bewegung eines Körpertheilchens bedingter Energieverbrauch ist eine an diesem Körpertheilchen geleistete Arbeit. Die an $d\tau'$ in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist demnach:

$$\partial A = \partial A_m + \partial A_e,$$

wo

$$\partial A_m = -\left\{\begin{aligned} &\left(M_x \mathfrak{M}_x - \int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(M_y \mathfrak{M}_y - \int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M\right)\frac{\partial u_y}{\partial y} \\ &\qquad + \left(M_z \mathfrak{M}_z - \int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M\right)\frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &+ M_y \mathfrak{M}_z \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + M_z \mathfrak{M}_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ &\qquad + M_x \mathfrak{M}_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} d\tau'$$

und ∂A_e entsprechend aus den Componenten von E und $\mathfrak{E}$ gebildet ist.

Spannungen. — Der vorstehende Werth von ∂A_m ist nach Kapitel I (60) S. 94 die Arbeit von Spannungen p^m, welche bestimmt sind durch:

$$\left.\begin{aligned} p^m_{xx} &= M_x \mathfrak{M}_x - \int_0^M \mathfrak{M}\cdot\partial M, \;.\;. \\ p^m_{yz} &= M_y \mathfrak{M}_z = M_z \mathfrak{M}_y, \;.\;. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Zu ihnen gesellt sich ein zweites System von Spannungen p^e, deren Arbeit ∂A_e ist; nämlich

$$\left.\begin{aligned} p^e_{xx} &= E_x \mathfrak{E}_x - \int_0^E \mathfrak{E}\cdot\partial E, \ldots \\ p^e_{yx} &= E_y \mathfrak{E}_x = E_x \mathfrak{E}_y, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die Spannungen (13) und (14) bilden den allgemeinsten Ausdruck des Kräftesystems, welches in einem beliebigen elektromagnetischen Felde besteht. Unter sehr speciellen Voraussetzungen — ruhende Körper, statisches Feld — haben wir die gleichen Ausdrücke schon früher abgeleitet (Kap. I S. 90 bezw. Kap. VIII, A, S. 517). Die beiden Annahmen, welche jener Ableitung zu Grunde lagen, — dass nämlich die elektromagnetische Energie sich im statischen Felde ausschliesslich in mechanische Arbeit umsetze, und dass die elektrischen und magnetischen Mengen die Verschiebungen ihrer materiellen Träger mitmachen, — erscheinen jetzt als Consequenzen unserer allgemeinen Gleichungen. [Man setze in (L′) (M′) A gleich Null und die zeitlichen Aenderungen sowie u verschwindend klein; dann wird in (12) $d\Psi = 0$ und $\int \Sigma_n dS'$ verschwindend klein. Bezüglich der zweiten Annahme s. (4) und (5).]

Druck auf bestrahlte Körper. — Aus den Ausdrücken (13) und (14) folgt u. A. (s. die angeführten Stellen) ein normaler Druck $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ auf jede zu den elektrischen Kraftlinien parallele Flächeneinheit, und ebenso (für nicht-ferromagnetische Körper) ein normaler Druck $\frac{1}{2}\mu M^2$ auf jede zu den magnetischen Kraftlinien parallele Flächeneinheit. Es falle nun normal auf die eine Basisfläche eines prismatischen Körpers eine periodische Strahlung. Sowohl E wie M liegen dann tangential zur Fläche, und es wirkt daher auf die Flächeneinheit ein normaler Druck

$$p = \tfrac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu M^2).$$

Der zeitliche Mittelwerth dieser Grösse ist nach S. 449:

$$[p] = \frac{[\Sigma_e] + [\Sigma_r]}{\omega}$$

wo $[\Sigma_e]$ und $[\Sigma_r]$ die mittleren Werthe der einfallenden und der reflectirten Strahlung und ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnen.

Nun möge der Körper so beschaffen sein, dass auf der gegenüberliegenden Basisfläche keine merkliche Strahlung austritt. Das kann sowohl dadurch geschehen, dass der Körper merklich alle auffallende Strahlung reflectirt, — wie dadurch, dass er die eindringende merklich vollständig absorbirt; das letztere geschieht stets bei hinreichender Dicke. Dann finden nur auf die Vorderseite Drucke statt, und es ist daher, wenn noch S die Grösse der Fläche bezeichnet, $[p]S$ die mittlere bewegende Kraft, welche auf den Körper in der Strahlungsrichtung wirkt.

Im Grenzfall a) eines vollkommen reflectirenden Körpers wird (s. l. c.)

$$[p] = \frac{2[\Sigma_e]}{\omega};$$

im Grenzfall b) eines nicht reflectirenden Körpers wird

$$[p] = \frac{[\Sigma_e]}{\omega}.$$

Volumkräfte. — Um aus den Spannungen p für den allgemeinsten Fall die Kräfte f zu erhalten, welche auf den materiellen Inhalt der Volumeinheit wirken, haben wir zu bilden:

$$f_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \quad \text{etc.}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} f_x^m = \Gamma(\mathfrak{M}) \cdot M_x - \int_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \cdot \partial M + \mathfrak{M}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \right) \\ + \mathfrak{M}_z \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right), \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x^e = \Gamma(\mathfrak{E}) \cdot E_x - \int\limits_0^E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E \cdot \partial E + \mathfrak{E}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\ + \mathfrak{E}_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

wo allgemein

$$\int\limits_0^E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E \cdot \partial E = {}^1/_2\, E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

ist, und für nicht-ferromagnetische Körper ebenso:

$$\int\limits_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \cdot \partial M = {}^1/_2\, M^2 \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Analyse der Kräfte. — Wir können die Werthe in (15) und (16) zerlegen:

1) es mögen die Körper ruhen, das Feld stationär sein und keine Strömung stattfinden. Dann sind nach (M′) bezw. (L′) die beiden letzten Summanden in f_x^m und f_x^e gleich Null, und wir erhalten die bekannten Kräfte der statischen Felder in der gleichen Form, wie sie in Kapitel VIII, A bezw. I abgeleitet wurden.

2) wenn im ruhenden und stationären Felde Strömung stattfindet, so bleibt, wie im statischen Feld,

$$f_x^e = \Gamma(\mathfrak{E}) \cdot E_x - {}^1/_2\, E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \text{etc.}; \qquad (17)$$

dagegen wird nach (M′):

$$f_x^m = \Gamma(\mathfrak{M}) \cdot M_x - \int\limits_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \cdot \partial M + \left(\mathfrak{M}_z \frac{A_y}{V} - \mathfrak{M}_y \frac{A_z}{V} \right), \quad \text{etc.} \qquad (18)$$

Das Zusatzglied

$$\mathfrak{M}_z \frac{A_y}{V} - \mathfrak{M}_y \frac{A_z}{V}$$

bedeutet eine mechanische Kraft, welche lediglich im durchströmten Leiter vorhanden ist, auf der Strömungsrichtung und Feldrichtung senkrecht steht und die Grösse

$$\mathfrak{M} \frac{A}{V} \sin (\mathfrak{M} A)$$

für die Volumeinheit besitzt. Der Ausdruck in (18) hatte sich uns in Kapitel IV (S. 258) durch eine naheliegende Verallgemeinerung ebenfalls ergeben als der wahrscheinlichste Werth der Kraft unter den allgemeinsten Bedingungen eines stationären Feldes. — Diese Kräfte sind genau gemessen und in Uebereinstimmung mit unseren Gleichungen gefunden worden wesentlich in Fällen, wo die Leiter als „lineare“ betrachtet werden durften. Es liegt aber kein Grund vor, ihre strenge Richtigkeit auch im Fall allseitig ausgedehnter Leiter zu bezweifeln.

3) Wenn die Körper ruhen, das Feld aber nicht stationär ist, so tritt nach (M′) in den Kräften f^m der Gleichung (18) allgemein zu A_l hinzu: $\frac{\partial \mathfrak{E}_l}{\partial t}$, d. h. zu der Strömung: der Anstieg der elektrischen Polarisation. Dieser verhält sich also wie ein elektrischer Strom auch bezüglich der mechanischen Kräfte, welche der „Stromträger“ erfährt. — Entsprechende Kräfte f^e erfährt nach (L′) der Träger eines „magnetischen Stromes“ $\dot{\mathfrak{M}}$, d. h. jedes Körperelement, in welchem die magnetische Polarisation sich ändert. — Eine Anordnung, bei welcher Kräfte dieser Art auftreten müssen, ist S. 395f. besprochen. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass sie nur in ungeheuer schnell veränderlichen Feldern der Beobachtung zugänglich werden können; sie sind thatsächlich bisher nicht beobachtet.

4) Sind die Körper in Bewegung, so treten in (15), bezw. (16), noch gemäss (M′), bezw. (L′), von u abhängige Glieder als neue Partialkräfte hinzu. Auch diese Kräfte sind nicht beobachtet worden. Das ist nicht auffällig: sei N (bezw. n) etwa die Richtung, in welcher sich $\mathfrak{E}$ (bezw. u) am schnellsten ändert, und $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial N} = \alpha \mathfrak{E}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \beta u$. Wenn dann die von u abhängigen Glieder in (M′) vergleichbar sein sollen mit der

Strömung A, welche demselben Felde E entspricht, so muss $\frac{\varepsilon}{\lambda} u\alpha$ oder $\frac{\varepsilon}{\lambda} u\beta$ eine nicht verschwindend kleine Zahl sein. Nun beziehen sich die beobachteten Kräfte auf durchströmte metallische Leiter; $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ ist daher eine verschwindend kleine Zeit.

Kräfte im Vacuum. — Die unter 3) erwähnten Zusatzkräfte müssen für sich allein zur Geltung kommen, wo in einem ruhenden Körper sowohl $\Gamma(\mathfrak{M})$ und $\Gamma(\mathfrak{E})$ wie $\frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot\cdot$ und $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\cdot\cdot$, wie endlich A gleich Null sind. Es liege also ein ruhender, homogener Isolator ohne elektrische oder magnetische Vertheilung vor. Dann wird nach (15) und (M′) bezw. (16) und (L′):

$$f_x^m = \frac{1}{V}\left[-\mathfrak{M}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}\right] \text{ etc.}$$

$$f_x^e = \frac{1}{V}\left[\mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t} - \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial t}\right] \text{ etc.,}$$

also

$$\left.\begin{aligned} f_x = f_x^m + f_x^e &= \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{E}_y \mathfrak{M}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{M}_y\right] \\ &= \frac{\varepsilon\mu}{V^2}\frac{\partial \Sigma_x}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial \Sigma_x}{\partial t} \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Diese Kräfte also wirken auf den Inhalt jedes Raumtheilchens, in dem eine veränderliche Strahlung vorhanden ist. Strahlung kennen wir aber auch in Räumen, in welchen ponderable Materie nicht nachweisbar ist. Die Kräfte (19) ändern ihre Werthe kaum wahrnehmbar, wenn wir aus dem durchstrahlten, und zunächst etwa mit Luft erfüllten Raum die Luft schrittweise entfernt denken. Dann scheint das Substrat für die Kräfte zu entschwinden. Es ist möglich, dass dieser Widerspruch auf einen Fehler in unseren Grundgleichungen hinweist; — möglich aber auch, dass er einen Anhalt liefert für eine künftige „Mechanik des Aethers“. Siehe Hertz Ausbreitung . . S. 284 und 295; Helmholtz, Abhandlungen, Band III, S. 526.

C. Anisotrope Medien.

Bei der Behandlung anisotroper Körper beschränken wir uns auf Isolatoren; damit sind zugleich alle ferromagnetischen Körper ausgeschlossen. Alle Erfahrungen, welche über das Verhalten anisotroper Isolatoren vorliegen, lassen sich wie folgt zusammenfassen: Es gelten die Maxwell'schen Grundgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{M}_N dS = -V\int_{O} E_s\,ds \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{E}_N dS = V\int_{O} M_s\,ds \tag{2}$$

$$dW_m = {}^1\!/_2\,[M_x\mathfrak{M}_x + M_y\mathfrak{M}_y + M_z\mathfrak{M}_z]\,d\tau \tag{3}$$

$$dW_e = {}^1\!/_2\,[E_x\mathfrak{E}_x + E_y\mathfrak{E}_y + E_z\mathfrak{E}_z]\,d\tau\,. \tag{4}$$

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ sind aber nicht mehr proportional und gleichgerichtet mit M und E. Vielmehr ist

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_x &= \mu_{11}M_x + \mu_{12}M_y + \mu_{13}M_z\\ \mathfrak{M}_y &= \mu_{21}M_x + \mu_{22}M_y + \mu_{23}M_z\\ \mathfrak{M}_z &= \mu_{31}M_x + \mu_{32}M_y + \mu_{33}M_z\\ \mu_{ik} &\equiv \mu_{ki}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z\\ \mathfrak{E}_y &= \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z\\ \mathfrak{E}_z &= \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z\\ \varepsilon_{ik} &\equiv \varepsilon_{ki}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo die μ_{ik} und ε_{ik} solche Werthe besitzen, dass allgemein, d. h. für alle Werthe der M_x.., bezw. E_x.., dW_m und dW_e positive Grössen sind.

Hieraus folgen wieder eine grosse Zahl allgemeiner Sätze in genau der gleichen Form, die wir für isotrope Isolatoren gefunden haben.

Zunächst sagen (1) und (2) wieder aus, dass die magnetischen bezw. elektrischen Mengen $\Gamma(\mathfrak{M})d\tau$ und $\Gamma(\mathfrak{E})d\tau$ unveränderlich an den Körperelementen haften, mögen diese nun ruhen oder sich bewegen.

Von jetzt an wollen wir nur ruhende Körper betrachten, so dass also (1) und (2) nicht mehr den Inhalt der Gleichungen (L), (M), sondern der specielleren (J), (K) besitzen. Sie können dann wieder in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial t} = - V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \text{ etc.} \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) \text{ etc.} \tag{2'}$$

Nach (3) und (5), bezw. (4) und (6), ist dann weiter

$$(M_x d\mathfrak{M}_x + M_y d\mathfrak{M}_y + M_z d\mathfrak{M}_z) d\tau$$
$$= \tfrac{1}{2} d(M_x \mathfrak{M}_x + M_y \mathfrak{M}_y + M_z \mathfrak{M}_z) d\tau = dW_m$$
$$(E_x d\mathfrak{E}_x + E_y d\mathfrak{E}_y + E_z d\mathfrak{E}_z) d\tau$$
$$= \tfrac{1}{2} d(E_x \mathfrak{E}_x + E_y \mathfrak{E}_y + E_z \mathfrak{E}_z) d\tau = dW_e.$$

Es ergiebt sich daher, genau wie in Kapitel VI, S. 396 f., für einen beliebigen Raum τ mit der Oberfläche S die Poynting'sche Gleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int \Sigma_n dS \tag{7}$$

wo

$$\Sigma_x = V(E_y M_z - E_z M_y) \text{ etc.} \tag{8}$$

D. h. die Strahlung Σ ist normal zu den Feldintensitäten E und M und hat den Werth $VEM \sin(EM)$.

Da die $\mathfrak{M}_x$.. und $\mathfrak{E}_x$.. lineare und homogene Functionen der M_x.., bezw. E_x.. sind, so liefern irgend zwei Systeme E, M, welche Lösungen von (1) und (2) sind, durch Superposition wiederum ein System, welches den Gleichungen genügt; — und den superponirten Lösungssystemen entsprechen die superponirten Werthe der $\Gamma(\mathfrak{E})$ und $\Gamma(\mathfrak{M})$.

Da weiter dW_m und dW_e nach wie vor wesentlich positive Grössen sind, so bestehen weiter und ergeben sich wie früher alle Sätze über eindeutige Bestimmtheit von Lösungen.

Symmetrieebenen. $\frac{dW_e}{d\tau}$ ist eine homogene und wesentlich positive quadratische Function von E_x, E_y, E_z. Trägt man daher von einem festen Punkt aus nach allen Richtungen Vectoren E ab, deren Länge bestimmt ist durch die Gleichung

$$2\frac{dW_e}{d\tau} = 1, \tag{9a}$$

so bilden die Endpunkte die Oberfläche eines Ellipsoids. Wählt man die Hauptaxen desselben als Axen der x', y', z', so wird

$$\left.\begin{array}{c} dW_e = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1 E_{x'}^2 + \varepsilon_2 E_{y'}^2 + \varepsilon_3 E_{z'}^2)\,d\tau, \\ \mathfrak{E}_{x'} = \varepsilon_1 E_{x'}, \quad \mathfrak{E}_{y'} = \varepsilon_2 E_{y'}, \quad \mathfrak{E}_{z'} = \varepsilon_3 E_{z'}, \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ positiv.} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Ebenso liefern die Hauptaxen des Ellipsoids

$$2\frac{dW_m}{d\tau} = 1 \tag{10a}$$

ein System der x'', y'', z'', für welches

$$\left.\begin{array}{c} dW_m = \frac{1}{2}\,(\mu_1 M_{x''}^2 + \mu_2 M_{y''}^2 + \mu_3 M_{z''}^2) \\ \mathfrak{M}_{x''} = \mu_1 M_{x''}, \quad \mathfrak{M}_{y''} = \mu_2 M_{y''}, \quad \mathfrak{M}_{z''} = \mu_3 M_{z''}) \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ positiv.} \end{array}\right\} \tag{10}$$

Krystalle. — Wir wollen lediglich homogene anisotrope Körper, d. h. homogene Krystalle betrachten. In einem solchen sind die ε_{ik} und μ_{ik} Constanten dem Orte nach; es sind daher auch die Axen der x', y', z' und x'', y'', z'' im Körper festliegende, überall gleiche Richtungen. — Besitzt ein Krystall eine Symmetrieebene σ, und ist ν eine Normale von σ, so dürfen sich die Werthe von dW_e und dW_m nicht ändern, wenn

ν mit $-\nu$ vertauscht wird; es ist daher ν eine Hauptaxe der beiden Ellipsoide (9a) und (10a), d. h. Axe eines möglichen x', y', z'- und eines möglichen x'', y'', z''-Systems. — Schneiden sich ferner in einer Axe ν mehrere gleichwerthige Symmetrieebenen unter dem Winkel ϑ, so darf sich der Werth von dW_e nicht ändern, wenn der Vector E mit unverändertem Zahlwerth um den Winkel ϑ um ν rotirt, d. h. ν ist Rotationsaxe des Ellipsoids (9a) und ebenso des Ellipsoids (10a). Wählen wir ν als Axe der x' und x'', so wird daher $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und $\mu_2 = \mu_3$. — Giebt es endlich in einem Krystall mehrere Axen, in deren jeder sich mehrere gleichwerthige Symmetrieebenen schneiden, so haben die Ellipsoide mehr als eine Rotationsaxe, sind also Kugeln. Es ist dann folglich $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

1) Die Krystalle des asymmetrischen (triklinen) Systems besitzen keine krystallographische Symmetrieebene. Sie besitzen gleichwohl drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen der elektrischen, und drei der magnetischen Energie. Diese beiden Gruppen haben jedoch eine nothwendige Beziehung weder zu einander, noch zur Krystallform.

2) im monosymmetrischen (monoklinen) System existirt eine krystallographische Symmetrieebene. Die Normale ν derselben gehört nothwendig dem System der elektrischen wie der magnetischen Symmetrieaxen an. Sie sei $= x' = x''$, dann sind y', z' und y'', z'' zu ν senkrechte, im übrigen aber willkürliche und von einander unabhängige Richtungen.

3) im rhombischen System existiren drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen. Mit ihnen fallen nothwendig zusammen die Ebenen des elektrischen $x'\,y'\,z'$- und des magnetischen $x''\,y''\,z''$-Systems. Die beiden Axensysteme sind also nothwendig identisch. Wählen wir sie als xyz-Axen, so wird

$$\mathfrak{M}_x = \mu_1 M_x, \quad \mathfrak{M}_y = \mu_2 M_y, \quad \mathfrak{M}_z = \mu_3 M_z, \tag{5a}$$

$$\mathfrak{E}_x = \varepsilon_1 E_x, \quad \mathfrak{E}_y = \varepsilon_2 E_y, \quad \mathfrak{E}_z = \varepsilon_3 E_z. \tag{6a}$$

4) und 5) im tetragonalen und hexagonalen System existirt eine ausgezeichnete Symmetrieebene, und in deren Normale, der krystallographischen „Hauptaxe“, schneiden sich zwei bezw.

drei unter sich gleichwerthige Symmetrieebenen. Wählen wir also die Hauptaxe zur x-Axe, so wird $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $\mu_2 = \mu_3$.

6) in regulären Krystallen existiren drei zu einander senkrechte und unter sich gleichwerthige Symmetrieebenen. Also ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3.$$

Ein regulärer Krystall verhält sich folglich in elektromagnetischer Beziehung wie ein isotroper Körper.

Gesetze des statischen Feldes. — Wir wollen zunächst statische Felder betrachten. Für diese folgt aus (1) wie früher

$$\oint E_s\,ds = 0, \quad \text{oder } E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}, \; \varphi \text{ einwerthig;}$$

und hieraus ergiebt sich weiter in der gleichen Weise wie in Kapitel I: das Feld E ist völlig bestimmt, sobald noch die Elektricitätsvertheilung gegeben ist. Es ist ferner wiederum

$$W_e = {}^1\!/_2 \int \varphi \cdot \Gamma(\mathfrak{E})\,d\tau = {}^1\!/_2\, \Sigma \varphi e. \tag{11}$$

Wir können ferner, aus denselben Gründen wie in Kapitel I, die mechanische Arbeit, welche von elektrischen Kräften bei irgend welchen virtuellen Verschiebungen geleistet wird, gleich der diesen Verschiebungen entsprechenden Abnahme von W_e setzen:

$$A = -\delta W_e. \tag{12}$$

Aus diesem Ansatz muss auch jetzt der allgemeinste Ausdruck der im elektrostatischen Felde wirksamen mechanischen Kräfte folgen. Wir gehen indessen auf diese Entwicklungen nicht ein, sondern beschränken uns auf einen speciellen Fall.

Elektrische Kräfte auf einen ungeladenen Krystall. — In ein gegebenes Feld E_0 ($\mathfrak{E}_0\, \varphi_0\, W_{e0}$) werde ein ungeladener krystallinischer Körper vom Volumen τ an Stelle

von Luft (ε_0) eingeführt. Das Feld sei jetzt $E\,(\mathfrak{E}\,\varphi\,W'_e)$. Die Elektricitätsvertheilung ist nirgends geändert; es ist also

$$\Gamma(\mathfrak{E}) = \Gamma(\mathfrak{E}_0)\,.$$

Demnach kann (11) geschrieben werden:

$$W_e = {}^1/_2 \int\limits_{\infty} \varphi \cdot \Gamma(\mathfrak{E}_0)\, d\tau = {}^1/_2 \int\limits_{\infty} (E_x\,\mathfrak{E}_{0x} + \cdot\cdot)\, d\tau$$

$$W_{e0} = {}^1/_2 \int\limits_{\infty} \varphi_0 \cdot \Gamma(\mathfrak{E})\, d\tau = {}^1/_2 \int\limits_{\infty} (E_{0x}\,\mathfrak{E}_x + \cdot\cdot)\, d\tau\,.$$

Ueberall ausserhalb τ ist

$$E_x\,\mathfrak{E}_{0x} = \varepsilon\,E_{0x}\,E_x = E_{0x}\,\mathfrak{E}_x \text{ etc.}$$

In τ ist

$$\mathfrak{E}_{0x} = \varepsilon_0\,E_{0x} \text{ etc.,}$$

und weiter, wenn wir der Einfachheit wegen die im Krystall festliegenden x', y', z' zu Coordinatenaxen wählen, nach (9)

$$\mathfrak{E}_x = \varepsilon_1\,E_x \text{ etc.}$$

Also

$$W_e - W_{e0} = -\,{}^1/_2 \int [(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,E_x\,E_{0x} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,E_y\,E_{0y} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_0)\,E_z\,E_{0z}]\, d\tau\,, \tag{13}$$

wo das Integral über das Volumen τ des Krystalls zu erstrecken ist. Einer virtuellen Verschiebung des Krystalls entspricht keine Aenderung von W_{e0}; also ist nach (12) auch:

$$A = -\,\delta\,(W_e - W_{e0})\,. \tag{14}$$

Um also die auf den Krystall wirkenden Kräfte berechnen zu können, genügt es, für die gegebene und für alle unendlich benachbarten Lagen die Werthe E_x .. im Innern des Krystalls zu kennen, neben den gegebenen E_{0x} ..

Krystallkugel im gleichförmigen Feld. — Die Aufgabe, E zu finden, ist im allgemeinen noch schwieriger als

die entsprechende Aufgabe für einen isotropen dielektrischen Körper; sie gestaltet sich aber sehr einfach in denjenigen Fällen, wo das Feld E im isotropen Körper constante Richtung haben würde. Aus diesen greifen wir wiederum nur den einfachsten heraus, als den praktisch allein wichtigen:

Eine krystallinische Kugel werde in ein Feld E_0 gebracht, welches bis auf Entfernungen, die sehr gross sind gegen den Kugelradius, nur Luft (ε_0) enthält, und welches als gleichförmig betrachtet werden darf in dem von der Kugel eingenommenen Raum.

Wäre die Kugel isotrop und ihre Constante ε_1, so würde nach Kapitel I, S. 114 das Feld in der Kugel parallel zu E_0 sein und den Werth

$$E = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} E_0$$

haben. D. h. dieses Feld E und die Polarisation $\mathfrak{E} = \varepsilon_1 E$ in der Kugel, nebst den a. a. Ort gegebenen Werthen ausserhalb der Kugel genügen allen Bedingungen. — Wird nun in unserer krystallinischen Kugel a) die x'-Axe dem Felde $E_0 = E_{0x}$ parallel gestellt, so wird offenbar dasselbe Feld

$$E_x = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} E_{0x} \tag{15a}$$

entstehen; denn ein Feld E und eine Polarisation $\mathfrak{E} = \varepsilon_1 E$ sind auch jetzt zusammengehörige Werthe.

b) Wird die y'-Axe des Krystalls dem Felde $E_0 = E_{0y}$ parallel gestellt, so entsteht ebenso im Innern ein zu E_{0y} paralleles Feld von der Grösse

$$E_y = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_0} E_{0y}. \tag{15b}$$

c) Ebenso erzeugt ein Feld E_{0z} parallel zur z'-Axe das Feld

$$E_z = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_3 + 2\varepsilon_0} E_{0z}. \tag{15c}$$

Ein ursprüngliches Feld E_0 aber, dessen Componenten nach x'.. sind: E_{0x}.., ergiebt ein Feld mit den Componenten E_x.. gemäss dem allgemeinen Superpositionsprincip.

Aus unseren Gleichungen resultiren zwei Messungsmethoden: Ist das Feld E_0 nicht streng gleichförmig, besitzt es vielmehr bei constanter Richtung eine langsam variirende Grösse (wie das Feld eines fernen geladenen Leiters), so wirkt nach (13) und (14) bei der Anordnung a) auf die Kugel eine translatorische Kraft zu wachsenden x:

$$f = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_x E_{0x} \tau\right] = \tfrac{3}{2}\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} \tau \frac{\partial (E_0{}^2)}{\partial x} \qquad (16a)$$

und entsprechend bei den Stellungen b) und c). Beobachtet man noch die Kräfte, welche auf eine leitende Kugel im gleichen Felde wirken, so erhält man $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}, \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}$ (vgl. Kapitel I, S. 114f.). Auf diesem Wege hat Boltzmann*) die 3 Dielektricitätsconstanten des Schwefels bestimmt: 3,8; 4,0; 4,8.

Bringt man ferner die Kugel in ein gleichförmiges horizontales Feld H, so dass sie sich um ihre verticale z'-Axe drehen kann, und bildet in einer bestimmten Lage die x'-Axe mit der Richtung von H den Winkel ϑ; dann ist nach (13) und (15a, b):

$$W_e - W_{e0} = -\tfrac{3}{2}\varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0}\cos^2\vartheta + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_0}\sin^2\vartheta\right] H^2 \tau,$$

also nach (14) das Drehungsmoment zu wachsenden ϑ:

$$\Theta = \frac{9\varepsilon_0{}^2}{2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0)(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_0)} H^2 \tau \sin 2\vartheta.$$

Unter übrigens gleichen Bedingungen erhält man in einem magnetischen Felde H das Drehungsmoment

$$\Theta = \frac{9\mu_0{}^2}{2} \frac{\mu_2 - \mu_1}{(\mu_1 + 2\mu_0)(\mu_2 + 2\mu_0)} H^2 \tau \sin 2\vartheta. \qquad (17)$$

---

*) Wiener Berichte (2.) 70, S. 342.

Da $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0}$ und $\frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0}$ stets sehr kleine Zahlen sind, so kann man hierfür auch schreiben:

$$\Theta = (\mu_2 - \mu_1)\, H^2 \tau \frac{\sin 2\vartheta}{2} \tag{18}$$

oder, indem man durch

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = 1 + 4\pi\varkappa_1 \qquad \frac{\mu_2}{\mu_0} = 1 + 4\pi\varkappa_2$$

die „Susceptibilitäten“ $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ einführt:

$$\Theta = (\varkappa_2 - \varkappa_1)\, 4\pi\mu_0\, H^2\, \tau \frac{\sin 2\vartheta}{2}. \tag{18a}$$

Da $\mu_0 H^2$ in absolutem mechanischem Mass bestimmt werden kann, so liefert die Methode den Zahlwerth $\varkappa_2 - \varkappa_1$ (oder $\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_0}\right)$. Sie ist von Stenger*) angewandt worden. Er fand für Kalkspath: $\varkappa_2 - \varkappa_1 = \text{ca. } 10^{-7}$.

Doppelbrechung. — Eine weitere wichtige Folgerung aus unseren Grundgleichungen betrifft die Gesetze, nach denen sich ebene Wellen in Krystallen ausbreiten. Wir wollen dieselben nur entwickeln unter der Voraussetzung, dass die Symmetrieebenen der elektrischen und der magnetischen Eigenschaften zusammenfallen. Durch diese Annahme schliessen wir möglicherweise einige besondere Eigenschaften der Strahlung in monosymmetrischen und asymmetrischen Krystallen von unserer Betrachtung aus; — wir schliessen aber keine beobachteten Thatsachen aus, vielmehr bleiben unsere Sätze noch so allgemein, dass sie die Gesammtheit aller Beobachtungen, wie sich zeigen wird, als Specialfall in sich schliessen.

Wir wählen das System der $x' \cdot\cdot$ und $x'' \cdot\cdot$ als Coordinatenaxen (x, y, z), so dass also (5) und (6) sich in (5a) und (6a) verwandeln, und wir suchen nach Lösungen unserer

*) Wied. Ann. 35, S. 331.

Differentialgleichungen (1') (2'), welche ebene Wellen darstellen. Das heisst wir setzen an:

$$\left.\begin{array}{ll} E_x = e_x \cdot F & M_x = m_x \cdot F \\ E_y = e_y \cdot F & M_y = m_y \cdot F \\ E_z = e_z \cdot F & M_z = m_z \cdot F \\ \multicolumn{2}{c}{F = F\,(n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z - t)} \end{array}\right\} \quad (19)$$

wo $e_x \cdot\cdot\, m_x \cdot\cdot\, n_x \cdot\cdot$ Constanten bezeichnen sollen, und F eine willkürliche Function des beigesetzten Arguments. Die elektrische, und ebenso die magnetische Feldintensität hat dann im ganzen Raum die gleiche Richtung. Ihre Grösse hat zu gegebener Zeit den gleichen Werth in jeder der unter sich parallelen Ebenen, deren Gleichung ist:

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = \text{const.} \quad (20)$$

und derjenige Werth, welcher zur Zeit t in der Ebene

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = 0$$

bestand, findet sich zur Zeit $(t + 1)$ in der Ebene:

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = 1\,. \quad (21)$$

Setzt man ferner

$$\frac{1}{\omega^2} = n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2, \quad (22)$$

so sind

$$n_x \cdot \omega = p\,, \quad n_y \cdot \omega = q, \quad n_z \cdot \omega = r \quad (23)$$

die Richtungscosinus der Normalen N dieser Ebenen, und ω ist die Strecke, um welche die E- und M-Werthe in der Zeit 1 auf der Richtung N vorgeschritten sind. Eine Ebene (20) heisst daher „Wellenebene“, N „Wellennormale“, ω „Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Welle“.

Wir betrachten die Richtung der Wellenfortpflanzung als vorgeschrieben, also p, q, r als gegebene Grössen. Wir fragen nach der Geschwindigkeit ω und nach Grösse und Richtung der beiden Feldintensitäten.

Wenn wir die angenommene Lösung (19) in die Differentialgleichungen (1′) (2′) einführen, so folgen die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_1 m_x = V(e_z n_y - e_y n_z) & \varepsilon_1 e_x = - V(m_z n_y - m_y n_z) \\ \mu_2 m_y = V(e_x n_z - e_z n_x) & \varepsilon_2 e_y = - V(m_x n_z - m_z n_x) \\ \mu_3 m_z = V(e_y n_x - e_x n_y) & \varepsilon_3 e_z = - V(m_y n_x - m_x n_y) \end{array}\right\} \quad (24)$$

In diese Gleichungen denken wir p, q, r mittels (23) eingeführt. Sie bestimmen dann die gesuchten Grössen, nämlich ω und die Verhältnisse der $m_x \cdot\cdot\; e_z$.

Zunächst folgt aus (24):

$$\left.\begin{array}{c} \mu_1 m_x \cdot n_x + \mu_2 m_y \cdot n_y + \mu_3 m_z \cdot n_z = 0 \\ \varepsilon_1 e_x \cdot n_x + \varepsilon_2 e_y \cdot n_y + \varepsilon_3 e_z \cdot n_z = 0 \\ \mu_1 m_x \cdot e_x + \mu_2 m_y \cdot e_y + \mu_3 m_z \cdot e_z = 0 \\ \varepsilon_1 e_x \cdot m_x + \varepsilon_2 e_y \cdot m_y + \varepsilon_3 e_z \cdot m_z = 0 \\ \mu_1 m_x^2 + \mu_2 m_y^2 + \mu_3 m_z^2 \\ = V[n_x(e_y m_z - e_z m_y) + n_y(e_z m_x - e_x m_z) + n_z(e_x m_y - e_y m_x)] \\ = \varepsilon_1 e_x^2 + \varepsilon_2 e_y^2 + \varepsilon_3 e_z^2 \end{array}\right\} \quad (25)$$

Das heisst:

$$\left.\begin{array}{cc} \mathfrak{M} \perp N & \mathfrak{E} \perp N \\ \mathfrak{M} \perp E & \mathfrak{E} \perp M \\ \multicolumn{2}{c}{dW_m = dW_e} \end{array}\right\} \quad (25')$$

In Worten: Magnetische und elektrische Polarisation liegen in der Wellenebene, — breiten sich in „transversalen“ Wellen aus. Die magnetische Polarisation ist senkrecht zur elektrischen Feldintensität, die elektrische Polarisation ist senkrecht zur magnetischen Feldintensität. Das Grössenverhältniss der Vectoren ist derart, dass zu jeder Zeit und in jedem Raumtheilchen die magnetische gleich der elektrischen Energie ist.

Es bleibt noch erstens der Werth von ω und zweitens die Richtung eines Vectors zu bestimmen. Die geometrische

Lösung dieser Aufgabe kann zurückgeführt werden auf die Construction einer gewissen Fläche, der sogenannten Wellenfläche:

Wir sahen in (7) und (8), dass auch in unserm krystallinischen Medium die Bewegung der Energie normal zu E und M erfolgt. Aus der Strahlung Σ wollen wir einen neuen, ihr parallelen Vector S definiren durch die Gleichung

$$S = \frac{\Sigma}{\frac{dW}{d\tau}}; \tag{26}$$

ausführlicher also:

$$S_x = \frac{\Sigma_x}{\frac{dW}{d\tau}}, \qquad S_y = \frac{\Sigma_y}{\frac{dW}{d\tau}}, \qquad S_z = \frac{\Sigma_z}{\frac{dW}{d\tau}}. \tag{26'}$$

S ist nach dieser Definition ein Mass für die Strahlung, welche nach verschiedenen Richtungen bei gleicher Dichte der Energie stattfindet. Es ist offenbar die Geschwindigkeit, mit welcher die Energie wandert, oder auch die Geschwindigkeit, mit welcher die Feldgrössen in der Richtung der Strahlung vorschreiten.

Um das auch rechnerisch zu zeigen, setzen wir die nach (25) identischen Grössen

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 m_x^2 + \mu_2 m_y^2 + \mu_3 m_z^2 &= \varepsilon_1 e_x^2 + \varepsilon_2 e_y^2 + \varepsilon_3 e_z^2 \\ &= V[n_x(e_y m_z - e_z m_y) + \cdot + \cdot] = A \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und finden aus (26'), (8), (9), (10) und (19):

$$\left.\begin{aligned} A \cdot S_x &= V(e_y \cdot m_z - e_z \cdot m_y) \\ A \cdot S_y &= V(e_z \cdot m_x - e_x \cdot m_z) \\ A \cdot S_z &= V(e_x \cdot m_y - e_y \cdot m_x) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Hieraus unter nochmaliger Benutzung von (27):

$$A(S_x \cdot n_x + S_y \cdot n_y + S_z \cdot n_z) = A, \quad \text{oder}$$

$$S_x \cdot n_x + S_y \cdot n_y + S_z \cdot n_z = 1. \tag{29}$$

D. h. wenn der Anfangspunkt des Vectors S in den Nullpunkt gelegt wird, so liegt der Endpunkt auf der Ebene (21); also: die E- und M-Werthe, welche zur Zeit t für den Anfangspunkt galten, gelten zur Zeit $t = 1$ für den Endpunkt von S (s. Fig. 54). Der Vector S, dessen Richtung durch (28) und dessen Grösse durch (29) definirt ist, heisst „Strahlgeschwindigkeit“.

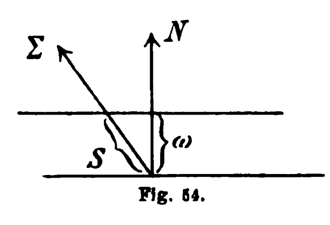


Fig. 54.

Es folgt aber weiter aus (24):

$$\varepsilon_2 e_y \cdot \mu_3 m_z - \varepsilon_3 e_z \cdot \mu_2 m_y = V^2 n_x \cdot [n_x (e_y m_z - e_z m_y) + \cdot + \cdot]$$

oder nach (27)

$$= V n_x A .$$

Also:

$$\left.\begin{aligned} VA \cdot n_x &= \varepsilon_2 e_y \cdot \mu_3 m_z - \varepsilon_3 e_z \cdot \mu_2 m_y \\ VA \cdot n_y &= \varepsilon_3 e_z \cdot \mu_1 m_x - \varepsilon_1 e_x \cdot \mu_3 m_z \\ VA \cdot n_z &= \varepsilon_1 e_x \cdot \mu_2 m_y - \varepsilon_2 e_y \cdot \mu_1 m_x \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Nun ist wegen der dritten und vierten der Gleichungen (25)

$$\begin{aligned} &[\varepsilon_2 e_y \cdot \mu_3 m_z - \varepsilon_3 e_z \cdot \mu_2 m_y] \cdot d[e_y \cdot m_z - e_z \cdot m_y] + \cdot + \cdot \\ &= [e_y \cdot m_z - e_z \cdot m_y] \cdot d[\varepsilon_2 e_y \cdot \mu_3 m_z - \varepsilon_3 e_z \cdot \mu_2 m_y] + \cdot + \cdot \end{aligned}$$

Daher folgt aus (28) und (30):

$$\begin{aligned} &A n_x \cdot d(A S_x) + A n_y \cdot d(A S_y) + A n_z \cdot d(A S_z) \\ &\qquad = A S_x \cdot d(A n_x) + A S_y \cdot d(A n_y) + A S_z \cdot d(A n_z), \end{aligned}$$

oder

$$n_x dS_x + n_y dS_y + n_z dS_z = S_x dn_x + S_y dn_y + S_z dn_z .$$

Nach (29) ist aber

$$(n_x dS_x + n_y dS_y + n_z dS_z) + (S_x dn_x + S_y dn_y + S_z dn_z) = 0 .$$

Also ergiebt sich:

$$n_x dS_x + n_y dS_y + n_z dS_z = 0\,, \tag{31}$$

und mit nochmaliger Benutzung von (29):

$$n_x(S_x + dS_x) + n_y(S_y + dS_y) + n_z(S_z + dS_z) = 1\,. \tag{32}$$

D. h. trägt man vom Nullpunkt aus nach allen Richtungen die Strahlgeschwindigkeit S ab, so liegt auf der Ebene (21) nicht nur der Endpunkt desjenigen S, welches zur Wellennormale N mit den Richtungscosinus $p = n_x\,\omega, \cdots$ gehört, sondern auf ihr liegen auch die Endpunkte aller unendlich benachbarten S. — Die Fläche, welche von den Endpunkten aller S gebildet wird, heisst herkömmlich „Wellenfläche“ (besser „Strahlenfläche“). Diese Fläche sei bekannt; dann folgt aus dem vorstehenden: für irgend eine vorgeschriebene Richtung der Wellennormale N construire man die zu N senkrechten Berührungsebenen an die Wellenfläche, (es wird sich zeigen, dass es im allgemeinen zwei solche Ebenen giebt); die Normalen vom Anfangspunkt auf diese Ebenen sind dann die möglichen Werthe der Wellengeschwindigkeit ω; die Vectoren, welche den Anfangspunkt mit den Berührungspunkten verbinden, geben nach Grösse und Richtung je die zugehörige Strahlgeschwindigkeit S.

Die weitere Behandlung unserer Gleichungen knüpfen wir zunächst an einen Specialfall an:

a) es sei $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, also $M \parallel \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} = \mu M$. Dann verwandeln sich (24) und (25) in:

$$\left.\begin{aligned}
\mu m_x &= V(e_z n_y - e_y n_z) & \varepsilon_1 e_x &= -V(m_z n_y - m_y n_z)\\
\mu m_y &= V(e_x n_z - e_z n_x) & \varepsilon_2 e_y &= -V(m_x n_z - m_z n_x)\\
\mu m_z &= V(e_y n_x - e_x n_y) & \varepsilon_3 e_z &= -V(m_y n_x - m_x n_y)
\end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

$$\left.\begin{aligned}
& m_x \cdot n_x + m_y \cdot n_y + m_z \cdot n_z = 0\\
& \varepsilon_1 e_x \cdot n_x + \varepsilon_2 e_y \cdot n_y + \varepsilon_3 e_z \cdot n_z = 0\\
& m_x \cdot e_x + m_y \cdot e_y + m_z \cdot e_z = 0\\
& \varepsilon_1 e_x \cdot m_x + \varepsilon_2 e_y \cdot m_y + \varepsilon_3 e_z \cdot m_z = 0\\
& \mu(m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) = \varepsilon_1 e_x^2 + \varepsilon_2 e_y^2 + \varepsilon_3 e_z^2
\end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

Also, mit Hinzunahme der Beziehungen, welche die Richtung des Strahles definiren:

$$\left.\begin{array}{l} M \perp N; \quad \mathfrak{E} \perp N; \; \mathfrak{E} \perp M. \\ M \perp S; \quad E \perp S; \; E \perp M. \end{array}\right\} \tag{33a}$$

d. h. einerseits (M, $\mathfrak{E}$, N), andrerseits (M, E, S) bilden ein System von drei zu einander senkrechten Richtungen. Ist daher zunächst mittels der Wellenfläche zu einer gegebenen Richtung N das zugehörige S gefunden, so ergiebt sich die Richtung von M als diejenige der gemeinsamen Normale von N und S, und weiter E als gemeinsame Normale von S und M, $\mathfrak{E}$ als gemeinsame Normale von N und M.

Rechnerisch wollen wir einen anderen Weg einschlagen: Aus der zweiten, vierten und dritten der Gleichungen (24a) und der ersten der Gleichungen (25a) folgt:

$$\begin{aligned} n_y \cdot \varepsilon_1 e_x - n_x \cdot \varepsilon_2 e_y &= V[-m_z(n_x^2 + n_y^2) + n_z(m_x n_x + m_y n_y)] \\ &= - V m_z (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \\ &= - \frac{V^2}{\mu} (e_y n_x - e_x n_y)(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \end{aligned}$$

Oder nach (22) und (23), wenn noch

$$\frac{V^2}{\mu \varepsilon_1} = a^2, \quad \frac{V^2}{\mu \varepsilon_2} = b^2, \quad \frac{V^2}{\mu \varepsilon_3} = c^2 \tag{34a}$$

gesetzt wird,

$$p \cdot \varepsilon_2 e_y (b^2 - \omega^2) = q \cdot \varepsilon_1 e_x (a^2 - \omega^2).$$

Also kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 e_x &= \varkappa \frac{p}{a^2 - \omega^2} \\ \varepsilon_2 e_y &= \varkappa \frac{q}{b^2 - \omega^2} \\ \varepsilon_3 e_z &= \varkappa \frac{r}{c^2 - \omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{35a}$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die zweite der Gleichungen (25a) ergiebt mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{p^2}{a^2-\omega^2}+\frac{q^2}{b^2-\omega^2}+\frac{r^2}{c^2-\omega^2}=0. \tag{36a}$$

Diese Gleichung ist quadratisch in ω^2; sie giebt daher für jede Richtung (p, q, r) der Wellennormale N zwei Werthe für die Wellengeschwindigkeit ω. Für jede dieser beiden Wellen giebt dann (35a) die Verhältnisse $\varepsilon_1 e_x : \varepsilon_2 e_y : \varepsilon_3 e_z$, d. h. die Richtung der elektrischen Polarisation $\mathfrak{E}$. Die gemeinsame Normale von N und $\mathfrak{E}$ ist nach (33a) die Richtung der magnetischen Vectoren M und $\mathfrak{M}$. — Für eine Welle von bestimmter Fortpflanzungsrichtung sind also nur zwei ganz bestimmte Polarisationszustände möglich. —

Die Gleichungen (36a) und (35a) sind identisch mit denjenigen, welche für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Lichtwellen in Krystallen, bezw. für die Richtung des zur „Polarisationsebene" senkrechten Vectors von Fresnel aufgestellt und durch die Erfahrung bestätigt sind. Es wird also die Richtung von M identisch mit der in der Polarisationsebene liegenden und zur Wellennormale senkrechten Richtung. Die Richtung des „Strahles" wird in der Krystalloptik entsprechend unserer Gleichung (28) und die „Strahlgeschwindigkeit" entsprechend unserer Gleichung (29) definirt.

Es lassen sich daher alle weiteren Consequenzen unserer Gleichungen aus der Krystalloptik herübernehmen, auf welche im allgemeinen nur verwiesen sei.*)

Hier möge noch die Gleichung der Wellenfläche angeführt werden; sie lautet:

$$\frac{a^2 S_x^2}{a^2-S^2}+\frac{b^2 S_y^2}{b^2-S^2}+\frac{c^2 S_z^2}{c^2-S^2}=0, \qquad S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned}(S_x^2+S_y^2+S_z^2)(a^2S_x^2+b^2S_y^2+c^2S_z^2)-[a^2(b^2+c^2)S_x^2\\ +b^2(c^2+a^2)S_y^2+c^2(a^2+b^2)S_z^2]+a^2b^2c^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{37a}$$

*) Vgl. z. B. Kirchhoff, Vorlesungen über mathemat. Optik.

Unser	N	S	M	$\mathfrak{E}$
hat dort die Richtungscosinus	(lmn)	$(\xi\eta\zeta)$	$(\alpha\beta\gamma)$	$(\mathfrak{abc})$.

Es mögen nun

b) μ_1, μ_2, μ_3 verschiedene Werthe haben. Setzt man dann

$$\left.\begin{array}{c}
\sqrt{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3} = \mu' \\
\mu_1 n_x^{\,2} + \mu_2 n_y^{\,2} + \mu_3 n_z^{\,2} = \dfrac{1}{\omega'^2} \\
n_x\sqrt{\mu_1} = n_x', \qquad n_y\sqrt{\mu_2} = n_y', \qquad n_z\sqrt{\mu_3} = n_z' \\
S_x = \sqrt{\mu_1}\cdot S_x', \qquad S_y = \sqrt{\mu_2}\cdot S_y', \qquad S_z = \sqrt{\mu_3}\cdot S_z' \\
\dfrac{e_x\sqrt{\mu_1}}{\omega} = \dfrac{e_x'}{\omega'}, \qquad \dfrac{e_y\sqrt{\mu_2}}{\omega} = \dfrac{e_y'}{\omega'}, \qquad \dfrac{e_z\sqrt{\mu_3}}{\omega} = \dfrac{e_z'}{\omega'} \\
\dfrac{m_x\sqrt{\mu_1}}{\omega} = \dfrac{m_x'}{\omega'}, \qquad \dfrac{m_y\sqrt{\mu_2}}{\omega} = \dfrac{m_y'}{\omega'}, \qquad \dfrac{m_z\sqrt{\mu_3}}{\omega} = \dfrac{m_z'}{\omega'} \\
\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \dfrac{\varepsilon_1'}{\mu'}, \qquad \dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2} = \dfrac{\varepsilon_2'}{\mu'}, \qquad \dfrac{\varepsilon_3}{\mu_3} = \dfrac{\varepsilon_3'}{\mu'}
\end{array}\right\} \quad (38)$$

so gelten für die gestrichenen Grössen an Stelle der Gleichungen (24) die Gleichungen (24a); die Gleichungen (22), (28), (29) aber bestehen für die gestrichenen so gut wie für die ungestrichenen Grössen. Es gelten also die unter a) gewonnenen Gleichungen, sofern man die ungestrichenen Buchstaben durch die gestrichenen ersetzt. In diesen Gleichungen hat man dann wieder für die S' .. ihre Werthe aus (38) einzuführen.

So folgt z. B. aus (37a) als allgemeine Gleichung der Wellenfläche:

$$\begin{aligned}
&V^2\left(\frac{S_x^{\,2}}{\varepsilon_1} + \frac{S_y^{\,2}}{\varepsilon_2} + \frac{S_z^{\,2}}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{S_x^{\,2}}{\mu_1} + \frac{S_y^{\,2}}{\mu_2} + \frac{S_z^{\,2}}{\mu_3}\right) \\
&- V^4\left[\frac{S_x^{\,2}}{\varepsilon_1\mu_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2\mu_3} + \frac{1}{\varepsilon_3\mu_2}\right) + \frac{S_y^{\,2}}{\varepsilon_2\mu_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_3\mu_1} + \frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}\right)\right. \\
&\qquad\left. + \frac{S_z^{\,2}}{\varepsilon_3\mu_3}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_2} + \frac{1}{\varepsilon_2\mu_1}\right)\right] + V^6\frac{1}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3} = 0.
\end{aligned} \quad (37\mathrm{b})$$

Die Abweichungen dieser Fläche von der Fresnel'schen Wellenfläche (37a), deren Eigenschaften wir als bekannt voraussetzen, bestehen im folgenden: Sie ist, nach Festlegung der

Symmetrieebenen, nicht durch drei, sondern durch sechs Constanten bestimmt, aus welchen sich sechs „Hauptbrechungsexponenten" definiren lassen. — Jede Kreislinie auf der Fresnel'schen Fläche ist in eine Ellipse verwandelt. Insbesondere wird die Fläche von ihren drei Symmetrieebenen je in zwei Ellipsen geschnitten. Es gilt daher das Snellius'sche Brechungsgesetz auch unter der Einschränkung nicht mehr, dass der Strahl ein „ordentlicher" sei und sich lediglich in der Symmetrieebene drehe.

Handelt es sich insbesondere um einen einaxigen Krystall, so zerfällt die Wellenfläche in zwei Rotationsellipsoide mit gemeinsamer Rotationsaxe, der krystallographischen Hauptaxe. Für diese Richtung fallen also noch immer Strahl und Wellennormale zusammen; jeder Polarisationszustand ist für Wellen von dieser Fortpflanzungsrichtung möglich, und für alle gilt die gleiche Geschwindigkeit. — Aber es giebt keinen „ordentlichen Strahl" mehr, der die gleiche Geschwindigkeit für alle Fortpflanzungsrichtungen besitzt.

Die im vorstehenden theoretisch entwickelten Gesetze der „Doppelbrechung" sind bisher mit elektrischen Hülfsmitteln in folgendem Umfang experimentell bestätigt worden: in einem Krystall können sich in vorgeschriebener Richtung im allgemeinen zwei geradlinig polarisirte ebene Wellen von verschiedenem Polarisationszustand mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Für Schwefel ergeben sich die Geschwindigkeiten in genügender Uebereinstimmung mit den Werthen, welche aus den statischen Messungen der Dielektricitätsconstanten folgen. (Vgl. oben S. 561 und Lebedew in Wied. Ann. 56, S. 6.) — Die genauere quantitative Prüfung ist ausschliesslich auf optischem Gebiet erfolgt: Unsere Gleichungen enthalten die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts, sobald man die Ebene, welche in der Theorie Wellennormale und magnetische Polarisation enthält, identificirt mit der Ebene, welche experimentell als „Polarisationsebene" definirt ist. Die Uebereinstimmung gilt aber nur innerhalb der „Optik einer Schwingungszahl": die Constanten unserer Gleichungen erweisen sich experimentell nicht als Körperconstanten, sondern als Functionen der Schwingungszahl. Der Umfang der Uebereinstimmung ist also der gleiche, wie für

isotrope Isolatoren (s. Kap. VII, § 5.). — Andrerseits hat sich zur Darstellung der Beobachtungen bisher die einfachere Form der Gleichungen, unter a), als völlig ausreichend erwiesen, welche durch Vernachlässigung der Differenzen zwischen μ_1, μ_2 und μ_3 entsteht. In Anbetracht der sehr kleinen Werthe dieser Differenzen, welche durch statische Beobachtungen ermittelt sind (s. S. 562), spricht dies keineswegs dagegen, dass die allgemeineren Gleichungen, unter b), die genauere Darstellung der Wirklichkeit bieten.

Register.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

ən.

t in einem

it.

ε_0 für Va-

ı (λ_1 für

che. Inten-

t.
Zeiteinheit.
chemische
it.

μ_0 für Va-

M_2 durch

Hauptgleichungen.

	Seite
$\frac{\partial}{\partial t}\int \mu M_N dS = -V\oint E_s ds.$	352
$\mu \dot{M} = -V \cdot P(E).$	353
$\frac{\partial(\mu M_x)}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)$	
$\frac{\partial(\mu M_y)}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$	353
$\frac{\partial(\mu M_z)}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$	
$\int\left(A_N + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_N)\right) dL = V\oint M_l dl.$	367
$A + \varepsilon \dot{E} = V \cdot P(M).$	367
$A_x + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_x) = V\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)$	
$A_y + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_y) = V\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right)$	367
$A_z + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_z) = V\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)$	
$A_l = \lambda(E_l - K_l).$	

